ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Н. БУРБАКИ

ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ

Главы I–III

Группа французских математиков, объединенная под псевдонимом «Бурбаки», поставила перед собой цель — написать под общим заглавием «Элементы математики» полный трактат современной математической науки.

Много томов этого трактата уже вышло во Франции. Они вызвали большой интерес математиков всего мира как новизной изложения, так и высоким научным уровнем.

Книга рассчитана на математиков — научных работников, аспирантов и студентов старших курсов.

ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР

Н. БУРБАКИ

ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES
1285, 1349

ÉLÉMENTS DE MATHÉMATIQUE

par

N. BOURBAKI

Fascicules XXVI, XXXVII

GROUPES
ET ALGÉBRES DE LIE

CHAPITRE I
ALGÉBRES DE LIE

CHAPITRE II
ALGÉBRES DE LIE LIBRES

CHAPITRE III
GROUPES DE LIE

HERMANN
156, Boulevard Saint-Germain, Paris VI
1971, 1972

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

Н. БУРБАКИ

ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ

АЛГЕБРЫ ЛИ, СВОБОДНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ И ГРУППЫ ЛИ

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО
Ю. А. БАХТУРИНА И Г. И. ОЛЬШАНСКОГО

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
А. А. КИРИЛЛОВА И А. И. КОСТРИКИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

МОСКВА 1976

УДК 512; 519.46

Книга входит в завоевавшую мировое признание энциклопедию современной математики «Элементы математики», созданную группой французских ученых, выступающих под псевдонимом Н. Бурбаки.

В 1972 г. издательством «Мир» был выпущен перевод гл. IV—VI книги «Группы и алгебры Ли», а сейчас предлагается перевод ее начальных глав (в таком же порядке выходили французские издания). Книга отражает самые современные результаты в этой области. В ней имеется обширный материал по теории алгебр Ли, свободных алгебр Ли и групп Ли.

Книга предназначена для широкого круга математиков различных специальностей — от студентов до научных работников.

Редакция литературы по математичгским наукам

Б $\frac{20203-478}{041(01)-76}$ 03—75

Н. БУРБАКИ

Группы и алгебры Ли

Редакторы Д. Борисова и Г. Цукерман
Художественный редактор В. Шаповалов. Технический редактор Е. Потапенкова

Сдано в набор 23/I 1975 г. Подписано к печати 25/II 1976 г. Бумага № 2 60×90$^1/_{16}$ = = 15,50 бум. л. 31,0 печ. л. Уч.-изд. л. 31,90 Изд. № 1/7557. Цена 2 р. 48 к. Зак. 612

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

ОТ РЕДАКТОРОВ ПЕРЕВОДА

В 1972 г. издательством „Мир“ был выпущен перевод глав IV — VI книги Н. Бурбаки „Группы и алгебры Ли“, входящей в известный трактат „Элементы математики“. Французское издание этих глав относится к 1968 г. Ко времени работы над русским изданием гл. IV — VI начальные главы книги еще не были полностью опубликованы, и тогда пришлось нарушить привычный порядок издания.

Настоящий выпуск заполняет образовавшийся пробел: он содержит перевод трех первых глав книги. Французские издания этих глав вышли в разное время: гл. I — вторым изданием в 1971 г., гл. II и III — первым изданием в 1972 г. Глава I посвящена алгебрам Ли, гл. II — свободным алгебрам Ли и гл. III — группам Ли. Логическая зависимость этих глав от других частей трактата указана в примечаниях в начале глав.

Короткое авторское введение имеется в гл. IV — VI (см. русское издание 1972 г.); в этих начальных главах авторское введение отсутствует.

ГЛАВА I

АЛГЕБРЫ ЛИ

В параграфах 1, 2 *и* 3 K *обозначает коммутативное кольцо с единицей. В параграфе* 4 K *обозначает поле. В параграфах* 5, 6 *и* 7 K *обозначает поле характеристики* 0[1]).

§ 1. Определение алгебр Ли

1. Алгебры

Пусть M — унитарный модуль над K, снабженный *билинейным* отображением $(x, y) \longmapsto xy$ произведения $M \times M$ в M. Тогда выполняются все аксиомы, определяющие алгебры, за исключением ассоциативности умножения. Допуская вольность речи, говорят, что M — *не обязательно ассоциативная алгебра* над K или, если нет опасности возникновения недоразумений, просто что M — *алгебра* над K. В настоящем параграфе мы будем использовать эту последнюю терминологию.

Если наделить K-модуль M умножением $(x, y) \longmapsto yx$, можно получить еще одну алгебру, про которую говорят, что она *противоположна* к ранее введенной.

K-подмодуль N модуля M, устойчивый относительно умножения, очевидным образом наделяется структурой алгебры над K. Говорят, что N есть *подалгебра* алгебры M. Кроме того, говорят, что N является *левым* (соотв. *правым*) *идеалом* алгебры M, если из того, что $x \in N$, $y \in M$, следует, что $yx \in N$ (соотв. $xy \in N$). Если N — одновременно и левый и правый идеал, то говорят, что он — *двусторонний идеал* алгебры M. В этом случае умножение в M позволяет определить посредством факторизации билинейное умножение в фактормодуле M/N таким образом, что M/N наделяется структурой алгебры. Говорят, что M/N является *факторалгеброй* алгебры M по идеалу N.

Пусть M_1 и M_2 — две алгебры над K и φ — отображение M_1 в M_2. Говорят, что φ — *гомоморфизм*, если оно K-линейно и если $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ для $x \in M_1$, $y \in M_1$. Ядро φ является двусторонним идеалом в M_1, а его образ — подалгеброй алгебры M_2.

---

[1]) Теоремы, доказываемые в настоящей главе, опираются исключительно на результаты, полученные в книгах I — VI, и на несколько результатов из *Комм. алг.*, гл. III, § 2.

При факторизации φ определяет изоморфизм алгебры M_1/N на алгебру $\varphi(M_1)$.

Пусть M — алгебра над K. Отображение D алгебры M в M называется *дифференцированием* этой алгебры, если оно K-линейно и если $D(xy)=(Dx)y+x(Dy)$, как только $x\in M$ и $y\in M$. Это определение обобщает определение 3 из *Алг.*, гл. IV, § 4, n° 3. Ядро дифференцирования алгебры M является подалгеброй в M. Если D_1 и D_2 — дифференцирования алгебры M, то $D_1D_2-D_2D_1$ — также дифференцирование M (см. *Алг.*, гл. IV, § 4, n° 3, предложение 5; доказательство этого утверждения не использует ассоциативности алгебры).

Пусть M_1 и M_2 — две алгебры над K. В модуле $M=M_1\times M_2$, являющемся произведением модулей M_1 и M_2, определим операцию умножения, полагая $(x_1, x_2)(y_1, y_2)=(x_1y_1, x_2y_2)$, если x_1, y_1 — элементы из M_1, а x_2, y_2 — элементы из M_2. Алгебра, определенная таким образом, называется *произведением* алгебр M_1 и M_2. Отображение $x_1\mapsto(x_1, 0)$ (соотв. $x_2\mapsto(0, x_2)$) является изоморфизмом M_1 (соотв. M_2) на двусторонний идеал алгебры M. С помощью этих изоморфизмов M_1 и M_2 отождествляются с двусторонними идеалами алгебры M. После этого K-модуль M становится прямой суммой подмодулей M_1 и M_2. Обратно, пусть M — алгебра над K и M_1, M_2 — двусторонние идеалы M, такие, что M является прямой суммой M_1 и M_2. Имеем $M_1M_2\subset M_1\cap M_2=\{0\}$; поэтому, если x_1, y_1 принадлежат M_1 и x_2, y_2 принадлежат M_2, то $(x_1+x_2)(y_1+y_2)=x_1y_1+x_2y_2$, так что M отождествляется с произведением алгебр $M_1\times M_2$. Каждый левый (соотв. правый, двусторонний) идеал алгебры M_1 является левым (соотв. правым, двусторонним) идеалом в M. Мы предлагаем читателю позаботиться о формулировке аналогичных результатов в случае произвольного конечного семейства алгебр.

Пусть M — алгебра над K, и предположим, что K-модуль M допускает базис $(a_\lambda)_{\lambda\in L}$. Для любых λ, μ из L существует, и притом единственная, система $(\gamma_{\lambda\mu\nu})_{(\lambda,\mu,\nu)\in L\times L\times L}$ элементов из K, такая, что $a_\lambda a_\mu=\sum_\nu \gamma_{\lambda\mu\nu}a_\nu$. Элементы $\gamma_{\lambda\mu\nu}$ называются *структурными константами алгебры M в базисе* (a_λ).

Пусть M — алгебра над K, K_0 — коммутативное кольцо с единицей, а ρ — гомоморфизм кольца K_0 в K, переводящий единицу в единицу. В этом случае M можно рассматривать как алгебру над K_0, полагая $\alpha\,.\,x=\rho(\alpha)\,.\,x$ для $\alpha\in K_0$, $x\in M$. В частности, это так, если в качестве K_0 взять подкольцо кольца K, содержащее единицу, а в качестве ρ — тождественное отображение K_0 в K.

Пусть M — алгебра над K, K_1 — коммутативное кольцо с единицей, а σ — гомоморфизм K в K_1, переводящий единицу в единицу.

Пусть $M_{(K_1, \sigma)} = M_{(K_1)}$ есть K_1-модуль, получающийся из M расширением кольца скаляров до K_1 (*Алг.*, гл. III, приложение II, n° 10). Умножение в M канонически определяет K_1-билинейное отображение $M_{(K_1)} \times M_{(K_1)}$ в $M_{(K_1)}$ (*Алг.*, гл. IX, § 1, n° 4) так, что $M_{(K_1)}$ оказывается наделенным структурой алгебры над K_1 (про которую говорят, что она *получается из M расширением кольца скаляров до K_1*). В частности, это так, если K — подкольцо кольца K_1, содержащее единичный элемент, и σ — тождественное отображение K в K_1.

2. Алгебры Ли

Определение 1. *Алгебра $\mathfrak{g}$ над K называется алгеброй Ли над K, если умножение в ней (обозначаемое через $(x, y) \mapsto [x, y]$) удовлетворяет тождествам*

$$[x, x] = 0, \tag{1}$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0, \tag{2}$$

где x, y, z — элементы из $\mathfrak{g}$.

Произведение $[x, y]$ называется *коммутатором* (иногда — *скобкой*) x и y. Тождество (2) называется *тождеством Якоби.*

Коммутатор $[x, y]$ является билинейной знакопеременной функцией элементов x, y. Это означает, что

$$[x, y] = -[y, x], \tag{3}$$

так что тождество Якоби можно записать в виде

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]. \tag{4}$$

Любая подалгебра и факторалгебра алгебры Ли сами являются алгебрами Ли. Произведение алгебр Ли также является алгеброй Ли. Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, то и алгебра $\mathfrak{g}^0$, ей противоположная, — снова алгебра Ли, а отображение $x \mapsto -x$ есть изоморфизм $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}^0$ в силу тождества (3).

Пример 1. Пусть L — ассоциативная алгебра над K. Коммутатор $[x, y] = xy - yx$ является билинейной функцией x и y. Легко проверить, что умножение в K-модуле L, задаваемое правилом $(x, y) \mapsto [x, y]$, превращает L в алгебру Ли над K.

Пример 2. В примере 1 выберем в качестве алгебры L алгебру эндоморфизмов K-модуля E. Тогда мы получим *алгебру Ли эндоморфизмов модуля E*, обозначаемую через $\mathfrak{gl}(E)$. (Если $E = K^n$, то вместо $\mathfrak{gl}(E)$ употребляется обозначение $\mathfrak{gl}(n, K)$.)

Любая подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{gl}(E)$ есть алгебра Ли над K. В частности:

1° Если модуль E наделен структурой алгебры (не обязательно ассоциативной), то дифференцирования алгебры E образуют алгебру Ли над K.

2° Если E допускает конечный базис, то его эндоморфизмы со следом нуль образуют алгебру Ли над K, которая обозначается через $\mathfrak{sl}(E)$ (или $\mathfrak{sl}(n, K)$, если $E = K^n$).

3° Множество $\mathbf{M}_n(K)$ квадратных матриц порядка n можно рассматривать как алгебру Ли над K, канонически изоморфную $\mathfrak{gl}(n, K)$. Пусть (E_{ij}) — канонический базис алгебры $\mathbf{M}_n(K)$ (*Алг.*, гл. II, § 6, n° 2). Легко получить, что

$$\begin{aligned} &[E_{ij}, E_{kl}] = 0, && \text{если } j \neq k \text{ и } i \neq l, \\ &[E_{ij}, E_{jl}] = E_{il}, && \text{если } i \neq l, \\ &[E_{ij}, E_{ki}] = -E_{kj}, && \text{если } j \neq k, \\ &[E_{ij}, E_{ji}] = E_{ii} - E_{jj}. && \end{aligned} \tag{5}$$

Символом $\mathfrak{t}(n, K)$ (соотв. $\mathfrak{st}(n, K)$, $\mathfrak{n}(n, K)$) обозначается подалгебра Ли алгебры $\mathbf{M}_n(K)$, образованная треугольными (соотв. треугольными со следом нуль, соотв. нильтреугольными) матрицами (*Алг.*, гл. II, § 6, n° 5).

**Пример* 3. Пусть V — бесконечно дифференцируемое вещественное многообразие. Дифференциальные операторы с вещественными бесконечно дифференцируемыми коэффициентами на V образуют ассоциативную алгебру над $\mathbf{R}$ и, следовательно, в соответствии с примером 1 алгебру Ли Δ над $\mathbf{R}$. Коммутатор двух бесконечно дифференцируемых векторных полей на V есть снова бесконечно дифференцируемое векторное поле, следовательно, бесконечно дифференцируемые векторные поля на V образуют подалгебру Ли $\mathfrak{f}$ алгебры Δ. Если V является *вещественной группой Ли*, то левоинвариантные векторные поля образуют подалгебру Ли $\mathfrak{g}$ алгебры $\mathfrak{f}$, называемую *алгеброй Ли группы* V. Векторное пространство $\mathfrak{g}$ отождествляется с касательным пространством к V в e (единичный элемент группы V). Пусть V' — другая вещественная группа Ли, e' — ее единичный элемент, $\mathfrak{g}'$ — ее алгебра Ли. Любой аналитический гомоморфизм многообразия V в V' определяет линейное отображение касательного пространства к V в e в касательное пространство к V' в e'; это отображение является гомоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли $\mathfrak{g}'$. Если V — линейная группа вещественного конечномерного пространства E, то существует канонический изоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{gl}(E)$ на алгебру Ли $\mathfrak{g}$ группы V, с помощью которого $\mathfrak{g}$ отождествляют с $\mathfrak{gl}(E)$.*

Определение 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и x — ее элемент. Линейное отображение $y \mapsto [x, y]$ алгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}$ называется*

линейным отображением, присоединенным к x, *и обозначается через* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$ *или* $\mathrm{ad}\, x$.

Предложение 1. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *алгебра Ли. Для любого* $x \in \mathfrak{g}$ *отображение* $\mathrm{ad}\, x$ *является дифференцированием алгебры* $\mathfrak{g}$. *Отображение* $x \mapsto \mathrm{ad}\, x$ *есть гомоморфизм алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *в алгебру Ли* $\mathfrak{d}$ *дифференцирований алгебры* $\mathfrak{g}$. *Если* $D \in \mathfrak{d}$ *и* $x \in \mathfrak{g}$, *то* $[D, \mathrm{ad}\, x] = \mathrm{ad}\,(Dx)$.

В самом деле, тождество (4) можно записать в виде

$$(\mathrm{ad}\, x) . [y, z] = [(\mathrm{ad}\, x) . y, z] + [y, (\mathrm{ad}\, x) . z],$$

или

$$(\mathrm{ad}\, [x, y]) . z = (\mathrm{ad}\, x) . ((\mathrm{ad}\, y) . z) - (\mathrm{ad}\, y) \cdot ((\mathrm{ad}\, x) \cdot z),$$

откуда вытекают два первые утверждения. С другой стороны, если $D \in \mathfrak{d}$, $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{g}$, то $[D, \mathrm{ad}\, x] . y = D([x, y]) - [x, Dy] = [Dx, y] = (\mathrm{ad}\, Dx) . y$, откуда вытекает последнее утверждение.

Отображение $\mathrm{ad}\, x$ называется также *внутренним дифференцированием*, определенным элементом x.

3. Коммутативные алгебры Ли

Определение 3. *Говорят, что два элемента* x, y *алгебры Ли перестановочны, если* $[x, y] = 0$. *Говорят, что* $\mathfrak{g}$ *коммутативна, если любые два ее элемента перестановочны.*

Пример 1. Пусть L — ассоциативная алгебра, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, которая определена в n° 2, *пример* 1. Два элемента x, y перестановочны в $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда $xy = yx$ в L.

**Пример* 2. Если вещественная группа Ли G коммутативна, то ее алгебра Ли коммутативна. *

Каждый K-модуль можно, очевидно, единственным образом наделить структурой коммутативной алгебры Ли над K.

Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, то любой ее моногенный подмодуль является коммутативной подалгеброй в $\mathfrak{g}$.

4. Идеалы

Из тождества (3) следует, что в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ нет разницы между левыми и правыми идеалами и любой идеал является двусторонним. Поэтому мы будем говорить просто об идеалах.

**Пример*. Пусть G — группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, H — подгруппа Ли в G. Любое левоинвариантное векторное поле на H канонически определяет левоинвариантное векторное поле на G, что влечет за собой наличие канонического вложения алгебры Ли $\mathfrak{h}$ группы H в $\mathfrak{g}$; посредством этого вложения $\mathfrak{h}$ отожде-

ствляется с подалгеброй алгебры $\mathfrak{g}$. Если H нормальна в G, то канонический образ $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ является в последней идеалом. *

Идеал алгебры $\mathfrak{g}$ является ее подмодулем, устойчивым относительно ее внутренних дифференцирований.

Определение 4. *Подмодуль алгебры $\mathfrak{g}$, устойчивый относительно всех ее дифференцирований, называется характеристическим идеалом в $\mathfrak{g}$.*

Предложение 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — ее идеал* (соотв. *характеристический идеал) и $\mathfrak{b}$ — характеристический идеал алгебры Ли $\mathfrak{a}$. Тогда $\mathfrak{b}$ — идеал* (соотв. *характеристический идеал) алгебры $\mathfrak{g}$.*

В самом деле, любое внутреннее дифференцирование (соотв. любое дифференцирование) $\mathfrak{g}$ отображает $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{a}$ и индуцирует в $\mathfrak{a}$ дифференцирование, а поэтому отображает и $\mathfrak{b}$ в себя.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — идеалы в $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ и $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ — идеалы в $\mathfrak{g}$.

Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — подмодули в $\mathfrak{g}$. Допуская вольность в обозначениях, символом $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ обозначим подмодуль модуля $\mathfrak{g}$, порожденный элементами вида $[x, y]$ $(x \in \mathfrak{a}, y \in \mathfrak{b})$. Вследствие тождества (3) выполняется равенство $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}] = [\mathfrak{b}, \mathfrak{a}]$. Если $z \in \mathfrak{g}$, то под $[z, \mathfrak{a}]$, или $[\mathfrak{a}, z]$, будем понимать подмодуль $[Kz, \mathfrak{a}] = (\operatorname{ad} z)(\mathfrak{a})$.

Предложение 3. *Если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — идеалы* (соотв. *характеристические идеалы) алгебры $\mathfrak{g}$, то $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ — также идеал*[1]) (соотв. *характеристический идеал) в $\mathfrak{g}$.*

В самом деле, пусть D — внутреннее (соотв. произвольное) дифференцирование алгебры $\mathfrak{g}$. Если $x \in \mathfrak{a}$ и $y \in \mathfrak{b}$, то

$$D([x, y]) = [Dx, y] + [x, Dy] \in [\mathfrak{a}, \mathfrak{b}],$$

откуда следует доказываемое утверждение.

Если $\mathfrak{a}$ — подмодуль в $\mathfrak{g}$, то множество $x \in \mathfrak{g}$, таких, что $(\operatorname{ad} x) . \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$, есть подалгебра $\mathfrak{n}$ алгебры $\mathfrak{g}$, называемая *нормализатором* $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{g}$. Если, кроме того, $\mathfrak{a}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{n}$ и $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{n}$.

5. Производный ряд, нижний центральный ряд

Характеристический идеал $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, обозначаемый через $\mathscr{D}\mathfrak{g}$, называется *производным* идеалом (или *коммутантом*) алгебры $\mathfrak{g}$.

Любой подмодуль в $\mathfrak{g}$, содержащий $\mathscr{D}\mathfrak{g}$, является идеалом в $\mathfrak{g}$.

---

[1]) Он называется взаимным коммутантом $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$. — *Прим. перев.*

Производным рядом алгебры $\mathfrak{g}$ называется убывающая последовательность $\mathscr{D}^0\mathfrak{g}, \mathscr{D}^1\mathfrak{g}, \ldots$ характеристических идеалов в $\mathfrak{g}$, рекуррентно определяемых следующим образом: 1) $\mathscr{D}^0\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$; 2) $\mathscr{D}^{p+1}\mathfrak{g} = [\mathscr{D}^p\mathfrak{g}, \mathscr{D}^p\mathfrak{g}]$.

Нижним (или *убывающим*) *центральным рядом* алгебры $\mathfrak{g}$ называется убывающая последовательность $\mathscr{C}^1\mathfrak{g}, \mathscr{C}^2\mathfrak{g}, \ldots$ характеристических идеалов, рекуррентно определяемых следующим образом: 1) $\mathscr{C}^1\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$; 2) $\mathscr{C}^{p+1}\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathscr{C}^p\mathfrak{g}]$. Имеем $\mathscr{C}^2\mathfrak{g} = \mathscr{D}\mathfrak{g}$ и $\mathscr{C}^{p+1}\mathfrak{g} \supset \mathscr{D}^p\mathfrak{g}$ для любых p, что немедленно доказывается индукцией по p.

Предложение 4. *Пусть $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$ — две алгебры Ли над K и f — гомоморфизм $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{h}$. Тогда $f(\mathscr{D}^p\mathfrak{g}) = \mathscr{D}^p\mathfrak{h}$, $f(\mathscr{C}^p\mathfrak{g}) = \mathscr{C}^p\mathfrak{h}$.*

Если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — подмодули в $\mathfrak{g}$, то обязательно $f([\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]) = [f(\mathfrak{a}), f(\mathfrak{b})]$. Утверждение доказывается теперь непосредственно индукцией по p.

Следствие. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Для того чтобы алгебра Ли $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ была коммутативной, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{a} \supset \mathscr{D}\mathfrak{g}$.*

В самом деле, безразлично, сказать ли, что $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ коммутативна или что $\mathscr{D}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a}) = 0$. Однако $\mathscr{D}(\mathfrak{g}/\mathfrak{a})$, согласно предложению 4, является каноническим образом $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$.

6. Верхний центральный ряд

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и P — подмножество в $\mathfrak{g}$. *Централизатором P* в $\mathfrak{g}$ называется совокупность элементов из $\mathfrak{g}$, перестановочных с этим множеством P. Централизатор есть пересечение ядер отображений $\operatorname{ad} y$, где y пробегает P, а потому является подалгеброй в $\mathfrak{g}$.

Предложение 5. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — идеал* (соотв. *характеристический идеал*) *в $\mathfrak{g}$. Централизатор $\mathfrak{a}'$ идеала $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{g}$ есть идеал* (соотв. *характеристический идеал*) *алгебры $\mathfrak{g}$.*

В самом деле, пусть D — внутреннее (соотв. произвольное) дифференцирование алгебры $\mathfrak{g}$. Если $x \in \mathfrak{a}'$ и $y \in \mathfrak{a}$, то

$$[Dx, y] = D([x, y]) - [x, Dy] = 0,$$

откуда $Dx \in \mathfrak{a}'$. Предложение доказано.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. *Центром* алгебры $\mathfrak{g}$ называется централизатор $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}$, т. е. характеристический идеал, состоящий из таких элементов $x \in \mathfrak{g}$, что $[x, y] = 0$ для всех $y \in \mathfrak{g}$. Центр алгебры $\mathfrak{g}$ является ядром гомоморфизма $x \mapsto \operatorname{ad} x$.

Верхним (или *возрастающим*) *центральным рядом* алгебры $\mathfrak{g}$ называется возрастающая последовательность $\mathscr{C}_0\mathfrak{g}$, $\mathscr{C}_1\mathfrak{g}, \ldots$ характеристических идеалов $\mathfrak{g}$, рекуррентно определяемых следующим образом: 1) $\mathscr{C}_0\mathfrak{g} = \{0\}$; 2) $\mathscr{C}_{p+1}\mathfrak{g}$ есть прообраз центра алгебры $\mathfrak{g}/\mathscr{C}_p\mathfrak{g}$ при каноническом отображении $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}/\mathscr{C}_p\mathfrak{g}$.

Идеал $\mathscr{C}_1\mathfrak{g}$ является центром алгебры $\mathfrak{g}$.

7. *Расширения*

Определение 5. *Пусть* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{b}$ — *две алгебры Ли над K. Расширением* $\mathfrak{b}$ *при помощи* $\mathfrak{a}$ (или *посредством* $\mathfrak{a}$) *называется последовательность.*

$$\mathfrak{a} \xrightarrow{\lambda} \mathfrak{g} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{b},$$

где $\mathfrak{g}$ — *алгебра Ли над K*, μ — *сюръективный гомоморфизм* $\mathfrak{g}$ *на* $\mathfrak{b}$ *и* λ — *инъективный гомоморфизм* $\mathfrak{a}$ *на ядро* μ.

Ядро $\mathfrak{n}$ гомоморфизма μ называется *ядром* этого расширения. Гомоморфизм λ является изоморфизмом алгебры $\mathfrak{a}$ на $\mathfrak{n}$, а гомоморфизм μ определяет при факторизации изоморфизм $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ на $\mathfrak{b}$.

Допуская вольность речи, говорят также, что $\mathfrak{g}$ является *расширением* $\mathfrak{b}$ *при помощи* $\mathfrak{a}$.

Два расширения

$$\mathfrak{a} \xrightarrow{\lambda} \mathfrak{g} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{a} \xrightarrow{\lambda'} \mathfrak{g}' \xrightarrow{\mu'} \mathfrak{b}$$

называются *эквивалентными*, если существует гомоморфизм f алгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}'$, такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{g} \arrow[dr, "\mu"] \arrow[dd, "f"] & \\ \mathfrak{a} \arrow[ur, "\lambda"] \arrow[dr, "\lambda'"'] & & \mathfrak{b} \\ & \mathfrak{g}' \arrow[ur, "\mu'"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна (т. е. что $f \circ \lambda = \lambda'$, $\mu' \circ f = \mu$). Покажем, что любой такой гомоморфизм обязательно *биективен*. Прежде всего, f инъективен. В самом деле, если $x \in \mathfrak{g}$ таков, что $f(x) = 0$, то $\mu(x) = \mu'(f(x)) = 0$, откуда $x = \lambda(y)$, где $y \in \mathfrak{a}$; далее, $\lambda'(y) = f(\lambda(y)) = f(x) = 0$, поэтому $y = 0$, а следовательно, и $x = 0$. С другой стороны, f сюръективен. Действительно, отображение $\mu' \circ f = \mu$ сюръективно, поэтому $f(\mathfrak{g}) + \lambda'(\mathfrak{a}) = \mathfrak{g}'$; из других соображений, однако, видно, что $f(\mathfrak{g}) \supset f(\lambda(\mathfrak{a})) = \lambda'(\mathfrak{a})$.

Из доказанного следует, что только что введенное отношение между двумя расширениями является *отношением эквивалентности.*

Предложение 6. *Пусть*

$$\mathfrak{a} \xrightarrow{\lambda} \mathfrak{g} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{b}$$

— расширение $\mathfrak{b}$ *при помощи* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{n}$ *— его ядро.*

а) *Если существует подалгебра* $\mathfrak{m}$ *алгебры* $\mathfrak{g}$, *дополнительная к* $\mathfrak{n}$ *в* $\mathfrak{g}$, *то ограничение* μ *на* $\mathfrak{m}$ *есть изоморфизм* $\mathfrak{m}$ *на* $\mathfrak{b}$. *Если* ν *обозначает изоморфизм, обратный к этому ограничению, то* ν *есть гомоморфизм* $\mathfrak{b}$ *в* $\mathfrak{g}$ *и* $\mu \circ \nu$ *есть тождественный автоморфизм алгебры* $\mathfrak{b}$.

б) *Обратно, если существует гомоморфизм* ν *алгебры* $\mathfrak{b}$ *в* $\mathfrak{g}$, *такой, что* $\mu \circ \nu$ *— тождественный автоморфизм на* $\mathfrak{b}$, *то* $\nu(\mathfrak{b})$ *является подалгеброй, дополнительной к* $\mathfrak{n}$ *в* $\mathfrak{g}$.

Утверждение пункта а) тривиально. Обратно, пусть ν — гомоморфизм $\mathfrak{b}$ в $\mathfrak{g}$, такой, что $\mu \circ \nu$ — тождественный автоморфизм на $\mathfrak{b}$. Тогда $\nu(\mathfrak{b})$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}$ — прямая сумма $\nu(\mathfrak{b})$ и $\mu^{-1}(0) = \mathfrak{n}$ (*Алг.*, гл. VIII, § 1, n° 1).

Определение 6. *Пусть*

$$\mathfrak{a} \xrightarrow{\lambda} \mathfrak{g} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{b}$$

— расширение $\mathfrak{b}$ *при помощи* $\mathfrak{a}$ *и* $\mathfrak{n}$ *— его ядро. Говорят, что это расширение является несущественным или расщепляется* (соотв. *тривиально*), *если существует подалгебра* (соотв. *идеал*), *дополнительная* (*дополнительный*) *к* $\mathfrak{n}$ *в* $\mathfrak{g}$. *Говорят, что это расширение центрально, если* $\mathfrak{n}$ *содержится в центре алгебры* $\mathfrak{g}$.

Если расширение тривиально, то пусть $\mathfrak{m}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, дополнительный к $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{g}$. В этом случае (см. n°. 1) $\mathfrak{g}$ канонически отождествляется с алгеброй Ли $\mathfrak{m} \times \mathfrak{n}$, а следовательно, и с алгеброй Ли $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$. Обратно, пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — две алгебры Ли; тогда $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ — тривиальное расширение $\mathfrak{a}$ при помощи $\mathfrak{b}$.

Несущественное центральное расширение тривиально. В самом деле, пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{n}$ — идеал этой алгебры, содержащийся в ее центре, $\mathfrak{m}$ — подалгебра $\mathfrak{g}$, дополнительная к $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{g}$. Имеем $[\mathfrak{m}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] + [\mathfrak{m}, \mathfrak{n}] = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, откуда следует, что $\mathfrak{m}$ — идеал алгебры $\mathfrak{g}$.

8. Полупрямые произведения

Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — две алгебры Ли над K. Нелегкой задачей представляется описание *всевозможных* расширений $\mathfrak{b}$ при помощи $\mathfrak{a}$. Однако мы опишем, и довольно просто, все *несущественные* расширения $\mathfrak{b}$ при помощи $\mathfrak{a}$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — несущественное расширение $\mathfrak{b}$ при помощи $\mathfrak{a}$. Отождествим $\mathfrak{a}$ с идеалом алгебры $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$ — с подалгеброй в $\mathfrak{g}$, дополнительной к $\mathfrak{a}$, и *модуль* $\mathfrak{g}$ — с *модулем* $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$. Для любого $b \in \mathfrak{b}$ пусть φ_b — ограничение на $\mathfrak{a}$ дифференцирования $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} b$;

это дифференцирование идеала $\mathfrak{a}$, и отображение $b \mapsto \varphi_b$ — гомоморфизм $\mathfrak{b}$ в алгебру Ли дифференцирований идеала $\mathfrak{a}$. С другой стороны, для a, a' из $\mathfrak{a}$ и b, b' из $\mathfrak{b}$ имеем

$$\begin{aligned}[(a, b), (a', b')] &= [a+b, a'+b'] = \\ &= [a, a'] + [a, b'] + [b, a'] + [b, b'] = \\ &= ([a, a'] + \varphi_b a' - \varphi_{b'} a, [b, b']). \end{aligned} \tag{6}$$

Обратно, пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — алгебры Ли над K и $b \mapsto \varphi_b$ — гомоморфизм $\mathfrak{b}$ в алгебру Ли дифференцирований алгебры $\mathfrak{a}$. В прямой сумме $\mathfrak{g}$ *K-модулей* $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ определим коммутатор двух элементов, полагая

$$[(a, b), (a', b')] = ([a, a'] + \varphi_b a' - \varphi_{b'} a, [b, b']),$$

где a, a' из $\mathfrak{a}$, а b, b' из $\mathfrak{b}$. Очевидно, что этот коммутатор есть билинейная знакопеременная функция аргументов (a, b), (a', b'); покажем, что если взять три элемента (a, b) (a', b'), (a'', b'') из $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$, то

$$\begin{aligned}[(a, b), [(a', b'), (a'', b'')]] + [(a', b'), [(a'', b''), (a, b)]] + \\ + [(a'', b''), [(a, b), (a', b')]] = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Так как первый член в (7) есть трилинейная знакопеременная функция (a, b), (a', b'), (a'', b''), достаточно произвести проверку равенства в случае, когда система элементов имеет одну из следующих форм:

$$(a, 0), (a', 0), (a'', 0), \tag{8}$$

$$(a, 0), (a', 0), (0, b''), \tag{9}$$

$$(a, 0), (0, b'), (0, b''), \tag{10}$$

$$(0, b), (0, b'), (0, b''). \tag{11}$$

В случаях (8) и (11) соотношение (7) является непосредственным следствием тождества Якоби в $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$. В случае (9) имеем

$$[(a, 0), [(a', 0), (0, b'')]] = [(a, 0), (-\varphi_{b''} a', 0)] = (-[a, \varphi_{b''} a'], 0),$$

$$[(a', 0), [(0, b''), (a, 0)]] = [(a', 0), (\varphi_{b''} a, 0)] = ([a', \varphi_{b''} a], 0),$$

$$[(0, b''), [(a, 0), (a', 0)]] = [(0, b''), ([a, a'], 0)] = (\varphi_{b''}([a, a']), 0),$$

и соотношение (7) следует из равенства

$$\varphi_{b''}([a, a']) = [\varphi_{b''} a, a'] + [a, \varphi_{b''} a'].$$

В случае (10) имеем

$$[(a, 0), [(0, b'), (0, b'')]] = [(a, 0), (0, [b', b''])] = (-\varphi_{[b', b'']}a, 0),$$
$$[(0, b'), [(0, b''), (a, 0)]] = [(0, b'), (\varphi_{b''}a, 0)] = (\varphi_{b'}\varphi_{b''}a, 0),$$
$$[(0, b''), [(a, 0), (0, b')]] = [(0, b''), (-\varphi_{b'}a, 0)] = (-\varphi_{b''}\varphi_{b'}a, 0),$$

и равенство (7) следует из

$$\varphi_{[b', b'']} = \varphi_{b'}\varphi_{b''} - \varphi_{b''}\varphi_{b'}.$$

Таким образом, на $\mathfrak{g}$ определена структура алгебры Ли. Отображение $(a, b) \mapsto b$ алгебры $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{b}$ является гомоморфизмом μ, ядром которого служит идеал $\mathfrak{n}$, состоящий из элементов алгебры $\mathfrak{g}$ вида $(a, 0)$. Отображение $a \mapsto (a, 0)$ есть изоморфизм λ алгебры $\mathfrak{a}$ на $\mathfrak{n}$. Поэтому

$$\mathfrak{a} \xrightarrow{\lambda} \mathfrak{g} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{b} \tag{12}$$

является расширением $\mathfrak{b}$ при помощи $\mathfrak{a}$ с ядром $\mathfrak{n}$, про которое говорят, что оно *канонически* определяется через $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, φ. Отображение $b \mapsto (0, b)$ есть изоморфизм ν алгебры $\mathfrak{b}$ на подалгебру из $\mathfrak{g}$, дополнительную к $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{g}$; поэтому расширение является несущественным.

Отождествляя $\mathfrak{a}$ с $\mathfrak{n}$ при помощи λ и $\mathfrak{b}$ с $\nu(\mathfrak{b})$ при помощи ν, для всех $a \in \mathfrak{a}$ и $b \in \mathfrak{b}$ получим

$$(\operatorname{ad} b).a = [(0, b), (a, 0)] = (\varphi_b a, 0) = \varphi_b a.$$

Если $\varphi = 0$, то $\mathfrak{g}$ — произведение алгебр $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{a}$. В общем случае $\mathfrak{g}$ называется *полупрямым произведением алгебры* $\mathfrak{b}$ *на алгебру* $\mathfrak{a}$ (соответствующим гомоморфизму $b \mapsto \varphi_b$ алгебры $\mathfrak{b}$ в алгебру Ли дифференцирований алгебры $\mathfrak{a}$).

Мы, таким образом, установили следующее предложение:

Предложение 7. *Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — две алгебры Ли над K,*

$$\mathfrak{a} \xrightarrow{\lambda} \mathfrak{g} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{b}$$

— несущественное расширение $\mathfrak{b}$ при помощи $\mathfrak{a}$, ν — изоморфизм $\mathfrak{b}$ на подалгебру алгебры $\mathfrak{g}$, такой, что $\mu \circ \nu$ — тождественный автоморфизм алгебры $\mathfrak{b}$, и φ — соответствующий гомоморфизм $\mathfrak{b}$ в алгебру Ли дифференцирований алгебры $\mathfrak{a}$. Пусть

$$\mathfrak{a} \xrightarrow{\lambda_0} \mathfrak{g}_0 \xrightarrow{\mu_0} \mathfrak{b}$$

— несущественное расширение $\mathfrak{b}$ при помощи $\mathfrak{a}$, канонически определенное через φ. Тогда отображение $(a, b) \mapsto \lambda(a) + \nu(b)$

является изоморфизмом $\mathfrak{g}_0$ *на* $\mathfrak{g}$ *и диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{g}_0 \arrow[dr, "\mu_0"] \arrow[dd, "f"] & \\ \mathfrak{a} \arrow[ur, "\lambda_0"] \arrow[dr, "\lambda"'] & & \mathfrak{b} \\ & \mathfrak{g} \arrow[ur, "\mu"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативна, так что указанные два расширения эквивалентны.

Пример 1. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K, D — ее дифференцирование. Пусть $\mathfrak{h}$ — *коммутативная* алгебра Ли K. Отображение $\lambda \mapsto \lambda D$ $(\lambda \in K)$ является гомоморфизмом $\mathfrak{h}$ в алгебру Ли дифференцирований алгебры $\mathfrak{g}$. Образуем соответствующее полупрямое произведение $\mathfrak{k}$ алгебры $\mathfrak{h}$ на алгебру $\mathfrak{g}$. Пусть x_0 — элемент $(0, 1)$ алгебры $\mathfrak{k}$. Для всех $x \in \mathfrak{g}$ имеем $Dx = [x_0, x]$.

Пример 2. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K, M — некоторый K-модуль, а ρ — гомоморфизм $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{gl}(M)$. Если рассматривать модуль M как коммутативную алгебру Ли, то ее алгебра дифференцирований есть просто $\mathfrak{gl}(M)$. Поэтому можно построить полупрямое произведение $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{g}$ на M, соответствующее гомоморфизму ρ.

Возьмем, в частности, $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(M)$, и пусть ρ — тождественное отображение алгебры $\mathfrak{gl}(M)$. Полупрямое произведение $\mathfrak{g}$ на M обозначается в этом случае через $\mathfrak{af}(M)$ (или $\mathfrak{af}(n, K)$, если $M = K^n$). Элемент из $\mathfrak{af}(M)$ представляет собой пару (m, u), где $m \in M$, $u \in \mathfrak{gl}(M)$, а коммутатор определяется формулой

$$[(m, u), (m', u')] = (u(m') - u'(m), [u, u']).$$

*Если M — векторное пространство конечной размерности над $\mathbf{R}$, то $\mathfrak{af}(M)$ канонически отождествляется с алгеброй Ли *аффинной группы* пространства M.*

Пусть $\mathfrak{t}$ — алгебра Ли над K. Линейное отображение θ алгебры $\mathfrak{t}$ в $\mathfrak{af}(M)$ может быть записано в виде $x \mapsto (\zeta(x), \eta(x))$, где ζ — линейное отображение алгебры $\mathfrak{t}$ в M и η — линейное отображение $\mathfrak{t}$ в $\mathfrak{gl}(M)$. Выясним, какими свойствами должны обладать ζ и η для того, чтобы θ было гомоморфизмом. Для всех $x \in \mathfrak{t}$, $y \in \mathfrak{t}$ должно выполняться равенство

$$\theta([x, y]) = [\theta(x), \theta(y)],$$

т. е.

$$(\zeta([x, y]), \eta([x, y])) = [(\zeta(x), \eta(x)), (\zeta(y), \eta(y))] =$$
$$= (\eta(x).\zeta(y) - \eta(y).\zeta(x), [\eta(x), \eta(y)]).$$

Поэтому для того, чтобы θ было гомоморфизмом алгебры $\mathfrak{t}$

в $\mathfrak{af}(M)$, необходимо и достаточно, чтобы η было гомоморфизмом $\mathfrak{t}$ в $\mathfrak{gl}(M)$ и ζ удовлетворяло соотношению

$$\zeta([x, y]) = \eta(x).\zeta(y) - \eta(y).\zeta(x). \tag{13}$$

Пусть N есть K-модуль $M \times K$. Возьмем за $\mathfrak{t}$ подалгебру алгебры $\mathfrak{gl}(N)$, образованную элементами $w \in \mathfrak{gl}(N)$, такими, что $w(N) \subset M$. Для всех $w \in \mathfrak{t}$ пусть $\eta(w) \in \mathfrak{gl}(M)$ — ограничение w на M, и пусть $\zeta(w) = w(0, 1) \in M$. Для $w_1 \in \mathfrak{t}$, $w_2 \in \mathfrak{t}$ имеем

$$\zeta([w_1, w_2]) = w_1(\zeta(w_2)) - w_2(\zeta(w_1)) = \eta(w_1).\zeta(w_2) - \eta(w_2).\zeta(w_1).$$

Поэтому отображение $w \mapsto (\zeta(w), \eta(w))$ является гомоморфизмом θ алгебры $\mathfrak{t}$ в $\mathfrak{af}(M)$. Ясно, что θ *биективно*. Пусть $\varphi = \theta^{-1}$. Если $(m, u) \in \mathfrak{af}(M)$, то $\varphi(m, u)$ есть элемент w алгебры $\mathfrak{t}$, определенный равенством

$$w(m', \lambda) = (u(m') + \lambda m, 0).$$

С помощью изоморфизма φ алгебра $\mathfrak{af}(M)$ часто отождествляется с подалгеброй $\mathfrak{t}$ алгебры $\mathfrak{gl}(N)$.

Если M — конечномерное векторное пространство над $\mathbf{R}$, то гомоморфизм φ алгебры $\mathfrak{af}(M)$ в $\mathfrak{gl}(N)$ соответствует каноническому гомоморфизму ψ аффинной группы A пространства M в группу $\mathbf{GL}(N)$; если $a \in A$, то $\psi(a)$ — единственный элемент g группы $\mathbf{GL}(N)$, такой, что $g(m, 1) = (a(m), 1)$ для всех $m \in M$. Этот гомоморфизм инъективен и $\psi(A)$ есть множество автоморфизмов N, оставляющих на месте все линейные многообразия в N, параллельные M.

9. *Замена кольца скаляров*

Пусть K_0 — коммутативное кольцо с единицей, ρ — гомоморфизм кольца K_0 в K, переводящий единицу в единицу. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K. Пусть, далее, $\mathfrak{g}'$ — алгебра, получающаяся из $\mathfrak{g}$, если последнюю рассматривать как алгебру над K_0 с помощью ρ (см. n° 1). Тогда $\mathfrak{g}'$ — алгебра Ли. Все подалгебры (соотв. идеалы) алгебры $\mathfrak{g}$ являются подалгебрами (соотв. идеалами) алгебры $\mathfrak{g}'$. Если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — подмодули в $\mathfrak{g}$, то взаимный коммутант $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ является взаимным коммутантом $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ в $\mathfrak{g}'$; в самом деле, $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]$ — множество элементов вида $\sum_{i=1}^{n} [x_i, y_i]$, где $x_i \in \mathfrak{a}$, $y_i \in \mathfrak{b}$. Отсюда следует, в частности, что $\mathscr{D}^p\mathfrak{g} = \mathscr{D}^p\mathfrak{g}'$, $\mathscr{C}^p\mathfrak{g} = \mathscr{C}^p\mathfrak{g}'$ для всех p. Далее, централизатор любого подмножества из $\mathfrak{g}$ — один и тот же и в $\mathfrak{g}$, и в $\mathfrak{g}'$. Поэтому $\mathscr{C}_p\mathfrak{g} = \mathscr{C}_p\mathfrak{g}'$ для всех p.

Пусть K_1 — коммутативное кольцо с единицей, σ — гомоморфизм кольца K в K_1, переводящий единицу в единицу. Пусть

Т.е. эл-т из $\mathfrak{g}$ это компонента степени 1

$\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K. Пусть, далее, $\mathfrak{g}_{(K_1)}$ — алгебра над K_1, получающаяся из $\mathfrak{g}$ расширением кольца скаляров (см. n° 1). Тогда $\mathfrak{g}_{(K_1)}$ является алгеброй Ли. Если $\mathfrak{a}$ — подалгебра (соотв. идеал) алгебры $\mathfrak{g}$, то канонический образ алгебры $\mathfrak{a}_{(K_1)}$ в $\mathfrak{g}_{(K_1)}$ есть подалгебра (соотв. идеал) в $\mathfrak{g}_{(K_1)}$. Если $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — подмодули в $\mathfrak{g}$, то канонический образ в $\mathfrak{g}_{(K_1)}$ модуля $[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]_{(K_1)}$ равен взаимному коммутанту канонических образов модулей $\mathfrak{a}_{(K_1)}$ и $\mathfrak{b}_{(K_1)}$. Отсюда следует, что $\mathscr{D}^p(\mathfrak{g}_{(K_1)})$ является каноническим образом $(\mathscr{D}^p\mathfrak{g})_{(K_1)}$ и что $\mathscr{C}^p(\mathfrak{g}_{(K_1)})$ — канонический образ $(\mathscr{C}^p\mathfrak{g})_{(K_1)}$.

Если K — поле, K_1 — подполе K и σ — каноническое вложение K в K_1, то, имея в виду обычные отождествления, получим

$$[\mathfrak{a}, \mathfrak{b}]_{(K_1)} = [\mathfrak{a}_{(K_1)}, \mathfrak{b}_{(K_1)}], \quad \mathscr{D}^p(\mathfrak{g}_{(K_1)}) = (\mathscr{D}^p\mathfrak{g})_{(K_1)}, \quad \mathscr{C}^p(\mathfrak{g}_{(K_1)}) = (\mathscr{C}^p\mathfrak{g})_{(K_1)}.$$

Такого сорта результаты будут получены и в § 2, n° 9.

Если M — конечномерное векторное пространство над полем K, то $M_{(K_1)}$ — конечномерное векторное пространство над K_1, и ассоциативная алгебра $\mathscr{L}(M_{(K_1)})$ канонически отождествляется с ассоциативной алгеброй $\mathscr{L}(M)_{(K_1)}$. Поэтому алгебра Ли $\mathfrak{gl}(M_{(K_1)})$ канонически отождествляется с алгеброй Ли $\mathfrak{gl}(M)_{(K_1)}$.

§ 2. Универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли

1. Определение универсальной обертывающей алгебры

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K. Для любой ассоциативной алгебры L с единицей над K назовем α-отображением алгебры $\mathfrak{g}$ в L K-линейное отображение σ алгебры $\mathfrak{g}$ в L, такое, что

$$\sigma([x, y]) = \sigma(x)\sigma(y) - \sigma(y)\sigma(x) \qquad (x, y \text{ из } \mathfrak{g})$$

(другими словами, гомоморфизм $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли, ассоциированную с L).

Если L' — другая ассоциативная алгебра с единицей над K и τ — гомоморфизм L в L', переводящий 1 в 1, то $\tau \circ \sigma$ есть α-отображение алгебры $\mathfrak{g}$ в L'. Отыщем ассоциативную алгебру с единицей над K и α-отображение алгебры $\mathfrak{g}$ в эту алгебру, являющееся *универсальным* (*Теор. множ.*, гл. IV, § 3, n° 1).

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K, T — тензорная алгебра K-модуля $\mathfrak{g}$ и J — ее двусторонний идеал, порожденный тензорами вида $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$, где $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{g}$. Ассоциативная алгебра $U = T/J$ называется универсальной обертывающей алгеброй для $\mathfrak{g}$. Ограничение на $\mathfrak{g}$ канонического отображения алгебры T на U называется каноническим отображеним $\mathfrak{g}$ в U.*

Т.к. компонента степени 0 из J ... которым дана наша алгебра Ли g

Пусть T_+ — двусторонний идеал в T, образованный тензорами, компонента степени 0 которых равна нулю. Пусть $T_0 = K.1$ — множество элементов степени 0 алгебры T. Пусть, далее, U_+ и U_0 — канонические образы T_+ и T_0 в U. Так как $J \subset T_+$, то прямое разложение $T = T_0 \oplus T_+$ индуцирует прямое разложение $U = U_0 \oplus U_+$. Алгебра U обладает поэтому отличным от нуля единичным элементом и $U_0 = K.1$. Компонента элемента $x \in U$, лежащая в U_0, называется его *свободным членом*. Элементы со свободным членом, равным нулю, образуют двусторонний идеал в U, а именно двусторонний идеал U_+, порожденный каноническим образом алгебры $\mathfrak{g}$ в U.

Ассоциативная алгебра U порождена 1 и каноническим образом алгебры $\mathfrak{g}$ в U.

Если $x \in \mathfrak{g}$ и $y \in \mathfrak{g}$, то $x \otimes y - y \otimes x$ и $[x, y]$ сравнимы в T по модулю J; следовательно, если σ_0 обозначает каноническое отображение алгебры $\mathfrak{g}$ в U, то

$$\sigma_0(x)\,\sigma_0(y) - \sigma_0(y)\,\sigma_0(x) = \sigma_0([x, y])$$

в U. Другими словами, σ_0 есть α-отображение $\mathfrak{g}$ в U.

Предложение 1. *Пусть σ есть α-отображение алгебры $\mathfrak{g}$ в ассоциативную алгебру L с единицей. Существует, и притом только один, гомоморфизм $\tau\colon U \to L$, переводящий 1 в 1, такой, что $\sigma = \tau \circ \sigma_0$, где σ_0 обозначает каноническое отображение $\mathfrak{g}$ в U.*

В самом деле, пусть τ' — единственный гомоморфизм алгебры T в L, который продолжает σ и переводит 1 в 1. Тогда для x, y из $\mathfrak{g}$ имеем

$$\tau'(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) = \sigma(x)\,\sigma(y) - \sigma(y)\,\sigma(x) - \sigma([x, y]) = 0,$$

так что τ' обращается в нуль на J и определяет посредством факторизации гомоморфизм τ алгебры U в алгебру L, переводящий 1 в 1, такой, что $\sigma = \tau \circ \sigma_0$. Единственность τ немедленно вытекает из того, что $\sigma_0(\mathfrak{g})$ и 1 порождают алгебру U.

Пусть $\mathfrak{g}'$ — другая алгебра Ли над K, U' — ее универсальная обертывающая алгебра, а σ'_0 — каноническое отображение $\mathfrak{g}'$ в U'. Пусть φ — гомоморфизм $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}'$. В этом случае $\sigma'_0 \circ \varphi$ есть α-отображение алгебры $\mathfrak{g}$ в U'; поэтому существует, и притом один, гомоморфизм $\tilde{\varphi}$ алгебры U в U', переводящий 1 в 1 и такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\sigma_0"'] & \mathfrak{g}' \arrow[d, "\sigma'_0"] \\
U \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & U'
\end{tikzcd}$$

Т.к. $x \in U_0 \cap U_+ \Rightarrow \exists a \in T_0, \exists b \in T_+$:
$a + J = b + J \Rightarrow x \in b + J \subset T_+$, но $T_0 \cap T_+ =$

коммутативна. Этот гомоморфизм переводит элементы из U с нулевым свободным членом в элементы из U' с нулевым свободным членом. Если $\mathfrak{g}''$ — другая алгебра Ли над K, а φ' — гомоморфизм алгебры $\mathfrak{g}'$ в $\mathfrak{g}''$, то $(\varphi' \circ \varphi)^{\sim} = \tilde{\varphi}' \circ \tilde{\varphi}$.

2. *Универсальная обертывающая алгебра произведения алгебр Ли*

Пусть $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ — две алгебры Ли над K, U_i — универсальная обертывающая алгебра алгебры $\mathfrak{g}_i$ и σ_i — каноническое отображение $\mathfrak{g}_i$ в U_i $(i = 1, 2)$. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$, U — ее универсальная обертывающая алгебра, σ — каноническое отображение $\mathfrak{g}$ в U. Канонические вложения алгебр $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ в $\mathfrak{g}$ определяют канонические гомоморфизмы алгебр U_1 и U_2 в алгебру U, где их образы коммутируют, а следовательно, и гомоморфизм φ алгебры $U_1 \otimes_K U_2$ в U, переводящий 1 в 1.

Предложение 2. *Гомоморфизм φ является изоморфизмом.*

Отображение σ': $(x_1, x_2) \mapsto \sigma_1(x_1) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma_2(x_2)$ $(x_1 \in \mathfrak{g}_1, x_2 \in \mathfrak{g}_2)$ является α-отображением алгебры $\mathfrak{g}$ в $U_1 \otimes_K U_2$, так что существует (n° 1, предложение 1) единственный гомоморфизм τ алгебры U в $U_1 \otimes_K U_2$, переводящий 1 в 1, такой, что

$$\sigma' = \tau \circ \sigma. \tag{1}$$

Имеем $\varphi \circ \tau \circ \sigma = \varphi \circ \sigma' = \sigma$ и $\tau \circ \varphi \circ \sigma' = \tau \circ \sigma = \sigma'$, поэтому $\varphi \circ \tau$ и $\tau \circ \varphi$ — тождественные отображения алгебр U и $U_1 \otimes_K U_2$ соответственно. Отсюда следует доказываемое.

Принято отождествлять $U_1 \otimes_K U_2$ с U при помощи изоморфизма φ. Тогда, согласно (1), каноническое отображение $\mathfrak{g}$ в U отождествляется с отображением

$$(x_1, x_2) \mapsto \sigma_1(x_1) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma_2(x_2).$$

Аналогично, если $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$ — алгебры Ли над K, а $U_1, \ldots, U_n$ — их универсальные обертывающие алгебры, то универсальная обертывающая алгебра U для $\mathfrak{g}_1 \times \ldots \times \mathfrak{g}_n$ канонически отождествляется с $U_1 \otimes_K \ldots \otimes_K U_n$, а каноническое отображение алгебры $\mathfrak{g}_1 \times \ldots \times \mathfrak{g}_n$ в U — с отображением

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sigma_1(x_1) \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 + \ldots + 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes \sigma_n(x_n)$$

(если обозначить через σ_i каноническое отображение алгебры $\mathfrak{g}_i$ в U_i).

3. *Универсальная обертывающая алгебра подалгебры Ли*

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K, $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра и σ, σ' — канонические отображения алгебр $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ в их универсальные обертывающие алгебры U, V. Тогда каноническое вложение i

алгебры $\mathfrak{h}$ в алгебру $\mathfrak{g}$ определяет гомоморфизм $\tilde{i}\colon V \to U$, называемый *каноническим*, такой, что $\sigma \circ i = \tilde{i} \circ \sigma'$. Алгебра $\tilde{i}(V)$ порождена элементом 1 и $\sigma(\mathfrak{h})$. Будет проверено, что в этом важном случае $\tilde{i}$ инъективен (n° 7, следствие 5 теоремы 1).

Если $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, то левый идеал в U, порожденный $\sigma(\mathfrak{h})$, совпадает с правым идеалом, порожденным $\sigma(\mathfrak{h})$, иначе говоря, является двусторонним идеалом, который мы обозначим через R. В самом деле, если $x \in \mathfrak{h}$ и $x' \in \mathfrak{g}$, то

$$\sigma(x)\sigma(x') = \sigma(x')\sigma(x) + \sigma([x, x'])$$

и $[x, x'] \in \mathfrak{h}$.

Предложение 3. *Пусть $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, p — канонический гомоморфизм $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ и W — универсальная обертывающая алгебра для $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. Гомоморфизм*

$$\tilde{p}\colon U \to W,$$

канонически определенный с помощью p, сюръективен, и его ядро является идеалом R алгебры U, порожденным $\sigma(\mathfrak{h})$.

Пусть σ'' — каноническое отображение $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ в W. Из коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{h} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\sigma'"'] & \mathfrak{g} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \arrow[d, "\sigma''"] \\
V \arrow[r, "\tilde{i}"] & U \arrow[r, "\tilde{p}"] & W
\end{tikzcd}$$

видно, что ограничение гомоморфизма $\tilde{p}$ на $\sigma(\mathfrak{h})$, а следовательно, и на R является нулевым. Пусть ψ — канонический гомоморфизм U на U/R. Существует гомоморфизм φ алгебры U/R

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[rr, "p"] \arrow[d, "\sigma"'] & & \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \arrow[d, "\sigma''"] \arrow[dl, "\theta"'] \\
U \arrow[r, "\psi"] & U/R \arrow[r, shift left, "\varphi"] & W \arrow[l, shift left, "\varphi'"]
\end{tikzcd}$$

в W, такой, что $\tilde{p} = \varphi \circ \psi$. Отображение $\psi \circ \sigma$ алгебры $\mathfrak{g}$ в U/R является α-отображением и обращается в нуль на $\mathfrak{h}$, а значит, определяет α-отображение θ факторалгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ в факторалгебру U/R, такое, что $\theta \circ p = \psi \circ \sigma$. Поэтому $\varphi \circ \theta \circ p = \varphi \circ \psi \circ \sigma = \sigma'' \circ p$, откуда $\varphi \circ \theta = \sigma''$. Существует (n° 1, предложение 1) гомоморфизм φ', и притом только один, алгебры W в U/R, переводящий 1 в 1 и такой, что $\theta = \varphi' \circ \sigma''$. Поэтому $\varphi' \circ \varphi \circ \theta = \varphi' \circ \sigma'' = \theta$ и $\varphi \circ \varphi' \circ \sigma'' = \varphi \circ \theta = \sigma''$, откуда следует, что $\varphi' \circ \varphi$ и $\varphi \circ \varphi'$ — тождественные отображения алгебр U/R в W соответственно. Этим заканчивается доказательство.

Алгебру U/R отождествляют с алгеброй W при помощи гомоморфизма φ. В этом случае каноническое отображение σ'' факторалгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ в W отождествляется с θ, т. е. отображение $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ в U/R получается из σ посредством факторизации.

4. Универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли, противоположной к данной

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K, $\mathfrak{g}^0$ — противоположная к ней алгебра, σ и σ_0 — канонические отображения алгебр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^0$ в их универсальные обертывающие алгебры U и V. В этом случае σ является α-отображением алгебры Ли $\mathfrak{g}^0$ в ассоциативную алгебру U^0, противоположную к ассоциативной алгебре U. Следовательно, существует, и притом только один, гомоморфизм φ алгебры V в алгебру U^0, переводящий 1 в 1 и такой, что $\sigma = \varphi \circ \sigma_0$.

Предложение 4. *Гомоморфизм φ является изоморфизмом алгебры V на U^0.*

В самом деле, существует гомоморфизм φ' алгебры U в алгебру V^0, переводящий 1 в 1 и такой, что $\sigma_0 = \varphi' \circ \sigma$. Можно рассматривать φ' как гомоморфизм алгебры U^0 в V. Имеем $\sigma_0 = \varphi' \circ \varphi \circ \sigma_0$ и $\sigma = \varphi \circ \varphi' \circ \sigma$, откуда $\varphi' \circ \varphi$ и $\varphi \circ \varphi'$ суть тождественные отображения алгебр V и U. Предложение доказано.

Принято отождествлять V с U^0 при помощи изоморфизма φ. В этом случае σ_0 отождествляется с σ.

Тем самым установлено, что изоморфизм $\theta\colon x \longmapsto -x$ алгебры $\mathfrak{g}$ на алгебру $\mathfrak{g}^0$ определяет изоморфизм $\tilde{\theta}$ алгебры U на алгебру $V = U^0$. Этот изоморфизм можно рассматривать как антиавтоморфизм алгебры U. Он называется *главным антиавтоморфизмом* алгебры U. Если $x_1, \ldots, x_n$ — элементы из $\mathfrak{g}$, то

$$\tilde{\theta}(\sigma(x_1)\ldots\sigma(x_n)) = \tilde{\theta}(\sigma(x_n))\ldots\tilde{\theta}(\sigma(x_1)) = (-\sigma(x_n))\ldots(-\sigma(x_1)) = \\ = (-1)^n \sigma(x_n)\ldots\sigma(x_1). \qquad (2)$$

5. Симметрическая алгебра модуля

Пусть V есть K-модуль. Его можно, причем единственным образом, рассматривать как коммутативную алгебру Ли. Универсальная обертывающая алгебра для V может быть тогда получена следующим образом. Пусть T — тензорная алгебра модуля V, а I — двусторонний идеал в T, порожденный тензорами вида $x \otimes y - y \otimes x$ $(x \in V,\ y \in V)$. В качестве искомой алгебры нужно взять факторалгебру $S = T/I$.

т.к. $(I\cap T^2)\cap(I\cap T^3)=\varnothing$ т.к. $T^2\cap T^3=\varnothing$

Мы будем изучать в дальнейшем эту алгебру S, называя ее *симметрической алгеброй* модуля V. Кратко приведем ее свойства, которые понадобятся нам в этой главе и доказательство которых тривиально. Пусть T^n — множество однородных тензоров степени n в T. Имеем $I=(I\cap T^2)\oplus(I\cap T^3)\oplus\ldots$, так что S является прямой суммой канонических образов S^n этих подмножеств T^n. Элементы из S^n называются однородными элементами степени n. Имеем $S^0=K\cdot 1$, S^1 отождествляется с V и $S^nS^p\subset S^{n+p}$. Алгебра S порождается 1 и $S^1=V$. Ясно, что любые два элемента из S^1 перестановочны, поэтому S коммутативна. Если V — *свободный* K-модуль с базисом $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$, то канонический гомоморфизм f алгебры многочленов $K[X_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$ на S, который переводит 1 в 1 и X_λ в x_λ для всех $\lambda\in\Lambda$, является изоморфизмом. В самом деле, вследствие универсального свойства алгебры S (n° 1, предложение 1) существует гомоморфизм g алгебры S в $K[X_\lambda]_{\lambda\in\Lambda}$, переводящий 1 в 1 и x_λ в X_λ для всех $\lambda\in\Lambda$, так что f и g — два взаимно обратных гомоморфизма.

Пусть $S'^n\subset T^n$ — множество однородных симметрических элементов (тензоров) порядка n (*Алг.*, гл. III, § 5, n° 1, определение 2). Если K — поле характеристики 0, то S'^n и $I\cap T^n$ дополняют друг друга в T^n. В самом деле, пусть $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ — базис в V. Введем на Λ полный порядок (*Теор. множ.*, гл. III, § 2, n° 3, теорема 1). Пусть Λ_n — множество неубывающих строк из n элементов множества Λ. Для $M=(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\Lambda_n$ положим

$$y_M=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}x_{\lambda_{\sigma(1)}}\otimes\ldots\otimes x_{\lambda_{\sigma(n)}}.$$

Элементы y_M, где $M\in\Lambda_n$, составляют систему образующих векторного K-пространства S'^n. В то же время их канонические образы в S^n образуют, как это следует из сказанного выше, базис в S^n. Поэтому $(y_M)_{M\in\Lambda_n}$ является базисом дополнения к $I\cap T^n$ в T^n (*Алг.*, гл. II, § 1, n° 6, предложение 4), что и доказывает наше утверждение.

Итак, если K — поле характеристики 0, то ограничение на S'^n канонического отображения $T^n\to S^n$ является изоморфизмом пространства S'^n на пространство S^n и обладает поэтому обратным изоморфизмом. Полученные таким образом для любого n обратные изоморфизмы определяют канонический изоморфизм пространства S на пространство $S'=\sum_{n\geqslant 0}S'^n$ симметрических тензоров алгебры T.

т.к. $S^n\otimes S$

т.к. базис переходит в базис

6. Фильтрация универсальной обертывающей алгебры

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K, а T — тензорная алгебра K-модуля $\mathfrak{g}$. Пусть T^n — подмодуль модуля T, образованный однородными тензорами степени n, и $T_n = \sum\limits_{i \leqslant n} T^i$. Имеем $T_n \subset T_{n+1}$, $T_0 = K \cdot 1$, $T_{-1} = \{0\}$ и $T_n T_p \subset T_{n+p}$. Пусть U_n — канонический образ T_n в универсальной обертывающей алгебре U алгебры $\mathfrak{g}$. Тогда $U_n \subset U_{n+1}$, $U_0 = K \cdot 1$, $U_{-1} = \{0\}$ и $U_n U_p \subset U_{n+p}$; можно поэтому говорить, что U есть алгебра, *фильтрованная* подпространствами U_n (*Комм. алг.*, гл. III, § 2, n° 1); будем говорить, что элементы из U_n имеют *фильтрацию* $\leqslant n$.

Пусть G^n есть K-модуль U_n/U_{n-1} и G — прямая сумма K-модулей G^n. Умножение на U определяет посредством факторизации билинейное отображение $G^n \times G^m$ в G^{n+m} и, следовательно, билинейное отображение $G \times G$ в G, которое является ассоциативным. Таким образом, G оказывается наделенным структурой ассоциативной K-алгебры. Имеем $G^n G^m \subset G^{n+m}$. Говорят, что элементы из G^n имеют *степень* n. Полученная таким образом градуированная алгебра есть не что иное, как градуированная алгебра, ассоциированная с фильтрованной алгеброй U (*Комм. алг.*, гл. III, § 2, n° 3).

Пусть φ_n — произведение канонических K-линейных отображений

$$T^n \to U_n \to G^n.$$

Так как T^n дополняет T_{n-1} в T_n, то φ_n сюръективно. Отображения φ_n определяют K-линейное отображение φ модуля $\sum\limits_n T^n = T$ на $\sum\limits_n G^n = G$.

Предложение 5. *Отображение φ модуля T на G является гомоморфизмом алгебр, переводящим 1 в 1 и аннулирующимся на двустороннем идеале, порожденном тензорами $x \otimes y - y \otimes x$ ($x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{g}$).*

Если $t \in T^n$ и $t' \in T^p$, то $\varphi(t)\varphi(t') = \varphi(tt')$ по определению умножения в G. Поэтому φ является гомоморфизмом алгебр, и ясно, что $\varphi(1) = 1$. Если x, y — элементы из $\mathfrak{g}$, то $x \otimes y - y \otimes x \in T^2$ и канонический образ этого элемента в U_2 равен каноническому образу элемента $[x, y]$, а потому принадлежит U_1. Отсюда $\varphi(x \otimes y - y \otimes x) = 0$, что и доказывает предложение.

Пусть S — симметрическая алгебра K-модуля $\mathfrak{g}$ и τ — канонический гомоморфизм T на S. Предложение 5 доказывает, что существует, и притом один, *канонический* гомоморфизм ω алгебры S на алгебру G, переводящий 1 в 1 и такой, что $\varphi = \omega \circ \tau$. Имеем $\omega(S^n) = \varphi(T^n) = G^n$. Пусть τ_n — ограничение τ на T^n,

т.к S^n это U^n образ T^n при канонич отобр

ψ по ∂{x∘y = y∘x − [x, y]}>

ω_n — ограничение ω на S^n, ψ_n — каноническое отображение T^n в U_n и θ_n — каноническое отображение U_n на G^n. Определение гомоморфизма ω_n доказывает, что следующая диаграмма коммутативна:

U_n кан образ T_n

$$\begin{tikzcd} & U_n \arrow[dr, "\theta_n"] & \\ T^n \arrow[ur, "\psi_n"] \arrow[dr, "\tau_n"'] & & G^n \\ & S^n \arrow[ur, "\omega_n"'] & \end{tikzcd} \tag{3}$$

Предложение 6. *Если кольцо K нётерово и если $\mathfrak{g}$ — модуль конечного типа, то кольцо U является нётеровым слева и справа.*

В самом деле, S — алгебра конечного типа над K и поэтому является нётеровым кольцом (*Комм. алг.*, гл. III, § 2, n° 10, следствие 3 теоремы 2). Следовательно, кольцо G, изоморфное факторкольцу кольца S, является нётеровым. Поэтому U нётерово справа и слева (*Комм. алг.*, гл. III, § 2, n° 10, *замечание* 2).

Следствие. *Предположим, что K является полем и что алгебра $\mathfrak{g}$ конечномерна над K. Пусть $I_1, \ldots, I_m$ — правые* (соотв. *левые*) *идеалы, имеющие конечную коразмерность в U. Тогда произведение этих идеалов $I_1 I_2 \ldots I_m$ также является идеалом конечной коразмерности.*

Из индуктивных соображений (индукция по m) достаточно рассмотреть случай двух идеалов, например правых. Правый U-модуль I_1 порожден конечным числом элементов $u_1, \ldots, u_p$ (предложение 6). Пусть $v_1, \ldots, v_q$ — элементы из U, чьи классы по модулю I_2 порождают векторное пространство U/I_2. Тогда канонические образы элементов $u_i v_j$ в $I_1/I_1 I_2$ порождают это векторное пространство и, следовательно, оно является конечномерным. Поэтому

$$\dim_K (U/I_1 I_2) = \dim_K (U/I_1) + \dim_K (I_1/I_1 I_2) < +\infty.$$

Замечание. Пусть $\mathfrak{g}'$ — другая алгебра Ли над кольцом K, U' — ее универсальная обертывающая алгебра, U'_n — множество ее элементов с фильтрацией $\leqslant n$, U^n (соотв. U'^n) — множество канонических образов в U (соотв. U') однородных симметрических тензоров степени n алгебры $\mathfrak{g}$ (соотв. $\mathfrak{g}'$). Пусть η — гомоморфизм $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}'$ и $\tilde{\eta}$ — соответствующий гомоморфизм U в U'. Имеем

$$\tilde{\eta}(U_n) \subset U'_n, \qquad \tilde{\eta}(U^n) \subset U'^n.$$

В частности, главный антиавтоморфизм алгебры U оставляет на месте U_n и U^n. Далее, K-линейное отображение T^n на себя, переводящее $x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n$ в $x_n \otimes x_{n-1} \otimes \ldots \otimes x_1$ для любых $x_1, \ldots, x_n$ из $\mathfrak{g}$, является оператором симметрии и, следовательно, оставляет

на месте все симметрические тензоры степени n. Поэтому главный антиавтоморфизм алгебры U индуцирует в каждом U^n гомотетию с коэффициентом $(-1)^n$.

7. Теорема Пуанкаре — Биркгофа — Витта

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ есть K-алгебра Ли, U — ее универсальная обертывающая алгебра, G — градуированная алгебра, ассоциированная с фильтрованной алгеброй U, и S — симметрическая алгебра K-модуля $\mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{g}$ — свободный K-модуль, то каноническое отображение $\omega\colon S \to G$ является изоморфизмом.*

В самом деле, пусть $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — базис K-модуля $\mathfrak{g}$; введем на Λ отношение полного порядка (*Теор. множ.*, гл. III, § 2, n° 3, теорема 1). Пусть P — алгебра многочленов $K[z_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}$ от переменных z_λ, находящихся во взаимно однозначном соответствии с x_λ. Для каждой последовательности $M = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ элементов из Λ символом z_M будем обозначать одночлен $z_{\lambda_1} z_{\lambda_2} \ldots z_{\lambda_n}$, а символом x_M — элемент тензорной алгебры $x_{\lambda_1} \otimes x_{\lambda_2} \otimes \ldots \otimes x_{\lambda_n}$.

Элементы z_M с неубывающими M образуют базис K-модуля P (условимся, что $\varnothing$ — неубывающая последовательность и что $z_\varnothing = 1$). Пусть P_p — подмодуль многочленов степени $\leqslant p$. Докажем сначала несколько лемм. (Для краткости будем писать $\lambda \leqslant M$, если $\lambda \leqslant \mu$ для всех компонент μ последовательности M.)

Лемма 1. *Для любого целого $p \geqslant 0$ существует единственный гомоморфизм f_p K-модуля $\mathfrak{g} \otimes_K P_p$ в K-модуль P, удовлетворяющий следующим условиям:*

(A_p) $f_p(x_\lambda \otimes z_M) = z_\lambda z_M$ *для* $\lambda \leqslant M$, $z_M \in P_p$;

(B_p) $f_p(x_\lambda \otimes z_M) - z_\lambda z_M \in P_q$ *для* $z_M \in P_q$, $q \leqslant p$;

(C_p) $f_p(x_\lambda \otimes f_p(x_\mu \otimes z_N)) = f_p(x_\mu \otimes f_p(x_\lambda \otimes z_N)) + f_p([x_\lambda, x_\mu] \otimes z_N)$ *для* $z_N \in P_{p-1}$. (Третий член в (C_p) имеет смысл ввиду условия (B_p).)

Кроме того, ограничение гомоморфизма f_p на $\mathfrak{g} \otimes P_{p-1}$ совпадает с f_{p-1}.

Последнее утверждение вытекает из предыдущих, поскольку ограничение f_p на $\mathfrak{g} \otimes_K P_{p-1}$ удовлетворяет условиям (A_{p-1}), (B_{p-1}), (C_{p-1}). Мы будем доказывать существование и единственность f_p индукцией по p. Для $p = 0$ из (A_0) следует, что $f_0(x_\lambda \otimes 1) = z_\lambda$, а тогда условия ($B_0$) и ($C_0$) очевидным образом удовлетворяются. Предположим теперь доказанными существование и единственность f_{p-1}. Покажем, что f_{p-1} допускает, и притом единственное, продолжение f_p на $\mathfrak{g} \otimes_K P_p$, удовлетворяющее условиям (A_p), (B_p), (C_p).

Мы должны определить $f_p(x_\lambda \otimes z_M)$ для неубывающей последовательности M из p элементов.

Если $\lambda \leqslant M$, выбор определяется условием (A_p). В противном случае M единственным образом записывается в виде (μ, N), где $\mu < \lambda$, $\mu \leqslant N$. Тогда $z_M = z_\mu z_N = f_{p-1}(x_\mu \otimes z_N)$ согласно (A_{p-1}), так что левая часть (C_p) есть $f_p(x_\lambda \otimes z_M)$. Между тем правая часть (C_p) уже определена. В самом деле, (B_{p-1}) может быть записано в виде

$$f_p(x_\lambda \otimes z_N) = f_{p-1}(x_\lambda \otimes z_N) = z_\lambda z_N + w,$$

где $w \in P_{p-1}$. Поэтому правая часть (C_p) должна равняться

$$z_\mu z_\lambda z_N + f_{p-1}(x_\mu \otimes w) + f_{p-1}([x_\lambda, x_\mu] \otimes z_N).$$

Итак, f_p определен единственным образом и удовлетворяет, очевидно, условиям (A_p) и (B_p). Условие (C_p) выполняется, если $\mu < \lambda$ и $\mu \leqslant N$. Так как $[x_\mu, x_\lambda] = -[x_\lambda, x_\mu]$, то условие (C_p) также имеет место и для $\lambda < \mu$, $\lambda \leqslant N$. Так как (C_p) тривиально выполнено при $\lambda = \mu$, то (C_p) выполняется, если $\lambda \leqslant N$ или $\mu \leqslant N$. Если никакое из этих неравенств не выполняется, то $N = (\nu, Q)$, где $\nu \leqslant Q$, $\nu < \lambda$, $\nu < \mu$. Полагая впредь для краткости $f_p(x \otimes z) = xz$ для $x \in \mathfrak{g}$ и $z \in P_p$, имеем по предположению индукции

$$x_\mu z_N = x_\mu(x_\nu z_Q) = x_\nu(x_\mu z_Q) + [x_\mu, x_\nu] z_Q.$$

Однако $x_\mu z_Q$ имеет вид $z_\mu z_Q + w$, где $w \in P_{p-2}$. Условие (C_p) применимо к $x_\lambda(x_\nu(z_\mu z_Q))$, поскольку $\nu \leqslant Q$ и $\nu < \mu$, к $x_\lambda(x_\nu w)$ по предположению индукции и, стало быть, оно применимо и к $x_\lambda(x_\nu(x_\mu z_Q))$. Отсюда

$$x_\lambda(x_\mu z_N) = x_\nu(x_\lambda(x_\mu z_Q)) + [x_\lambda, x_\nu](x_\mu z_Q) + [x_\mu, x_\nu](x_\lambda z_Q) + \\ + [x_\lambda, [x_\mu, x_\nu]] z_Q.$$

Меняя местами λ и μ и вычитая почленно, получим

$$\begin{aligned} x_\lambda(x_\mu z_N) - x_\mu(x_\lambda z_N) &= x_\nu(x_\lambda(x_\mu z_Q) - x_\mu(x_\lambda z_Q)) + \\ &\quad + [x_\lambda, [x_\mu, x_\nu]] z_Q - [x_\mu, [x_\lambda, x_\nu]] z_Q = \\ &= x_\nu([x_\lambda, x_\mu] z_Q) + [x_\lambda, [x_\mu, x_\nu]] z_Q + [x_\mu, [x_\nu, x_\lambda]] z_Q = \\ &= [x_\lambda, x_\mu](x_\nu z_Q) + ([x_\nu, [x_\lambda, x_\mu]] + [x_\lambda, [x_\mu, x_\nu]] + [x_\mu, [x_\nu, x_\lambda]]) z_Q \end{aligned}$$

и в силу тождества Якоби

$$x_\lambda(x_\mu z_N) - x_\mu(x_\lambda z_N) = [x_\lambda, x_\mu] z_N,$$

что и завершает доказательство леммы 1.

Лемма 2. *Существует α-отображение σ алгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathcal{L}_K(P)$, такое, что*

1° $\sigma(x_\lambda) z_M = z_\lambda z_M$ *для* $\lambda \leqslant M$;

2° $\sigma(x_\lambda) z_M \equiv z_\lambda z_M \pmod{P_p}$, *если* M *состоит из* p *элементов*.

В самом деле, по лемме 1 существует гомоморфизм f K-модуля $\mathfrak{g} \otimes_K P$ в P, удовлетворяющий для любого p условиям (A_p), (B_p), (C_p) (где f_p заменяется на f). Он определяет гомоморфизм σ K-модуля $\mathfrak{g}$ в K-модуль $\mathcal{L}_K(P)$, причем последний является α-отображением в силу условия (C_p). Наконец, σ удовлетворяет 1° и 2° леммы в силу (A_p) и (B_p).

Лемма 3. *Пусть t — тензор из $T_n \cap J$. Однородная компонента t_n степени n этого элемента лежит в ядре I канонического гомоморфизма $T \to S$.*

В самом деле, запишем t_n в виде $\sum_{i=1}^{r} x_{M_i}$, где M_i — последовательности из n элементов множества Λ. Отображение σ продолжается до гомоморфизма алгебры T в алгебру $\mathcal{L}_K(P)$ (который мы также обозначим через σ), нулевого на J. По лемме 2 $\sigma(t).1$ является многочленом, в котором членами наивысшей степени будут $\sum_{i=1}^{r} z_{M_i}$. Так как $t \in J$, то $\sigma(t) = 0$, откуда $\sum_{i=1}^{r} z_{M_i} = 0$ в P. В то же время благодаря выбору базиса (x_λ) в $\mathfrak{g}$ P канонически отождествляется с S. Поэтому канонический образ компоненты t_n в S равен нулю, т. е. $t_n \in I$.

Теперь мы можем доказать теорему 1. Нужно показать, что канонический гомоморфизм S на G инъективен. Иначе говоря, если $t \in T^n$ и если ψ — канонический гомоморфизм T на U, то нужно показать, что условие $\psi(t) \in U_{n-1}$ влечет за собой $t \in I$. Однако $\psi(t) \in U_{n-1}$ означает, что существует элемент $t' \in T_{n-1}$, такой, что $t - t' \in J$. Но t является однородной компонентой степени n тензора $t - t'$, поэтому по лемме 3 $t \in I$.

Следствие 1. *Предположим, что $\mathfrak{g}$ — свободный K-модуль. Пусть W есть K-подмодуль в T^n. Если в обозначениях диаграммы* (3) *ограничение τ_n на W есть изоморфизм W на S^n, то ограничение ψ_n на W есть изоморфизм W на дополнение к U_{n-1} в U_n.*

В самом деле, ограничение на W отображения $\omega_n \circ \tau_n$ является биекцией W на G^n; то же самое поэтому можно сказать про ограничение $\theta_n \circ \psi_n$ на W. Отсюда и выводится следствие.

Следствие 2. *Если $\mathfrak{g}$ — свободный K-модуль, то каноническое отображение алгебры $\mathfrak{g}$ в ее универсальную обертывающую алгебру инъективно.*

Это вытекает из следствия 1, если положить $W = T^1$.

Когда $\mathfrak{g}$ является свободным K-модулем (в частности, когда K — поле), $\mathfrak{g}$ отождествляют с подмодулем в U при помощи канонического отображения $\mathfrak{g}$ в U. Это будет подразумеваться в дальнейшем, начиная с ближайшего следствия.

Следствие 3. *Если $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — совершенно упорядоченный базис алгебры $\mathfrak{g}$, то элементы $x_{\lambda_1} x_{\lambda_2} \ldots x_{\lambda_n}$ ее универсальной обертывающей алгебры U, построенные при всевозможных конечных неубывающих последовательностях $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ элементов из Λ, образуют базис K-модуля U.*

Пусть Λ_n — множество неубывающих последовательностей из n элементов множества Λ. Для $M = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Lambda_n$ пусть $y_M = x_{\lambda_1} \otimes x_{\lambda_2} \otimes \ldots \otimes x_{\lambda_n}$. Предположим, что W — подмодуль в T^n, базисом которого является $(y_M)_{M \in \Lambda_n}$. Следствие 1 показывает, что ограничение ψ_n на W есть изоморфизм W на дополнение к U_{n-1} в U_n. Между тем $\psi_n(y_M) = x_{\lambda_1} x_{\lambda_2} \ldots x_{\lambda_n}$, что и влечет за собой требуемое утверждение.

Следствие 4. *Пусть $S'^n \subset T^n$ — множество симметрических однородных тензоров степени n. Предположим, что K — поле характеристики 0. Тогда произведение канонических отображений*

$$S^n \to S'^n \to U_n$$

является изоморфизмом векторного пространства S^n на дополнение к U_{n-1} в U_n.

Это вытекает из следствия 1, если положить $W = S'^n$.

В дальнейшем будем предполагать, что K — поле характеристики 0. Пусть η_n — только что определенное отображение S^n в U_n. Пусть $U^n = \eta_n(S^n)$. Векторное пространство U является прямой суммой подпространств U^n. Изоморфизмы η_n определяют изоморфизм η векторного пространства $S = \sum_n S^n$ на векторное пространство $U = \sum_n U^n$, называемый *каноническим изоморфизмом S на U*; он *не* является изоморфизмом алгебр. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} & U^n \arrow[dr, "\theta_n"] & \\ S'^n \arrow[ur, "\psi_n"] \arrow[dr, "\tau_n"'] & & G^n \\ & S^n \arrow[uu, "\eta_n"] \arrow[ur, "\omega_n"'] & \end{tikzcd} \qquad (4)$$

где каждая стрелка обозначает изоморфизм векторных пространств. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — элементы из $\mathfrak{g}$, то η_n переводит

произведение $x_1x_2 \ldots x_n$, вычисленное в S, в элемент $\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\ldots x_{\sigma(n)}$, вычисленный в U.

Следствие 5. *Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и U' — ее универсальная обертывающая алгебра. Предположим, что K-модули $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ свободны (например, что K — поле). Пусть $(x_\alpha)_{\alpha\in L}$ — базис в $\mathfrak{h}$ и $(y_\beta)_{\beta\in M}$ — семейство элементов из $\mathfrak{g}$, канонические образы которых в $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ образуют базис модуля $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.*

а) *Канонический гомоморфизм U' в U инъективен.*

б) *Если M совершенно упорядочено, то элементы $y_{\beta_1}\ldots y_{\beta_q}$, где $\beta_1\leqslant\ldots\leqslant\beta_q$, образуют базис в U, рассматриваемом как левый (или правый) модуль над U'.*

Наделим $L\cup M$ структурой совершенного порядка так, чтобы любой элемент из L был больше любого элемента из M. Элементы $x_{\alpha_1}x_{\alpha_2}\ldots x_{\alpha_p}$, вычисленные в U' (где $\alpha_1\leqslant\ldots\leqslant\alpha_p$), образуют базис в U' (следствие 3). Элементы $x_{\alpha_1}\ldots x_{\alpha_p}y_{\beta_1}\ldots y_{\beta_q}$, вычисленные в U (где $\alpha_1\leqslant\ldots\leqslant\alpha_p\leqslant\beta_1\leqslant\ldots\leqslant\beta_q$), точно так же образуют базис в U. Следовательно, канонический гомоморфизм U' в U переводит элементы базиса U' в линейно независимые элементы из U и поэтому инъективен. Видно, кроме того, что $y_{\beta_1}\ldots y_{\beta_q}$ (где $\beta_1\leqslant\ldots\leqslant\beta_q$) образуют базис в U, рассматриваемом как левый U'-модуль. Упорядочивая $L\cup M$ так, чтобы любой элемент из L был больше любого элемента из M, можно точно так же убедиться в том, что $y_{\beta_1}\ldots y_{\beta_q}$ (где $\beta_1\leqslant\ldots\leqslant\beta_q$) образуют базис в U, рассматриваемом как правый U'-модуль.

Находясь в условиях следствия 5 и используя канонический гомоморфизм U' в U, можно отождествить U' с подалгеброй в U, порожденной $\mathfrak{h}$.

Следствие 6. *Предположим, что K-модуль $\mathfrak{g}$ является прямой суммой подалгебр $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_n$ и что каждое слагаемое $\mathfrak{g}_i$ — свободный K-модуль. Пусть U_i — универсальная обертывающая алгебра для $\mathfrak{g}_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$. Пусть φ есть K-линейное отображение K-модуля $U_1\otimes_K\ldots\otimes_K U_n$ в U, индуцированное полилинейным отображением $(u_1, \ldots, u_n)\to u_1\ldots u_n$ декартова произведения $U_1\times\ldots\times U_n$ в U. Тогда φ — изоморфизм K-модулей.*

Пусть $(x^i_\lambda)_{\lambda\in L_i}$ — базис в $\mathfrak{g}_i$. Совершенно упорядочим $L_1\cup\ldots\cup L_n$ так, чтобы любой элемент из L_i был больше любого элемента из L_j при $i\geqslant j$. Тогда элементы

$$\left(x^1_{\lambda_1}x^1_{\lambda_2}\ldots x^1_{\lambda_p}\right)\otimes\ldots\otimes\left(x^n_{\nu_1}x^n_{\nu_2}\ldots x^n_{\nu_q}\right),$$

где $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_p \leqslant \ldots \leqslant \nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \ldots \leqslant \nu_q$, образуют базис в $U_1 \otimes_K \ldots \otimes_K U_n$. Они переводятся отображением φ в элементы

$$x^1_{\lambda_1} x^1_{\lambda_2} \ldots x^1_{\lambda_p} \ldots x^n_{\nu_1} x^n_{\nu_2} \ldots x^n_{\nu_q},$$

образующие базис в U. Это и доказывает следствие.

Следствие 7. *Если K — целостное кольцо и $\mathfrak{g}$ — свободный K-модуль, то алгебра U не имеет делителей нуля.*

В самом деле, G изоморфна алгебре многочленов над K (теорема 1) и, следовательно, не имеет делителей нуля (*Алг.*, гл. IV, § 1, n° 4, теорема 1). Отсюда и вытекает следствие (*Комм. алг.*, гл. III, § 2, n° 3, предложение 1).

8. *Продолжение дифференцирований*

Лемма 4. Пусть V есть K-модуль, T — тензорная алгебра модуля V. Пусть u — эндоморфизм модуля V. Существует, причем только одно, дифференцирование алгебры T, продолжающее u. Это дифференцирование коммутирует со всеми операторами симметрии на T.

Пусть $F = V \times V \times \ldots \times V$ (n сомножителей). Отображение

$$(x_1, \ldots, x_n) \mapsto ux_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes x_n + x_1 \otimes ux_2 \otimes \ldots \otimes x_n + \ldots$$
$$\ldots + x_1 \otimes x_2 \otimes \ldots \otimes ux_n$$

множества F в $\bigotimes^n V$ полилинейно. Поэтому существует эндоморфизм u_n модуля $\bigotimes^n V$, такой, что

$$u_n(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = ux_1 \otimes \ldots \otimes x_n + \ldots + x_1 \otimes \ldots \otimes ux_n$$

для любых $x_1, \ldots, x_n$ из V. Имеем $u_1 = u$. Пусть v — эндоморфизм K-модуля T, совпадающий с u_n на каждом $T^n = \bigotimes^n V$ и обращающийся в нуль на $T^0 = K \cdot 1$. Покажем, что v — дифференцирование алгебры T. Если $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_p$ — элементы из V, то

$$v((x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) \otimes (y_1 \otimes \ldots \otimes y_p)) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_1 \otimes \ldots \otimes x_{i-1} \otimes ux_i \otimes x_{i+1} \otimes \ldots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_p +$$
$$+ \sum_{j=1}^{p} x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \otimes y_1 \otimes \ldots \otimes y_{j-1} \otimes uy_j \otimes y_{j+1} \otimes \ldots \otimes y_p =$$
$$= v(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) \otimes (y_1 \otimes \ldots \otimes y_p) +$$
$$+ (x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) \otimes v(y_1 \otimes \ldots \otimes y_p).$$

По линейности отсюда легко вывести, что v — дифференцирование. Его единственность очевидна. Ясно, наконец, что u_n перестановочно со всеми операторами симметрии в $\bigotimes^n V$, откуда вытекает и последнее утверждение.

Предложение 7. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *алгебра Ли,* U — *ее универсальная обертывающая алгебра,* σ — *каноническое отображение* $\mathfrak{g}$ *в* U *и* D — *дифференцирование алгебры* $\mathfrak{g}$.

а) *Существует, и притом только одно, дифференцирование* D_U *алгебры* U, *такое, что* $\sigma \circ D = D_U \circ \sigma$ *(говорят, что* D_U *продолжает* D, *если отождествить* $\mathfrak{g}$ *с подмодулем* U *при помощи* σ).

б) D_U *оставляет на месте* U_n *и множество* U^n *образов в* U *симметрических тензоров степени* n *из* T.

в) D_U *коммутирует с главным антиавтоморфизмом алгебры* U.

г) *Если* D — *внутреннее дифференцирование* $\mathfrak{g}$, *определенное элементом* x *из* $\mathfrak{g}$, *то* D_U — *внутреннее дифференцирование алгебры* U, *определенное элементом* $\sigma(x)$.

В самом деле, пусть D_T — дифференцирование тензорной алгебры T модуля $\mathfrak{g}$, продолжающее D (лемма 4). Двусторонний идеал J алгебры T, порожденный элементами $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ (x, y из $\mathfrak{g}$), устойчив относительно D_T. Действительно,

$$D_T(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) = Dx \otimes y - y \otimes Dx - [Dx, y] + \\ + x \otimes Dy - Dy \otimes x - [x, Dy].$$

Посредством факторизации D_T индуцирует дифференцирование D_U алгебры U, такое, что $\sigma \circ D = D_U \circ \sigma$. Единственность D_U очевидна, поскольку 1 и $\sigma(\mathfrak{g})$ порождают алгебру U. Утверждение б) очевидно. Для доказательства в) рассмотрим главный антиавтоморфизм алгебры U. Если $x_1, \ldots, x_n$ — элементы из $\mathfrak{g}$, то

$$\begin{aligned} D_U A(\sigma(x_1) \ldots \sigma(x_n)) &= D_U((-1)^n \sigma(x_n) \ldots \sigma(x_1)) = \\ &= (-1)^n \sum_{i=1}^{n} \sigma(x_n) \ldots D_U(\sigma(x_i)) \ldots \sigma(x_1) = \\ &= (-1)^n \sum_{i=1}^{n} \sigma(x_n) \ldots \sigma(Dx_i) \ldots \sigma(x_1) = \\ &= A\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma(x_1) \ldots \sigma(Dx_i) \ldots \sigma(x_n)\right) = \\ &= AD_U(\sigma(x_1) \ldots \sigma(x_n)). \end{aligned}$$

Наконец, пусть $x \in \mathfrak{g}$. Пусть Δ — внутреннее дифференцирование $y \mapsto \sigma(x) y - y\sigma(x)$ алгебры U (*Алг.*, гл. IV, § 4, n° 3, пример 2). Если $x' \in \mathfrak{g}$, то $(\Delta \circ \sigma)(x') = \sigma(x)\sigma(x') - \sigma(x')\sigma(x) = \sigma([x, x']) = (\sigma \circ \operatorname{ad} x)(x')$, откуда $\Delta \circ \sigma = \sigma \circ \operatorname{ad} x$. Это и завершает доказательство.

Применяя предложение 7 к случаю коммутативной алгебры Ли, можно убедиться в том, что любой эндоморфизм u K-модуля продолжается единственным образом до дифференцирования симметрической алгебры этого модуля; это дифференцирование индуцируется посредством факторизации дифференцированием тензорной алгебры, продолжающим u.

Пусть снова $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K, и пусть D — ее дифференцирование. Будем использовать обозначения T, S, U, G, введенные выше. Пусть D_T, D_S — дифференцирования T, S, продолжающие D, и пусть D_U — единственное дифференцирование U, такое, что $\sigma \circ D = D_U \circ \sigma$. Так как U_n устойчиво относительно D_U, то оно индуцирует посредством факторизации дифференцирование D_G алгебры G. Так как D_U и D_S индуцируются дифференцированием D_T посредством факторизации, то коммутативная диаграмма (3) показывает, что D_G может быть также индуцировано D_S при гомоморфизме ω, определенном в n° 6. Если, кроме того, K — поле характеристики 0, то изоморфизмы диаграммы (4) переводят друг в друга ограничения дифференцирований D_T, D_S, D_U, D_G на S'^n, S^n, U^n, G^n. Поэтому *канонический изоморфизм S на U переводит D_S в D_U*.

9. Расширение основного кольца

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K, T — ее тензорная алгебра, J — двусторонний идеал в T, порожденный элементами $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ (x, y из $\mathfrak{g}$) и $U = T/J$. Пусть K_1 — коммутативное кольцо с единицей и σ — гомоморфизм K в K_1, переводящий 1 в 1. Тогда тензорная алгебра $\mathfrak{g}_{(K_1)}$ канонически отождествляется с $T_{(K_1)}$. Пусть J' — двусторонний идеал в $T_{(K_1)}$, порожденный элементами $x' \otimes y' - y' \otimes x' - [x', y']$ (x', y' из $\mathfrak{g}_{(K_1)}$). Ясно, что канонический образ $J_{(K_1)}$ в $T_{(K_1)}$ содержится в J'. Чтобы увидеть, что он *равен* J', достаточно показать, что если x' и y' — элементы из $\mathfrak{g}_{(K_1)}$, то $x' \otimes y' - y' \otimes x' - [x', y']$ принадлежит этому образу. Имеем $x' = \sum\limits_i x_i \otimes \lambda_i$, $y' = \sum\limits_j y_j \otimes \mu_j$ (x_i, y_j из $\mathfrak{g}$, λ_i, μ_j из K_1), откуда $x' \otimes y' - y' \otimes x' - [x', y'] = \sum\limits_{i,j} (x_i \otimes y_j - y_j \otimes x_i - [x_i, y_j]) \otimes \lambda_i \mu_j$, что и доказывает наше утверждение. Установив это, мы можем отождествить канонически $U_{(K_1)} = (T/J)_{(K_1)}$ с $T_{(K_1)}/J'$: *универсальная обертывающая алгебра для $\mathfrak{g}_{(K_1)}$ канонически отождествляется с $U_{(K_1)}$*, а каноническое отображение $\mathfrak{g}_{(K_1)}$ в ее универсальную обертывающую алгебру отождествляется с $\sigma \otimes 1$ (если через σ обозначить каноническое отображение $\mathfrak{g}$ в U).

§ 3. Представления

1. Представления

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K и M является K-модулем. Гомоморфизм $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли $\mathfrak{gl}(M)$ называется представлением $\mathfrak{g}$ в модуле M. Инъективное представление называется точным. Если K — поле, то размерность (конечная или бесконечная) модуля M над K называется размерностью представления. Представление $x \longmapsto \operatorname{ad} x$ алгебры $\mathfrak{g}$ в K-модуле $\mathfrak{g}$ называется ее присоединенным представлением.*

Представление $\mathfrak{g}$ в M является, таким образом, K-линейным отображением ρ алгебры $\mathfrak{g}$ в модуль эндоморфизмов модуля M, таким, что для любых $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{g}$, $m \in M$

$$\rho([x, y]) . m = \rho(x)\rho(y) . m - \rho(y)\rho(x) . m.$$

* *Пример.* Пусть G — вещественная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, θ — аналитическое представление G в вещественном векторном пространстве E конечной размерности. Тогда соответствующий гомоморфизм $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{gl}(E)$ является представлением алгебры $\mathfrak{g}$ в E. *

Пусть U — универсальная обертывающая алгебра для $\mathfrak{g}$. Предложение 1 § 2, n° 1, задает взаимно однозначное соответствие между множеством представлений $\mathfrak{g}$ в M и множеством представлений U в M. С другой стороны, известно (*Алг.*, гл. VIII, § 13, n° 1), что понятие представления ассоциативной алгебры U эквивалентно понятию левого U-модуля.

Определение 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K, U — ее универсальная обертывающая алгебра. Левый унитарный модуль над U называется левым $\mathfrak{g}$-модулем, или просто $\mathfrak{g}$-модулем.*

Если M есть $\mathfrak{g}$-модуль и если $x \in U$, то через x_M будем обозначать гомотетию модуля M, определенную при помощи x (см. *Алг.*, гл. VIII, § 1, n° 2).

Правый унитарный модуль над U называется правым $\mathfrak{g}$-модулем. Такой модуль отождествляется с левым U^0-модулем, т. е. (§ 2, n° 4) с левым $\mathfrak{g}^0$-модулем.

Пусть φ — главный антиавтоморфизм алгебры U. Если M — правый $\mathfrak{g}$-модуль, то он наделяется структурой левого $\mathfrak{g}$-модуля, причем $a . m = m . \varphi(a)$ для $m \in M$ и $a \in U$.

Можно перевести на язык представлений понятия и результаты теории модулей:

1) Два представления ρ и ρ' алгебры $\mathfrak{g}$ в M и M' называются *подобными* или *изоморфными*, если $\mathfrak{g}$-модули M и M' изоморфны.

Для этого необходимо и достаточно, чтобы существовал изоморфизм u K-модуля M на K-модуль M', такой, что

$$\rho'(x) = u \circ \rho(x) \circ u^{-1}$$

при $x \in \mathfrak{g}$.

2) Пусть для каждого $i \in I$ ρ_i — представление $\mathfrak{g}$ в M_i. Пусть M есть $\mathfrak{g}$-модуль, являющийся прямой суммой $\mathfrak{g}$-модулей M_i. Ему соответствует представление ρ алгебры $\mathfrak{g}$ в M, называемое *прямой суммой* ρ_i и обозначаемое через $\sum_{i \in I} \rho_i$ (или $\rho_1 \oplus \ldots \oplus \rho_n$ в случае n представлений $\rho_1, \ldots, \rho_n$). Если $m = (m_i)_{i \in I}$ — элемент из M и $x \in \mathfrak{g}$, то $\rho(x) . m = (\rho_i(x) . m_i)_{i \in I}$.

3) Представление ρ алгебры $\mathfrak{g}$ в M называется *простым* или *неприводимым*, если $\mathfrak{g}$-модуль, соответствующий ему, прост. Это равносильно тому, что не существует K-подмодуля модуля M (отличного от нуля и M), устойчивого относительно всех $\rho(x)$, $x \in \mathfrak{g}$. Класс простых $\mathfrak{g}$-модулей (*Алг.*, гл. III, § 3, n° 2) определяет *класс неприводимых представлений алгебры* $\mathfrak{g}$.

4) Представление ρ алгебры $\mathfrak{g}$ в M называется *полупростым*, или *вполне приводимым*, если соответствующий $\mathfrak{g}$-модуль полупрост. Это равносильно тому, что ρ подобно прямой сумме простых представлений или что любой K-подмодуль модуля M, устойчивый относительно всех $\rho(x)$ $(x \in \mathfrak{g})$, обладает дополнением, устойчивым относительно тех же эндоморфизмов (*Алг.*, гл. VIII, § 3, n° 3).

5) Пусть δ — класс неприводимых представлений алгебры $\mathfrak{g}$, соответствующий классу C простых $\mathfrak{g}$-модулей. Пусть, с другой стороны, ρ — некоторое представление $\mathfrak{g}$ в M. Изотипная компонента M_C типа C $\mathfrak{g}$-модуля M (*Алг.*, гл. VIII, § 3, n° 4) называется также *изотипной компонентой типа* δ *модуля* M. Эта компонента есть сумма K-подмодулей модуля M, устойчивых относительно эндоморфизмов $\rho(x)$ и таких, что эти $\rho(x)$ индуцируют представление класса δ; она является прямой суммой некоторых из этих подмодулей; если M_C имеет длину n, то говорят, что *кратность* δ *в* ρ равна n. Сумма различных M_C является прямой; она равна M в том и только в том случае, когда ρ полупросто.

6) Пусть ρ, ρ' — два представления алгебры $\mathfrak{g}$. Говорят, что ρ' — *подпредставление* (соотв. *факторпредставление*) представления ρ, если модуль представления ρ' является подмодулем (соотв. *фактормодулем*) модуля представления ρ.

Пусть M является K-модулем. Нулевое представление $\mathfrak{g}$ в M определяет на M структуру $\mathfrak{g}$-модуля. Наделенный этой структурой, M называется *тривиальным* $\mathfrak{g}$-модулем.

Пусть M есть $\mathfrak{g}$-модуль. Фактормодули $\mathfrak{g}$-подмодулей в M являются также $\mathfrak{g}$-подмодулями фактормодулей модуля M: они

получаются, если рассмотреть два $\mathfrak{g}$-подмодуля U, U' модуля M с включением $U \supset U'$ и образовать $\mathfrak{g}$-модуль U/U'. Если теперь все неприводимые модули, получаемые описанным способом, изоморфны данному простому модулю N, то говорят, что M — *чистый* $\mathfrak{g}$-модуль *типа* N. Если ρ и σ — представления $\mathfrak{g}$, соответствующие M и N, то говорят также, что ρ — чистое представление *типа* σ.

Пусть M' есть $\mathfrak{g}$-подмодуль модуля M. Для того чтобы M был чистым модулем типа N, необходимо и достаточно, чтобы M' и M/M' были чистыми модулями типа N. В самом деле, это условие, очевидно, необходимо. Пусть теперь условия выполнены и U, U' суть $\mathfrak{g}$-подмодули в M, такие, что $U' \subset U$ и U/U' — простой модуль. Пусть φ — канонический гомоморфизм M на M/M'; если $\varphi(U) \neq \varphi(U')$, то U/U' изоморфен $\varphi(U)/\varphi(U')$, а следовательно, и N. Если $\varphi(U) = \varphi(U')$, то $U \subset U' + M'$, откуда U/U' изоморфен простому подмодулю модуля $(U' + M')/U'$, а этот последний сам изоморфен $M'/(U' \cap M')$. Поэтому U/U' также изоморфен N, так что M — чистый модуль типа N.

Пусть M обозначает в дальнейшем $\mathfrak{g}$-модуль, и предположим, что множество $\mathfrak{g}$-подмодулей в M, чистых типа N, обладает максимальным элементом M'. Тогда каждый чистый типа N подмодуль M'' модуля M содержится в M'. В самом деле, $M''/(M' \cap M'')$ и M' являются чистыми типа N, поэтому $M' + M''$ чист типа N по только что доказанному, откуда $M' + M'' \subset M'$.

Предположим, что $\mathfrak{g}$-модуль M обладает рядом Жордана — Гёльдера $(M_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$. Для того чтобы M был чистым типа N, необходимо и достаточно, чтобы M_0/M_1, M_1/M_2, ..., M_{n-1}/M_n были изоморфны N. Действительно, это условие, очевидно, необходимо; достаточность немедленно получается индукцией по n из доказанного выше.

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K и $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Пусть M есть $\mathfrak{g}$-модуль и N — простой $\mathfrak{a}$-модуль. Рассмотрим M как $\mathfrak{a}$-модуль и предположим, что множество его чистых $\mathfrak{a}$-подмодулей типа N обладает максимальным элементом M'. Тогда M' является $\mathfrak{g}$-подмодулем в M.*

Пусть $y \in \mathfrak{g}$. Предположим, что φ — каноническое отображение M на M/M' и f — отображение $m \mapsto \varphi(y_M \cdot m)$ модуля M' в M/M'. Достаточно показать, что $f(M') = \{0\}$. Пусть $x \in \mathfrak{a}$. Для $m \in M$ имеем

$$x_{M/M'} \cdot f(m) = \varphi(x_M y_M \cdot m) = \varphi(y_M x_M \cdot m) + \varphi([x, y]_M \cdot m).$$

Однако $[x, y] \in \mathfrak{a}$, откуда $\varphi([x, y]_M \cdot m) = 0$. Кроме того, $\varphi(y_M x_M \cdot m) = f(x_M \cdot m)$. Поэтому $x_{M/M'} \cdot f(m) = f(x_M \cdot m)$. Отсюда

следует, что $f(M')$ есть $\mathfrak{a}$-подмодуль в M/M', изоморфный фактормодулю модуля M', и поэтому он чистый типа N. Отсюда $f(M') = \{0\}$.

Следствие. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K и $\mathfrak{a}$ — ее идеал. Пусть M — простой $\mathfrak{g}$-модуль, имеющий конечную длину как K-модуль. Тогда существует простой $\mathfrak{a}$-модуль N, такой, что M — чистый $\mathfrak{a}$-модуль типа N.*

Так как $\mathfrak{a}$-модуль M имеет конечную длину, существует минимальный элемент в множестве $\mathfrak{a}$-подмодулей из M; он и является простым $\mathfrak{a}$-подмодулем модуля M. Наибольший чистый типа N $\mathfrak{a}$-подмодуль модуля M, таким образом, отличен от нуля и является $\mathfrak{g}$-подмодулем в M (предложение 1), т. е. равен M.

2. Тензорное произведение представлений

В n° 1 мы определили прямую сумму семейства представлений алгебры $\mathfrak{g}$. Сейчас мы определим другие операции над представлениями.

Пусть $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ — две алгебры Ли над K и M_i — произвольный $\mathfrak{g}_i$-модуль ($i = 1, 2$). Пусть U_i — универсальная обертывающая алгебра для $\mathfrak{g}_i$ и σ_i — каноническое отображение $\mathfrak{g}_i$ в U_i. В этом случае M_i — левый U_i-модуль и, значит, $M_1 \otimes_K M_2$ канонически наделено структурой левого $U_1 \otimes_K U_2$-модуля. В то же время $U_1 \otimes_K U_2$ — универсальная обертывающая алгебра для $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ и отображение $(x_1, x_2) \mapsto \sigma_1(x_1) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma_2(x_2)$ есть каноническое отображение $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ в ее универсальную обертывающую алгебру (§ 2, n° 2). Поэтому на $M = M_1 \otimes_K M_2$ существует структура $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$-модуля, такая, что

$$(x_1, x_2)_M \cdot (m_1 \otimes m_2) = (\sigma_1(x_1) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma_2(x_2)) \cdot (m_1 \otimes m_2) = \\ = ((x_1)_{M_1} \cdot m_1) \otimes m_2 + m_1 \otimes ((x_2)_{M_2} \cdot m_2). \quad (1)$$

Эта структура определяет представление $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ в M.

Если теперь $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}$, то гомоморфизм $x \mapsto (x, x)$ алгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ в композиции с предыдущим представлением определяет представление $\mathfrak{g}$ в M и, следовательно, структуру $\mathfrak{g}$-модуля на M, такую, что

$$x_M \cdot (m_1 \otimes m_2) = (x_{M_1} \cdot m_1) \otimes m_2 + m_1 \otimes (x_{M_2} \cdot m_2). \quad (2)$$

Рассуждая аналогичным образом, можно доказать

Предложение 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K и M_i — произвольный $\mathfrak{g}$-модуль ($1 \leqslant i \leqslant n$). В тензорном произведении $M_1 \otimes_K M_2 \otimes_K \ldots \otimes_K M_n$ существует, и притом только одна,*

структура $\mathfrak{g}$*-модуля, такая, что*

$$x_M(m_1 \otimes \ldots \otimes m_n) = \sum_{i=1}^{n} m_1 \otimes \ldots \otimes (x_{M_i}.m_i) \otimes \ldots \otimes m_n, \quad (3)$$

где $x \in \mathfrak{g}$, $m_1 \in M_1, \ldots, m_n \in M_n$.

Соответствующее представление называется *тензорным произведением* заданных представлений $\mathfrak{g}$ в M_i.

В частности, если M есть $\mathfrak{g}$-модуль, то предложение 2 определяет структуру $\mathfrak{g}$-модуля на каждом $M_p = \bigotimes^p M$ и, значит, в тензорной алгебре T модуля M.

Формула (3) показывает, что x_T при любом $x \in \mathfrak{g}$ есть единственное *дифференцирование* алгебры T, продолжающее x_M. Известно (§ 2, n° 8), что x_T индуцирует посредством факторизации дифференцирование симметрической алгебры S модуля M. Поэтому S можно рассматривать как $\mathfrak{g}$-фактормодуль модуля T, а x_S — дифференцирование модуля S.

Переходя к еще более частному случаю, рассмотрим $\mathfrak{g}$ как $\mathfrak{g}$-модуль при помощи присоединенного представления $\mathfrak{g}$. Пусть U — универсальная обертывающая алгебра для $\mathfrak{g}$. По предложению 7 § 2 x_M индуцирует посредством факторизации дифференцирование алгебры U, которое есть не что иное, как внутреннее дифференцирование, определенное $\sigma(x)$ (σ обозначает каноническое отображение $\mathfrak{g}$ в U). Поэтому U можно рассматривать как $\mathfrak{g}$-фактормодуль модуля T. Если K — поле характеристики 0, то канонический изоморфизм S на U является изоморфизмом $\mathfrak{g}$-модулей (§ 2, n° 8).

3. Представления в модулях гомоморфизмов

Пусть теперь $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ — две алгебры Ли над K и M_i — произвольный $\mathfrak{g}_i$-модуль ($i = 1, 2$). Пусть U_i — универсальная обертывающая алгебра для $\mathfrak{g}_i$ и σ_i — каноническое отображение $\mathfrak{g}_i$ в U_i. Тогда M_i есть левый U_i-модуль, вследствие чего $\mathscr{L}_K(M_1, M_2)$ канонически наделяется структурой левого $U_1^0 \otimes U_2$-модуля. В то же время $U_1^0 \otimes_K U_2$ — универсальная обертывающая алгебра для $\mathfrak{g}_1^0 \otimes \mathfrak{g}_2$, а отображение

$$(x_1, x_2) \mapsto \sigma_1(x_1) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma_2(x_2)$$

есть каноническое отображение $\mathfrak{g}_1^0 \times \mathfrak{g}_2$ в эту универсальную обертывающую алгебру. Поэтому на $M = \mathscr{L}_K(M_1, M_2)$ существует структура $\mathfrak{g}_1^0 \times \mathfrak{g}_2$-модуля, такая, что

$$\begin{aligned}((x_1, x_2)_M . u)\, m_1 &= ((\sigma_1(x_1) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma_2(x_2)) . u) . m_1 = \\ &= u\left((x_1)_{M_1} . m_1\right) + (x_2)_{M_2} . u(m_1), \end{aligned} \quad (4)$$

где $u \in \mathscr{L}_K(M_1, M_2)$, $m_1 \in M_1$. Эта структура определяет представление $\mathfrak{g}_1^0 \times \mathfrak{g}_2$ в M.

Пусть теперь $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}$; тогда гомоморфизм $x \mapsto (-x, x)$ алгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}^0 \times \mathfrak{g}$ в композиции с предыдущим представлением задает представление $\mathfrak{g}$ в M и, следовательно, структуру $\mathfrak{g}$-модуля на M, такую, что

$$(x_M \cdot u) \cdot m_1 = x_{M_2} \cdot u(m_1) - u(x_{M_1} \cdot m_1) \tag{5}$$

или

$$x_M \cdot u = x_{M_2} u - u x_{M_1}. \tag{6}$$

Если скомбинировать этот результат с предложением 2, то очевидно следующее

Предложение 3. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K и M_i — произвольный $\mathfrak{g}$-модуль $(1 \leqslant i \leqslant n+1)$. Пусть N есть K-модуль $\mathscr{L}_K(M_1, \ldots, M_n; M_{n+1})$ полилинейных отображений $\prod_{i=1}^{n} M_i$ в M_{n+1}. Существует единственная структура $\mathfrak{g}$-модуля на N, такая, что*

$$(x_n \cdot u)(m_1, \ldots, m_n) = -\sum_{i=1}^{n} u(m_1, \ldots, x_{M_i} \cdot m_i, \ldots, m_n) + \\ + x_{M_{n+1}} \cdot u(m_1, \ldots, m_n), \tag{7}$$

где $x \in \mathfrak{g}$, $u \in N$ и $m_i \in M_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$.

В частности, пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K, а M — произвольный $\mathfrak{g}$-модуль. Рассмотрим, с другой стороны, K как тривиальный $\mathfrak{g}$-модуль. Предложение 3 определяет на $\mathscr{L}_K(M, K) = M^*$ структуру $\mathfrak{g}$-модуля. Соответствующее представление называется *дуальным* к представлению $x \mapsto x_M$. Имеем

$$(x_{M^*} \cdot f)(m) = -f(x_M \cdot m), \tag{8}$$

где $x \in \mathfrak{g}$, $f \in M^*$, $m \in M$. Иначе говоря,

$$x_{M^*} = -{}^t x_M. \tag{9}$$

В случае когда K — поле и M конечномерен, $\mathfrak{g}$-модуль M прост (соотв. полупрост) тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$-модуль M^* прост (соотв. полупрост).

Предложение 4. *Пусть M_1, M_2 — два $\mathfrak{g}$-модуля. Канонические K-линейные отображения* (*Alg.*, chap. VIII, 3[e] éd., application II, n°n° 3 и 8)

$$M_1^* \otimes_K M_2 \xrightarrow{\varphi} \mathscr{L}_K(M_1, M_2), \quad \mathscr{L}_K(M_1, M_2^*) \xrightarrow{\psi} (M_1 \otimes_K M_2)^*$$

(где в первом случае M_2 отождествляется с $\mathscr{L}_K(K, M_2)$, а второе отображение биективно) являются гомоморфизмами $\mathfrak{g}$-модулей.

Положим

$$N = M_1^* \otimes M_2, \quad P = \mathscr{L}(M_1, M_2), \quad Q = \mathscr{L}(M_1, M_2^*), \quad R = (M_1 \otimes M_2)^*.$$

Имеем для $x \in \mathfrak{g}$, $f \in M_1^*$, $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$

$$((\varphi x_N)(f \otimes m_2)) \cdot m_1 = (\varphi(x_{M_1^*} f \otimes m_2 + f \otimes x_{M_2} m_2)) \cdot m_1 =$$
$$= \langle x_{M_1^*} f, m_1 \rangle m_2 + \langle f, m_1 \rangle x_{M_2} m_2,$$
$$((x_P \varphi)(f \otimes m_2)) \cdot m_1 = x_{M_2}(\varphi(f \otimes m_2) \cdot m_1) - \varphi(f \otimes m_2)(x_{M_1} m_1) =$$
$$= \langle f, m_1 \rangle x_{M_2} m_2 - \langle f, x_{M_1} m_1 \rangle m_2,$$

откуда $\varphi x_N = x_P \varphi$. С другой стороны, для $x \in \mathfrak{g}$, $u \in \mathscr{L}(M_1, M_2^*)$, $m_1 \in M_1$, $m_2 \in M_2$ имеем

$$(\psi x_Q u)(m_1 \otimes m_2) = \langle (x_Q u) \cdot m_1, m_2 \rangle = \langle x_{M_2^*} u m_1 - u x_{M_1} m_1, m_2 \rangle,$$
$$(x_R \psi u)(m_1 \otimes m_2) = -\langle \psi u, x_{M_1} m_1 \otimes m_2 + m_1 \otimes x_{M_2} m_2 \rangle =$$
$$= -\langle u x_{M_1} m_1, m_2 \rangle - \langle u m_1, x_{M_2} m_2 \rangle,$$

откуда $\psi x_Q = x_R \psi$, что и требовалось доказать.

Отождествим $\mathfrak{g}$-модули $\mathscr{L}(M_1, M_2^*)$ и $(M_1 \otimes M_2)^*$ при помощи изоморфизма ψ. Если M_1 и M_2 конечномерны, то φ — изоморфизм (*Алг.*, гл. III, § 1, n° 4, предложение 9), который позволяет отождествить $\mathfrak{g}$-модули $M_1^* \otimes M_2$ и $\mathscr{L}(M_1, M_2)$. Стало быть, в этом случае можно отождествить и $\mathfrak{g}$-модули $M_1^* \otimes M_2^*$, $\mathscr{L}(M_1, M_2^*)$ и $(M_1 \otimes M_2)^*$.

4. *Примеры*

Пример 1. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K, а M — произвольный $\mathfrak{g}$-модуль. Структура $\mathfrak{g}$-модуля на M и структура тривиального $\mathfrak{g}$-модуля на K определяют структуру $\mathfrak{g}$-модуля на K-модуле $N = \mathscr{L}(M, M; K)$ билинейных форм на M. Имеем

$$(x_N \cdot \beta)(m, m') = -\beta(x_M \cdot m, m') - \beta(m, x_M \cdot m'), \tag{10}$$

где $x \in \mathfrak{g}$, m, m' из M, $\beta \in N$. Если β — данный элемент из N, то множество $x \in \mathfrak{g}$, для которых $x_N \cdot \beta = 0$, является подалгеброй в $\mathfrak{g}$.

Пусть M есть K-модуль, а β — билинейная форма на M. Согласно предыдущему, множество $x \in \mathfrak{gl}(M)$, таких, что

$$\beta(x \cdot m, m') + \beta(m, x \cdot m') = 0$$

для всех $m \in M$ и $m' \in M$, есть подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{gl}(M)$. Предположим, что K — поле, M конечномерно над K и что

форма β невырожденна. Тогда всякий $x \in \mathfrak{gl}(M)$ обладает всюду определенным сопряженным слева x^* (по отношению к β), и рассматриваемая подалгебра является множеством $x \in \mathfrak{gl}(M)$, таких, что $x^* = -x$. Таким способом можно построить два важных примера алгебр Ли:

а) Возьмем $M = K^n$ и

$$\beta((\xi_1, \ldots, \xi_n), (\eta_1, \ldots, \eta_n)) = \xi_1\eta_1 + \ldots + \xi_n\eta_n.$$

Отождествим канонически $\mathfrak{gl}(K^n)$ с $\mathbf{M}_n(K)$. Тогда получаемая алгебра Ли есть алгебра Ли кососимметрических матриц. * (Если $K = \mathbf{R}$, то эта алгебра является алгеброй Ли ортогональной группы $\mathbf{O}(n, \mathbf{R})$.) *

б) Возьмем $M = K^{2m}$ и

$$\beta((\xi_1, \ldots, \xi_{2m}), (\eta_1, \ldots, \eta_{2m})) =$$
$$= \xi_1\eta_{m+1} - \eta_1\xi_{m+1} + \ldots + \xi_m\eta_{2m} - \eta_m\xi_{2m}.$$

Матрицей формы β в каноническом базисе пространства K^{2m} будет $\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_m \\ -\mathrm{I}_m & 0 \end{pmatrix}$. Пусть $\mathrm{U} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$ — матрица элемента u из $\mathfrak{gl}(M)$ в каноническом базисе K^{2m} (A, B, C, D взяты из $\mathbf{M}_m(K)$). По формуле (50) из *Алг.*, гл. IX, § 1, n° 10, матрицей u^* в том же базисе является

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{I}_m \\ \mathrm{I}_m & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {}^t\mathrm{A} & {}^t\mathrm{C} \\ {}^t\mathrm{B} & {}^t\mathrm{D} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_m \\ \mathrm{I}_m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t\mathrm{D} & -{}^t\mathrm{B} \\ -{}^t\mathrm{C} & {}^t\mathrm{A} \end{pmatrix}.$$

Условие $u^* = -u$ эквивалентно условиям

$$\mathrm{D} = -{}^t\mathrm{A}, \quad \mathrm{B} = {}^t\mathrm{B}, \quad \mathrm{C} = {}^t\mathrm{C}.$$

* Если $K = \mathbf{R}$, то получаемая алгебра является алгеброй Ли симплектической группы $\mathbf{Sp}(2m, \mathbf{R})$. *

Пример 2. Сохраним обозначения примера 1. Структура $\mathfrak{g}$-модуля в M определяет в K-модуле $P = \mathscr{L}_K(M, M)$ эндоморфизмов модуля M структуру $\mathfrak{g}$-модуля. Согласно формуле (6), для $x \in \mathfrak{g}$ и $u \in P$ имеем

$$x_P . u = [x_M, u] = (\operatorname{ad} x_M) . u, \tag{11}$$

причем $\operatorname{ad} x_M$ обозначает образ x_M в присоединенном представлении алгебры $\mathfrak{gl}(M)$. Иначе говоря,

$$x_P = \operatorname{ad} x_M \tag{12}$$

в $\mathscr{L}(\mathscr{L}(M, M)) = \mathscr{L}(\mathfrak{gl}(M))$.

5. Инвариантные элементы

Определение 3. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, а M — произвольный $\mathfrak{g}$-модуль. Элемент $m \in M$ называется инвариантным (в структуре $\mathfrak{g}$-модуля на M или в соответствующем представлении алгебры $\mathfrak{g}$), если $x_M \cdot m = 0$ для любого $x \in \mathfrak{g}$.*

* Пусть G — вещественная связная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, θ — аналитическое представление G в конечномерном вещественном пространстве E и ρ — соответствующее представление $\mathfrak{g}$ в E. Пусть $m \in E$. Элемент m является инвариантным относительно ρ тогда и только тогда, когда $\theta(g).m = m$ для любых $g \in G$. Это оправдывает применение слова „инвариантный". *

Пример 1. Пусть M, N — два $\mathfrak{g}$-модуля и $P = \mathscr{L}_K(M, N)$. Для того чтобы элемент f модуля P был инвариантным, необходимо и достаточно, согласно (6), чтобы f был гомоморфизмом $\mathfrak{g}$-модуля M в $\mathfrak{g}$-модуль N. В частности, если $M = N$ и $x_M = x_N$ для любого $x \in \mathfrak{g}$, то f инвариантен тогда и только тогда, когда он перестановочен со всеми x_M.

Пример 2. Пусть M есть K-модуль конечного типа. Если M наделен структурой $\mathfrak{g}$-модуля, то $\mathscr{L}(M, M)$ и $M^* \otimes M$ также наделены структурами $\mathfrak{g}$-модулей и каноническое отображение $M^* \otimes M$ в $\mathscr{L}(M, M)$ является изоморфизмом $\mathfrak{g}$-модулей (предложение 4). Так как $1 \in \mathscr{L}(M, M)$, очевидно, инвариантна (см. пример 1), то соответствующий ей элемент u из $M^* \otimes M$ инвариантен. Если $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — базис в M и $(e_i^*)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — дуальный ему базис, то $u = \sum_{i=1}^{n} e_i^* \otimes e_i$.

Пример 3. Пусть M — произвольный $\mathfrak{g}$-модуль. Пусть β — билинейная форма на M и f — соответствующий элемент из $\mathscr{L}(M, M^*)$. Для инвариантности β необходимо и достаточно, чтобы отображение f было гомоморфизмом $\mathfrak{g}$-модулей (предложение 4 и пример 1). Предположим, что K — поле и что M конечномерно над K. Инвариантная и *невырожденная* билинейная форма β на M определяет *изоморфизм* $\mathfrak{g}$-модуля M на $\mathfrak{g}$-модуль M^*, а следовательно, и изоморфизм $\mathfrak{g}$-модуля $M \otimes M$ на $\mathfrak{g}$-модуль $M^* \otimes M$. Таким образом, учитывая пример 2, мы видим, что задание β определяет канонически инвариантный элемент c $\mathfrak{g}$-модуля $M \otimes M$, который может быть построен следующим образом. Пусть $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — базис в M и $(e_i')_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — другой базис в M, для которого $\beta(e_i, e_j') = \delta_{ij}$; тогда $c = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e_i'$.

Предложение 5. *Пусть $\mathfrak{g}$ есть K — алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — ее идеал, ρ — представление $\mathfrak{g}$ в M и ρ' — ограничение ρ на $\mathfrak{h}$. Тогда мно-*

жество N элементов из M, инвариантных относительно ρ', устойчиво относительно $\rho(\mathfrak{g})$.

В самом деле, пусть $n \in N$ и $y \in \mathfrak{g}$; для любого $x \in \mathfrak{h}$ имеем $[x, y] \in \mathfrak{h}$, откуда $\rho(x)\rho(y)n = \rho([x, y])n + \rho(y)\rho(x)n = 0$; поэтому $\rho(y)n \in N$.

Предложение 6. *Пусть M — полупростой $\mathfrak{g}$-модуль. Тогда подмодуль M_0 инвариантных элементов в M обладает единственным дополнением, устойчивым относительно всех x_M, а именно подмодулем M_1, порожденным элементами $x_M . m$ ($x \in \mathfrak{g}$, $m \in M$).*

Действительно, пусть M' — подмодуль M, устойчивый относительно x_M и дополнительный к M_0 в M. Для любого $m \in M$ имеем $m = m_0 + m'$, где $m_0 \in M_0$, $m' \in M'$, поэтому $x_M m = x_M m' \in M'$. Отсюда $M_1 \subset M'$. Пусть M_2 — подмодуль в M', устойчивый относительно всех x_M и дополнительный к M_1 в M'. Для любого $m \in M_2$ и любого $x \in \mathfrak{g}$ выполняется $x_M m \in M_2 \cap M_1 = \{0\}$, откуда $m \in M_0$ и $m = 0$. Поэтому $M_2 = \{0\}$, что и доказывает равенство $M_1 = M'$.

6. Билинейные инвариантные формы

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K. Присоединенное представление $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}$ и нулевое представление $\mathfrak{g}$ в K определяют структуру $\mathfrak{g}$-модуля на K-модуле $N = \mathscr{L}(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}; K)$ билинейных форм на $\mathfrak{g}$. Будем кратко говорить, что билинейная форма β на $\mathfrak{g}$ *инвариантна*, если она инвариантна в представлении $x \mapsto x_N$. По формуле (10) необходимым и достаточным условием для этого является равенство

$$\beta([x, y], z) = \beta(x, [y, z]) \tag{13}$$

для любых x, y, z из $\mathfrak{g}$.

Пусть теперь $\mathfrak{d}$ — алгебра Ли дифференцирований алгебры $\mathfrak{g}$. Тождественное представление $\mathfrak{d}$ и ее нулевое представление в K определяют представление $D \mapsto D_N$ алгебры $\mathfrak{d}$ в N. Кратко говорят, что билинейная форма на $\mathfrak{g}$ *вполне инвариантна*, если она инвариантна в представлении $D \mapsto D_N$. Вполне инвариантная билинейная форма является инвариантной. Для того чтобы билинейная форма β на $\mathfrak{g}$ была вполне инвариантной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\beta(Dx, y) + \beta(x, Dy) = 0 \tag{14}$$

для любых x, y из $\mathfrak{g}$ и $D \in \mathfrak{d}$.

Предложение 7. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, β — билинейная симметрическая инвариантная форма на $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$.*

а) *Ортогональное дополнение* $\mathfrak{a}'$ *к* $\mathfrak{a}$ *относительно* β *является идеалом в* $\mathfrak{g}$.

б) *Если* $\mathfrak{a}$ *характеристичен и если* β *вполне инвариантна, то идеал* $\mathfrak{a}'$ *характеристичен.*

в) *Если* β *невырожденна, то пересечение* $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}'$ *коммутативно.*

Пусть D — дифференцирование алгебры $\mathfrak{g}$. Предположим, что $\mathfrak{a}$ устойчиво относительно D и $\beta(Dx, y)+\beta(x, Dy)=0$ для любых x, y из $\mathfrak{g}$. Тогда из $z\in\mathfrak{a}'$ следует $Dz\in\mathfrak{a}'$, ибо для всех $t\in\mathfrak{a}$ выполняется $Dt\in\mathfrak{a}$ и $\beta(Dz, t)-\beta(z, Dt)=0$. Итак, $\mathfrak{a}'$ устойчиво относительно D. Это доказывает а) и б).

Пусть теперь $\mathfrak{b}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, и предположим, что ограничение β на $\mathfrak{b}$ является нулевым. Для x, y из $\mathfrak{b}$ и $z\in\mathfrak{g}$ имеем $\beta([x, y], z)=\beta(x, [y, z])=0$, так как $[y, z]\in\mathfrak{b}$. Значит, идеал $[\mathfrak{b}, \mathfrak{b}]$ ортогонален к $\mathfrak{g}$ и если β невырожденна, то $\mathfrak{b}$ коммутативен. Этот результат, примененный к $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{a}'$, доказывает в).

Определение 4. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *есть K-алгебра Ли, а M — некоторый* $\mathfrak{g}$*-модуль. Предположим, что M является K-модулем конечного типа. Билинейной формой, ассоциированной с* $\mathfrak{g}$*-модулем M (или с соответствующим представлением), называется билинейная симметрическая форма* $(x, y)\mapsto \mathrm{Tr}(x_M y_M)$ *на* $\mathfrak{g}$. *Если рассматриваемое представление является присоединенным, то ассоциированная билинейная форма называется формой Киллинга алгебры* $\mathfrak{g}$.

Предложение 8. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *— алгебра Ли, M — некоторый* $\mathfrak{g}$*-модуль. Предположим, что M является K-модулем конечного типа. Тогда ассоциированная с M билинейная форма будет инвариантной.*

В самом деле, для x, y, z из $\mathfrak{g}$ имеем

$$\mathrm{Tr}([x, y]_M z_M)=\mathrm{Tr}(x_M y_M z_M)-\mathrm{Tr}(y_M x_M z_M)=$$
$$=\mathrm{Tr}(x_M y_M z_M)-\mathrm{Tr}(x_M z_M y_M)=\mathrm{Tr}(x_M [y, z]_M).$$

Предложение 9. *Предположим, что K — поле и что алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *конечномерна над K. Пусть* $\mathfrak{a}$ *— идеал в* $\mathfrak{g}$, β *— форма Киллинга алгебры* $\mathfrak{g}$, β' *— форма Киллинга алгебры* $\mathfrak{a}$. *Тогда* β' *— ограничение* β *на* $\mathfrak{a}$.

В самом деле, пусть u — эндоморфизм векторного пространства $\mathfrak{g}$, оставляющий устойчивым $\mathfrak{a}$. Пусть v — ограничение u на $\mathfrak{a}$, а w — эндоморфизм векторного пространства $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, индуцированный эндоморфизмом u посредством факторизации. Имеем $\mathrm{Tr}\,u=\mathrm{Tr}\,v+\mathrm{Tr}\,w$, в чем можно убедиться, выбирая базис $(x_1, \ldots, x_n)$ пространства $\mathfrak{g}$, первые p членов которого составляют базис в $\mathfrak{a}$. Убедившись в этом, возьмем $x\in\mathfrak{a}$, $y\in\mathfrak{a}$ и применим предыдущую формулу к случаю $u=(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,x)(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,y)$. Получим $v=(\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\,x)(\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}\,y)$ и $w=0$. Отсюда $\beta(x, y)=\beta'(x, y)$.

Предложение 10. *Предположим, что K — поле и что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ конечномерна над K. Тогда форма Киллинга β на $\mathfrak{g}$ вполне инвариантна.*

Пусть D — дифференцирование алгебры $\mathfrak{g}$. Существуют алгебра Ли $\mathfrak{g}'$, содержащая $\mathfrak{g}$ в качестве идеала коразмерности 1, и элемент x_0 алгебры $\mathfrak{g}'$, такой, что $Dx = [x_0, x]$ для всех $x \in \mathfrak{g}$ (§ 1, n° 8, пример 1). Пусть β' — форма Киллинга на $\mathfrak{g}'$. Для x, y из $\mathfrak{g}$ имеем $\beta'([x, x_0], y) = \beta'(x, [x_0, y])$, т. е. $\beta'(Dx, y) + \beta'(x, Dy) = 0$. Однако ограничение β' на $\mathfrak{g}$ равно β (предложение 9), что и требовалось доказать.

7. Элемент Казимира

Предложение 11. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над полем K, U — ее универсальная обертывающая алгебра, $\mathfrak{h}$ — конечномерный идеал в $\mathfrak{g}$ и β — билинейная инвариантная форма на $\mathfrak{g}$, ограничение которой на $\mathfrak{h}$ невырожденно. Пусть $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $(e'_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ — два базиса в $\mathfrak{h}$, такие, что $\beta(e_i, e'_j) = \delta_{ij}$. Тогда элемент $c = \sum_{i=1}^{n} e_i e'_i$ алгебры U принадлежит ее центру и не зависит от выбора базиса (e_i).*

Для $x \in \mathfrak{g}$ через $x_\mathfrak{h}$ обозначим ограничение на $\mathfrak{h}$ эндоморфизма $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, x$. Тогда $x \mapsto x_\mathfrak{h}$ — представление $\mathfrak{g}$ в пространстве $\mathfrak{h}$ и ограничение β' формы β на $\mathfrak{h}$ инвариантно в этом представлении. Согласно n° 5, пример 3, тензор $\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e'_i$ не зависит от выбора базиса (e_i) и является инвариантным элементом тензорной алгебры алгебры $\mathfrak{h}$. Он является также элементом тензорной алгебры T алгебры $\mathfrak{g}$, инвариантным относительно представления, индуцированного присоединенным представлением алгебры $\mathfrak{g}$. Его канонический образ в U, т. е. c, не зависит, таким образом, от выбора базиса (e_i) и инвариантен относительно представления алгебры $\mathfrak{g}$ в U, рассмотренного в конце n° 2. Этот элемент, стало быть, перестановочен с любым элементом из $\mathfrak{g}$, а значит, и с любым элементом из U.

В случае когда β — билинейная форма, ассоциированная с $\mathfrak{g}$-модулем M, говорят, что элемент c из предложения 11 есть *элемент Казимира*, ассоциированный с M (или с соответствующим представлением). Этот элемент существует, если ограничение β на $\mathfrak{h}$ невырожденно.

Предложение 12. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над полем K, $\mathfrak{h}$ — произвольный n-мерный идеал в $\mathfrak{g}$ и M — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль конечной размерности над K. Пусть c — элемент Казимира, ассоциированный с M и $\mathfrak{h}$ (если он существует).*

а) $\operatorname{Tr}(c_M) = n$.

б) *Если M — простой модуль и n не делится на характеристику поля K, то c_M — автоморфизм M.*

Пользуясь обозначениями предложения 11, получим, что $\operatorname{Tr}(c_M) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Tr}((e_i)_M (e'_i)_M) = \sum_{i=1}^{n} \beta(e_i, e'_i) = n$. Поэтому, если n не делится на характеристику K, то $c_M \neq 0$. С другой стороны, так как c принадлежит центру U, эндоморфизм c_M перестановочен со всеми x_M, $x \in \mathfrak{g}$. Если, кроме того, M прост, то c_M обратим в $\mathscr{L}(M)$ (*Алг.*, гл. VIII, § 4, n°3, предложение 2).

8. Расширение кольца скаляров

Пусть K_1 — коммутативное кольцо с 1, φ — гомоморфизм K в K_1, переводящий 1 в 1. Пусть $\mathfrak{g}$ есть K-алгебра Ли, U — ее универсальная обертывающая алгебра и M — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль, т. е. левый U-модуль. Тогда $M_{(K_1)}$ канонически наделяется структурой левого $U_{(K_1)}$-модуля, а значит, и структурой левого $\mathfrak{g}_{(K_1)}$-модуля. Пусть ρ и $\rho_{(K_1)}$ — представления $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}_{(K_1)}$, соответствующие M и $M_{(K_1)}$. Говорят, что $\rho_{(K_1)}$ получается из ρ *расширением кольца скаляров*, причем можно применить результаты из *Алг.*, гл. VIII, § 13, n°4. Если $x \in \mathfrak{g}$, то $\rho_{(K_1)}(x)$ есть не что иное, как эндоморфизм $\rho(x) \otimes 1$ модуля $M_{(K_1)} = M \otimes_K K_1$.

Предположим, что K — поле, K_1 — расширение K и φ — каноническое вложение K в K_1. Пусть V и V' — подпространства векторного пространства M. Пусть $\mathfrak{a}'$ — подпространство векторного пространства $\mathfrak{g}_{(K_1)}$, образованное теми $x' \in \mathfrak{g}_{(K_1)}$, для которых $\rho_{(K_1)}(x')\left(V_{(K_1)}\right) \subset V'_{(K_1)}$, и $\mathfrak{a}$ — подпространство в $\mathfrak{g}$, образованное теми $x \in \mathfrak{g}$, для которых $\rho(x)(V) \subset V'$. Тогда $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}_{(K_1)}$. Ясно, во-первых, что $\mathfrak{a}_{(K_1)} \subset \mathfrak{a}'$. Пусть теперь $x' \in \mathfrak{a}'$. Можно записать $x' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, где $x_i \in \mathfrak{g}$ и λ_i — элементы из K_1, линейно независимые над K. Для любого $u \in V$ имеем $\rho(x') . u \in V'_{(K_1)}$, т. е. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \rho(x_i) . u \in V'_{(K_1)}$, откуда $\rho(x_i) . u \in V'$, а значит, $x_i \in \mathfrak{a}$ и $x' \in \mathfrak{a}_{(K_1)}$. Это и доказывает, что $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}_{(K_1)}$. В частности, *центр* $\mathfrak{g}_{(K_1)}$ получается из центра $\mathfrak{g}$ при расширении K до K_1: достаточно применить предыдущее к присоединенному представлению алгебры $\mathfrak{g}$. Отсюда следует, что $\mathscr{C}_p\left(\mathfrak{g}_{(K_1)}\right) = \left(\mathscr{C}_p \mathfrak{g}\right)_{(K_1)}$ для всех p. Аналогично пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{n}$ — *нормализатор* $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$. Тогда нормализатор $\mathfrak{h}_{(K_1)}$ в $\mathfrak{g}_{(K_1)}$ равен $\mathfrak{n}_{(K_1)}$.

Пусть K, K_1, $\mathfrak{g}$, ρ, M те же, что и в предыдущем абзаце. Пусть $\mathfrak{b}$ — векторное подпространство в $\mathfrak{g}$, а W — подпростран-

ство в M. Пусть V — подпространство в M, состоящее из $m \in M$, для которых $\rho(\mathfrak{b}).m \subset W$ и V' — подпространство в $M_{(K_1)}$, состоящее из $m' \in M_{(K_1)}$, таких, что $\rho_{(K_1)}(\mathfrak{b}_{(K_1)}).m' \subset W_{(K_1)}$. Как и выше, $V' = V_{(K_1)}$. В частности, векторное подпространство *инвариантов* в $M_{(K_1)}$ получается из векторного подпространства инвариантов в M расширением поля скаляров K до K_1.

Пусть K, K_1 и φ — те же самые, что и в начале этого пункта. Пусть $\mathfrak{g}$ есть K-алгебра Ли, а M и N — два $\mathfrak{g}$-модуля. Если M и N — изоморфные $\mathfrak{g}$-модули, то $M_{(K_1)}$ и $N_{(K_1)}$ — также изоморфные $\mathfrak{g}_{(K_1)}$-модули. Обратно,

Предложение 13. *Пусть K — поле, K_1 — расширение K, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K, M и N — два $\mathfrak{g}$-модуля, конечномерных над K. Если $M_{(K_1)}$ и $N_{(K_1)}$ — изоморфные $\mathfrak{g}_{(K_1)}$-модули, то M и N — изоморфные $\mathfrak{g}$-модули.*

Доказательство проведем в два этапа.

1°. Предположим сначала, что K_1 — расширение поля K *конечной степени n*. Пусть U — универсальная обертывающая алгебра для $\mathfrak{g}$, так что универсальная обертывающая алгебра для $\mathfrak{g}_{(K_1)}$ есть $U_{(K_1)} = U \otimes_K K_1$ (§ 2, n° 9). Будучи изоморфными $U_{(K_1)}$-модулями, $M_{(K_1)}$ и $N_{(K_1)}$ изоморфны, конечно, и как U-модули; но как U-модули они изоморфны соответственно M^n и N^n. В то же время M и N суть U-модули конечной длины; поэтому M (соотв. N) является прямой суммой семейства $\left(P_i^{r_i}\right)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ $\left(\text{соотв. } \left(Q_j^{s_j}\right)_{1 \leqslant j \leqslant q}\right)$ подмодулей, таких, что P_i (соотв. Q_j) неразложимы и любые два P_i (соотв. Q_j) с различными индексами неизоморфны (*Алг.*, гл. VIII, § 2, n° 2, теорема 1). Тогда M^n (соотв. N^n) изоморфен прямой сумме модулей $P_i^{nr_i}$ (соотв. $Q_j^{ns_j}$). Отсюда выводим (см. *там же*), что $q = p$, и (возможно, после некоторой перестановки модулей Q_j) имеем $nr_i = ns_i$ и P_i изоморфен Q_i для $1 \leqslant i \leqslant p$. Стало быть, M изоморфен N.

2°. *Общий случай*. Пусть P есть $\mathfrak{g}$-модуль $\mathscr{L}_K(M, N)$ и Q — подпространство инвариантов в P, т. е. множество гомоморфизмов $\mathfrak{g}$-модуля M в $\mathfrak{g}$-модуль N. В $\mathfrak{g}_{(K_1)}$-модуле $\mathscr{L}_{(K_1)}(M_{(K_1)}, N_{(K_1)}) = (\mathscr{L}_K(M, N))_{(K_1)}$ подпространством инвариантов является $Q_{(K_1)}$. Предположение об изоморфности $M_{(K_1)}$ и $N_{(K_1)}$ влечет за собой совпадение размерностей модулей M и N над K и существование в $Q_{(K_1)}$ элемента g, являющегося изоморфизмом $M_{(K_1)}$ на $N_{(K_1)}$. Пусть $(f_1, \ldots, f_d)$ — базис в Q над K. Выберем, с другой стороны, базисы в M и N над K. Если $\lambda_k \in K_1$ для $1 \leqslant k \leqslant d$, то матрица отображения $f = \sum_{k=1}^{d} \lambda_k f_k$ в этих базисах имеет в качестве определителя многочлен $D(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ с

коэффициентами в K. Если $f = g$, то этот определитель отличен от нуля и, значит, не все коэффициенты в D — нули. Поэтому если Ω — алгебраическое замыкание K, то существуют (ибо Ω бесконечно) элементы $\mu_k \in \Omega$ $(1 \leqslant k \leqslant d)$, такие, что $D(\mu_1, \ldots, \mu_k) \neq 0$ (*Алг.*, гл. IV, § 2, n° 5, предложение 8). Если K_2 — алгебраическое расширение K, порожденное μ_k $(1 \leqslant k \leqslant d)$, то отсюда выводим, что $\sum_{k=1}^{d} \mu_k f_k$ — изоморфизм $M_{(K_2)}$ на $N_{(K_2)}$. Но K_2 имеет конечную степень над K (*Алг.* гл. V, § 3, n° 2, предложение 5), поэтому M и N изоморфны по первой части доказательства.

Пусть снова K, K_1 и φ те же самые, что и в начале настоящего n°. Пусть ρ — представление $\mathfrak{g}$ в K-модуле M, обладающем конечным базисом $(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда билинейная форма на $\mathfrak{g}_{(K_1)}$, ассоциированная с $\rho_{(K_1)}$, получается из билинейной формы, ассоциированной с ρ, расширением кольца скаляров (ибо если $u \in \mathscr{L}_K(M)$, то u обладает той же матрицей в базисе $(x_1, \ldots, x_n)$, что и $u \otimes 1$ в базисе $(x_1 \otimes 1, \ldots, x_n \otimes 1)$, а значит, u и $u \otimes 1$ имеют равные следы). В частности, если K-модуль $\mathfrak{g}$ обладает конечным базисом, то *форма Киллинга* алгебры $\mathfrak{g}_{(K_1)}$ получается из формы Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$ расширением кольца скаляров до K_1.

§ 4. Нильпотентные алгебры Ли

Напоминаем, что начиная с этого места K — поле. Кроме того, до конца главы предполагается, что все алгебры Ли конечномерны над K.

1. Определение нильпотентных алгебр Ли

Определение 1. *Говорят, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ нильпотентна, если существует конечная убывающая цепочка ее идеалов $(\mathfrak{g}_i)_{0 \leqslant i \leqslant p}$, такая, что $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_p = \{0\}$ и $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \subset \mathfrak{g}_{i+1}$ для $0 \leqslant i < p$.*

Коммутативная алгебра Ли нильпотентна.

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Следующие условия эквивалентны:*

а) $\mathfrak{g}$ *нильпотентна;*

б) $\mathscr{C}^k\mathfrak{g} = \{0\}$ *для достаточно большого* k;

в) $\mathscr{C}_k\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$ *для достаточно большого* k;

г) *существует целое k, такое, что* $\operatorname{ad} x_1 \circ \operatorname{ad} x_2 \circ \ldots \circ \operatorname{ad} x_k = 0$ *для любых элементов* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *из* $\mathfrak{g}$;

д) *существует убывающая цепочка идеалов* $(\mathfrak{g}_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ *алгебры* $\mathfrak{g}$, *такая, что* $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_n=\{0\}$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i]\subset\mathfrak{g}_{i+1}$ *и* $\dim\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}=1$ *для* $0\leqslant i<n$.

Если $\mathscr{C}^k\mathfrak{g}=\{0\}$ (соотв. $\mathscr{C}_k\mathfrak{g}=\mathfrak{g}$), то ясно, что последовательность $\mathscr{C}^1\mathfrak{g}, \ldots, \mathscr{C}^k\mathfrak{g}$ (соотв. $\mathscr{C}_k\mathfrak{g}, \mathscr{C}_{k-1}\mathfrak{g}, \ldots, \mathscr{C}_0\mathfrak{g}$) обладает свойствами, сформулированными в определении 1, откуда следует, что $\mathfrak{g}$ нильпотентна. Обратно, предположим, что существует последовательность $(\mathfrak{g}_i)_{0\leqslant i\leqslant p}$, обладающая свойствами из определения 1. Индукцией по i убеждаемся, что $\mathfrak{g}_i\supset\mathscr{C}^{i+1}\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}_{p-i}\subset\subset\mathscr{C}_i\mathfrak{g}$. Поэтому $\mathscr{C}^{p+1}\mathfrak{g}=\{0\}$ и $\mathscr{C}_p\mathfrak{g}=\mathfrak{g}$. Итак, доказано, что условия а), б) и в) эквивалентны. С другой стороны, $\mathscr{C}^i\mathfrak{g}$ есть множество линейных комбинаций элементов вида

$$[x_1, [x_2, \ldots, [x_{i-2}[x_{i-1}, x_i]]\ldots]],$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_i$ пробегают $\mathfrak{g}$. Поэтому условия б) и г) эквивалентны. Наконец, если существует последовательность $(\mathfrak{g}_i)_{0\leqslant i\leqslant p}$ идеалов, обладающая свойствами из определения 1, то существует последовательность подпространств $(\mathfrak{h}_i)_{0\leqslant i\leqslant n}$ пространства $\mathfrak{g}$ размерностей $n, n-1, n-2, \ldots, 0$ и последовательность индексов $i_0<i_1<\ldots<i_p$ с $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{h}_{i_0}, \mathfrak{g}_1=\mathfrak{h}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{g}_p=\mathfrak{h}_{i_p}$. Так как $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_{i_k}]\subset\mathfrak{h}_{i_{k+1}}$, то $\mathfrak{h}_i$ — идеалы и тогда $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}_i]\subset\mathfrak{h}_{i+1}$ для всех i. Поэтому условия а) и д) эквивалентны.

Следствие 1. *Центр ненулевой нильпотентной алгебры Ли отличен от нуля.*

Следствие 2. *Форма Киллинга нильпотентной алгебры Ли является нулевой.*

В самом деле, для любых элементов x, y нильпотентной алгебры Ли эндоморфизм $\operatorname{ad}x\circ\operatorname{ad}y$ нильпотентен и поэтому имеет нулевой след.

Предложение 2. *Подалгебра, факторалгебра и центральное расширение нильпотентной алгебры Ли нильпотентны. Произведение конечного числа нильпотентных алгебр Ли является нильпотентной алгеброй Ли.*

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{g}'$ — ее подалгебра, $\mathfrak{h}$ — ее идеал, $\mathfrak{k}=\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ и φ — каноническое отображение $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{k}$. Если $\mathfrak{g}$ нильпотентна, то $\mathscr{C}^k\mathfrak{g}=\{0\}$ для целого k, откуда $\mathscr{C}^k\mathfrak{g}'\subset\mathscr{C}^k\mathfrak{g}=\{0\}$ и $\mathscr{C}^k\mathfrak{k}=\varphi(\mathscr{C}^k\mathfrak{g})=\{0\}$, т. е. $\mathfrak{g}'$ и $\mathfrak{k}$ нильпотентны. Если $\mathfrak{k}$ нильпотентна и $\mathfrak{h}$ содержится в центре $\mathfrak{g}$, то $\mathscr{C}^k\mathfrak{k}=\{0\}$ для целого k, откуда $\mathscr{C}^k\mathfrak{g}\subset\mathfrak{h}$ и поэтому $\mathscr{C}^{k+1}\mathfrak{g}\subset[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}]=\{0\}$, так что $\mathfrak{g}$ нильпотентна. Наконец, утверждение о произведениях следует, например, из утверждения а) $\Rightarrow$ г) предложения 1.

Предложение 2 и определение 1 показывают, что нильпотентные алгебры Ли — это в точности те алгебры, которые получаются в результате конечного числа центральных расширений коммутативных алгебр Ли.

Предложение 3. *Пусть $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли, а $\mathfrak{h}$ — ее подалгебра, отличная от $\mathfrak{g}$. Тогда нормализатор $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ отличен от $\mathfrak{h}$.*

Пусть k — наибольшее целое число, такое, что $\mathscr{C}^k\mathfrak{g} + \mathfrak{h} \neq \mathfrak{h}$. Тогда $[\mathscr{C}^k\mathfrak{g} + \mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathscr{C}^{k+1}\mathfrak{g} + \mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$, поэтому нормализатор $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ содержит $\mathscr{C}^k\mathfrak{g} + \mathfrak{h}$.

2. Теорема Энгеля

Лемма 1. *Пусть V — векторное пространство над K. Если x — нильпотентный эндоморфизм на V, то отображение $y \mapsto [x, y]$ пространства $\mathscr{L}(V)$ в $\mathscr{L}(V)$ нильпотентно.*

В самом деле, если f обозначает это отображение, то $f^m(y)$ является суммой членов вида $\pm x^i y x^j$, где $i + j = m$. Если $x^k = 0$, то $f^{2k-1}(y) = 0$ для любого y.

Теорема 1 (*Энгель*). *Пусть V — векторное пространство над K, $\mathfrak{g}$ — конечномерная подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$, элементы которой являются нильпотентными эндоморфизмами на V. Если $V \neq \{0\}$, то существует элемент $u \neq 0$ в V, такой, что $x.u = 0$ для любого $x \in \mathfrak{g}$.*

Доказательство проводится индукцией по размерности n алгебры $\mathfrak{g}$. Теорема очевидна при $n = 0$. Предположим, что она верна для всех алгебр размерности меньшей n.

Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$ размерности $m < n$. Если $x \in \mathfrak{h}$, то $\mathrm{ad}_\mathfrak{g} x$ отображает $\mathfrak{h}$ в себя и индуцирует при факторизации эндоморфизм $\sigma(x)$ пространства $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$. По лемме 1 $\mathrm{ad}_\mathfrak{g} x$ нильпотентен, откуда следует, что и $\sigma(x)$ нильпотентен. По предположению индукции существует ненулевой элемент в $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, который аннулируется всеми $\sigma(x)$, $x \in \mathfrak{h}$. Иначе говоря, существует $y \in \mathfrak{g}$, $y \notin \mathfrak{h}$, такой, что $[x, y] \in \mathfrak{h}$ для всех $x \in \mathfrak{h}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{h}$ — идеал в некоторой подалгебре размерности $m + 1$ алгебры $\mathfrak{g}$.

Из доказанного выводим (последовательно, начиная с $\mathfrak{h} = \{0\}$), что $\mathfrak{g}$ обладает идеалом $\mathfrak{h}$ размерности $n - 1$. Пусть $a \in \mathfrak{g}$, $a \notin \mathfrak{h}$. Снова используем предположение индукции: элементы $u \in V$, такие, что $x.u = 0$ для всех $x \in \mathfrak{h}$, образуют ненулевое подпространство U пространства V. Это подпространство устойчиво относительно a (§ 3, n° 5, предложение 5). Так как a — нильпотентный эндоморфизм на V, то в U существует ненулевой элемент, который аннулируется a, а следовательно, и любым элементом из $\mathfrak{g}$.

Следствие 1. *Для того чтобы некоторая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ была нильпотентной, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in \mathfrak{g}$ присоединенный эндоморфизм* $\operatorname{ad} x$ *был нильпотентен.*

Условие необходимо (предложение 1). Предположим, что его достаточность доказана для алгебр Ли размерности $< n$ $(n \neq 0)$. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли размерности n, такая, что для любого $x \in \mathfrak{g}$ преобразование $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ нильпотентно. Теорема 1, примененная к множеству $\operatorname{ad} x$ $(x \in \mathfrak{g})$, показывает, что центр $\mathfrak{c}$ алгебры $\mathfrak{g}$ не равен нулю. Итак, $\mathfrak{g}$ является центральным расширением алгебры Ли $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$, которая нильпотентна по нашему предположению индукции. Остается применить предложение 2.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, а $\mathfrak{h}$ — ее идеал. Предположим, что $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ нильпотентна и что для любого $x \in \mathfrak{g}$ ограничение на $\mathfrak{h}$ преобразования* $\operatorname{ad} x$ *нильпотентно. Тогда $\mathfrak{g}$ нильпотентна.*

Пусть $x \in \mathfrak{g}$. Так как $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ нильпотентна, то существует целое число k, такое, что $(\operatorname{ad} x)^k(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{h}$. По условию существует целое k', такое, что $(\operatorname{ad} x)^{k'}(\mathfrak{h}) = \{0\}$. Поэтому $(\operatorname{ad} x)^{k+k'} = \{0\}$. Следствие 2 теперь вытекает из следствия 1.

Следствие 3. *Пусть V — векторное пространство и $\mathfrak{g}$ — конечномерная подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$, элементы которой являются нильпотентными эндоморфизмами на V. Тогда $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли.*

Это немедленно вытекает из леммы 1 и следствия 1.

Пример. Алгебра $\mathfrak{n}(n, K)$ (§ 1, n° 2, *пример* 2, 3°) нильпотентна.

3. Наибольший идеал нильпотентности представления

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — ее идеал, M — простой $\mathfrak{g}$-модуль. Если для любого $x \in \mathfrak{a}$ эндоморфизм x_M нильпотентен, то $x_M = 0$.*

В самом деле, пусть N — подпространство в M, состоящее из $m \in M$, таких, что $x_M . m = 0$ для любого $x \in \mathfrak{a}$. По теореме 1 $N \neq \{0\}$. С другой стороны, для любого $y \in \mathfrak{g}$ подпространство N устойчиво относительно y_M (§ 3, n° 5, предложение 5). Поэтому $N = M$, что и требовалось доказать.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — ее идеал, M — некоторый $\mathfrak{g}$-модуль, конечномерный над K, и $(M_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ — ряд Жордана — Гёльдера $\mathfrak{g}$-модуля M. Следующие условия эквивалентны:*

a) *для любого $x \in \mathfrak{a}$ эндоморфизм x_M нильпотентен;*

б) *для любого* $x \in \mathfrak{a}$ *эндоморфизм* x_M *лежит в радикале ассоциативной алгебры* A, *порожденной* 1 *и всеми* y_M, *где* $y \in \mathfrak{g}$;

в) *для любого* $x \in \mathfrak{a}$ *выполняется*

$$x_M(M_0) \subset M_1,\ x_M(M_1) \subset M_2,\ \ldots,\ x_M(M_{n-1}) \subset M_n.$$

Если эти условия выполнены, то идеал $\mathfrak{a}$ *ортогонален к* $\mathfrak{g}$ *относительно билинейной формы, ассоциированной с* $\mathfrak{g}$*-модулем* M.

б) $\Rightarrow$ а). Так как A конечномерна над K, то ее радикал нильпотентен (*Алг.*, гл. VIII, § 6, n° 4, теорема 3), поэтому и все элементы этого радикала нильпотентны.

а) $\Rightarrow$ в). Каждый фактор $Q_i = M_i/M_{i+1}$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$ есть простой $\mathfrak{g}$-модуль. Для каждого $x \in \mathfrak{a}$ эндоморфизм x_{Q_i}, который получается из x_M взятием ограничения на M_i и факторизацией, нильпотентен в силу а), а потому равен нулю в силу леммы 2; иначе говоря, $x_M(M_i) \subset M_{i+1}$.

в) $\Rightarrow$ б). Предположим, что выполняется условие в); пусть $x \in \mathfrak{a}$ и $z \in A$. Имеем $z(M_i) \subset M_i$ $(0 \leqslant i \leqslant n)$, откуда следует, что $(zx_M)^n(M) = \{0\}$. Таким образом, Ax_M — левый нильидеал в A и, значит, содержится в радикале A (*Алг.*, гл. VIII, § 6, n° 3, следствие 3 теоремы 1).

Наконец, предположим, что выполнены условия а), б), в). Пусть $x \in \mathfrak{a}$ и $y \in \mathfrak{g}$. Только что мы убедились в том, что $y_M x_M$ нильпотентен. Значит, $\operatorname{Tr}(y_M x_M) = 0$, что и доказывает последнее утверждение леммы.

Предложение 4. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *алгебра Ли*, M — *некоторый* $\mathfrak{g}$*-модуль, конечномерный над* K, A — *ассоциативная алгебра, порожденная* 1 *и множеством* x_M $(x \in \mathfrak{g})$.

а) *Все идеалы* $\mathfrak{a}$ *алгебры* $\mathfrak{g}$, *такие, что* x_M *нильпотентен для любого* $x \in \mathfrak{a}$, *содержатся в одном из них, скажем,* $\mathfrak{n}$.

б) *Идеал* $\mathfrak{n}$ *является множеством элементов* $x \in \mathfrak{g}$, *таких, что* x_M *принадлежит радикалу алгебры* A.

в) *Пусть* $(M_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ — *ряд Жордана — Гёльдера* $\mathfrak{g}$*-модуля* M; *тогда* $\mathfrak{n}$ *является также множеством тех* $x \in \mathfrak{g}$, *для которых* $(x)_{M_i/M_{i+1}} = 0$ *при всех* i.

г) $\mathfrak{n}$ *ортогонален к* $\mathfrak{g}$ *относительно билинейной формы, ассоциированной с* ρ.

Множество $x \in \mathfrak{g}$, таких, что x_M принадлежит радикалу алгебры A, является, очевидно, идеалом в $\mathfrak{g}$. Предложение, таким образом, немедленно следует из леммы 3.

Определение 2. *Идеал* $\mathfrak{n}$ *из предложения* 4 *называется наибольшим идеалом нильпотентности* $\mathfrak{g}$*-модуля* M *или наибольшим идеалом нильпотентности соответствующего представления.*

радикал алгебры A — пересечение минимальных левых идеалов алгебры A (это двусторонний идеал)

Понятно, что $\mathfrak{n}$ содержит ядро этого представления. Он Z равен этому ядру в случае, когда M полупрост (предложение 4в)), но не в общем случае. Следует обратить внимание на тот факт, что если для некоторого $x \in \mathfrak{g}$ эндоморфизм x_M нильпотентен, то совсем не обязательно $x \in \mathfrak{n}$.

Отметим еще, что один частный случай леммы 3 дает следующий результат.

Предложение 5. *Пусть V есть n-мерное векторное пространство над K и $\mathfrak{g}$ — подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{gl}(V)$, элементы которой являются нильпотентными эндоморфизмами пространства V. Тогда существует убывающая цепочка подпространств $V_0, V_1, \ldots, V_n$ пространства V размерностей $n, n-1, \ldots, 0$, таких, что $x(V_i) \subset V_{i+1}$ для всех $x \in \mathfrak{g}$ и $i = 0, 1, \ldots, n-1$.*

4. Наибольший нильпотентный идеал алгебры Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — ее идеал. Для того чтобы $\mathfrak{a}$ был нильпотентным, необходимо и достаточно, чтобы для любого $x \in \mathfrak{a}$ эндоморфизм $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ был нильпотентным. Это условие, очевидно, достаточно; оно и необходимо, ибо если $\mathfrak{a}$ нильпотентен и если $x \in \mathfrak{a}$, то $\operatorname{ad}_{\mathfrak{a}} x$ нильпотентен и $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ отображает $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{a}$, откуда следует, что $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ нильпотентен. Только что доказанное утверждение и предложение 4, примененное к присоединенному представлению $\mathfrak{g}$, дают следующее

Предложение 6. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, E — подалгебра ассоциативной алгебры $\mathscr{L}(\mathfrak{g})$, порожденная 1 и всеми $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ $(x \in \mathfrak{g})$. Пусть R — радикал алгебры E.*

а) *Множество $\mathfrak{n}$ элементов $y \in \mathfrak{g}$, таких, что $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} y \in R$, является наибольшим нильпотентным идеалом в $\mathfrak{g}$.*

б) *Он ортогонален к $\mathfrak{g}$ относительно формы Киллинга.*

Следует помнить, что $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ может обладать ненулевыми нильпотентными идеалами.

5. Расширение поля скаляров

Пусть $\mathfrak{g}$ есть K-алгебра Ли, K_1 — расширение K и $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_{(K_1)}$. Так как $\mathscr{C}^k\mathfrak{g}' = (\mathscr{C}^n\mathfrak{g})_{(K_1)}$, то $\mathfrak{g}$ нильпотентна тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}'$ нильпотентна.

Пусть M является $\mathfrak{g}$-модулем конечной размерности над K, $\mathfrak{n}$ — наибольший идеал нильпотентности модуля M и $M' = M_{(K_1)}$. Пусть $(M_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ — ряд Жордана — Гёльдера $\mathfrak{g}$-модуля M. Имеем $x_M(M_i) \subset M_{i+1}$ для любого i и любого $x \in \mathfrak{n}$, откуда $x'_{M'}((M_i)_{(K_1)}) \subset (M_{i+1})_{(K_1)}$ для любого i и любого $x' \in \mathfrak{n}_{(K_1)}$. По-

этому $x'_{M'}$ нильпотентен для $x' \in \mathfrak{n}_{(K_1)}$, так что $\mathfrak{n}_{(K_1)}$ содержится в наибольшем идеале нильпотентности $\mathfrak{n}'$ модуля M'. Убедимся, что *если K_1 сепарабельно над K, то $\mathfrak{n}' = \mathfrak{n}_{(K_1)}$*. Пусть E — ассоциативная K-алгебра, порожденная 1 и x_M ($x \in \mathfrak{g}$), E' — ассоциативная K-алгебра, порожденная 1 и $x'_{M'}$ ($x' \in \mathfrak{g}'$), R и R' — радикалы E и E'. Алгебра E' канонически отождествляется с $E_{(K_1)}$. Имеем $R' = R_{(K_1)}$ (*Алг.*, гл. VIII, § 7, n° 2, следствие 2в) предложения 3). Если это так, то при $y' \in \mathfrak{n}'$ запишем $y' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$, где y_i принадлежит $\mathfrak{g}$ и $\lambda_i \in K_1$ линейно независимы над K. Имеем $y'_{M'} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (y_i)_{M'}$ и $y'_{M'} \in R' = R_{(K_1)}$. Значит, $(y_i)_M \in R$ и поэтому $y_i \in \mathfrak{n}$ для всех i. Отсюда выводим $y' \in \mathfrak{n}_{(K_1)}$ и $\mathfrak{n}' \subset \mathfrak{n}_{(K_1)}$.

В частности, если K_1 сепарабельно над K, то наибольший нильпотентный идеал $\mathfrak{g}_{(K_1)}$ получается из наибольшего нильпотентного идеала $\mathfrak{g}$ при расширении поля скаляров K до K_1.

§ 5. Разрешимые алгебры Ли

Напомним, что отныне K — поле характеристики нуль и что все алгебры Ли предполагаются конечномерными над K [1].

1. Определение разрешимых алгебр Ли

Определение 1. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется разрешимой, если k-й член производного ряда $\mathscr{D}^k\mathfrak{g}$ равен нулю для достаточно большого k.*

Нильпотентная алгебра Ли разрешима.

Предложение 1. *Подалгебра и факторалгебра разрешимой алгебры Ли разрешимы. Любое расширение разрешимой алгебры Ли при помощи разрешимой само разрешимо. Конечное произведение разрешимых алгебр Ли разрешимо.*

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{g}'$ — ее подалгебра, $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ и φ — каноническое отображение $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{k}$. Если $\mathfrak{g}$ разрешима, то $\mathscr{D}^k\mathfrak{g} = \{0\}$ для некоторого k, следовательно, $\mathscr{D}^k\mathfrak{g}' \subset \mathscr{D}^k\mathfrak{g} = \{0\}$ и $\mathscr{D}^k\mathfrak{k} = \varphi(\mathscr{D}^k\mathfrak{g}) = 0$. Поэтому $\mathfrak{g}'$ и $\mathfrak{k}$ разрешимы. Если $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{k}$ разрешимы, то существуют целые числа s, t, такие, что $\mathscr{D}^s\mathfrak{h} = \mathscr{D}^t\mathfrak{k} = \{0\}$; тогда $\mathscr{D}^t\mathfrak{g} \subset \mathfrak{h}$, откуда $\mathscr{D}^{s+t}\mathfrak{g} = \mathscr{D}^s(\mathscr{D}^t\mathfrak{g}) \subset$

---

[1]) Читатель обратит внимание на то, что ограничение на характеристику поля K не используется в пунктах 1 и 2 настоящего параграфа.

$\subset \mathscr{D}^s\mathfrak{h} = \{0\}$, и $\mathfrak{g}$ разрешима. Последнее утверждение следует из второго индукцией по числу множителей.

Предложение 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Следующие условия эквивалентны:*

а) $\mathfrak{g}$ *разрешима;*

б) *существует убывающая последовательность* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \ldots \ldots \supset \mathfrak{g}_n = \{0\}$ *идеалов алгебры* $\mathfrak{g}$, *таких, что алгебры* $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ *коммутативны* $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$;

в) *существует убывающая последовательность* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'_0 \supset \mathfrak{g}'_1 \supset \ldots \ldots \supset \mathfrak{g}'_p = \{0\}$ *подалгебр в* $\mathfrak{g}$, *таких, что* $\mathfrak{g}'_{i+1}$ — *идеал в* $\mathfrak{g}'_i$ *и* $\mathfrak{g}'/\mathfrak{g}'_{+1}$ *коммутативна* $(i = 0, 1, \ldots, p-1)$;

г) *существует убывающая последовательность* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}''_0 \supset \mathfrak{g}''_1 \supset \ldots \ldots \supset \mathfrak{g}''_q = \{0\}$ *подалгебр* $\mathfrak{g}$, *таких, что* $\mathfrak{g}''_{i+1}$ — *идеал коразмерности* 1 *в* $\mathfrak{g}''_i$ $(i = 0, 1, \ldots, q-1)$.

а) $\Rightarrow$ б). Достаточно рассмотреть производный ряд алгебры $\mathfrak{g}$.

б) $\Rightarrow$ в). Очевидно.

в) $\Rightarrow$ г). Предположим, что условие в) выполнено; тогда любое подпространство в $\mathfrak{g}'_i$, содержащее $\mathfrak{g}'_{i+1}$, есть идеал в $\mathfrak{g}'_i$, откуда следует г).

г) $\Rightarrow$ а). Это следует из того, что расширение разрешимой алгебры при помощи разрешимой разрешимо.

Примеры разрешимых алгебр Ли.

I. Пусть $\mathfrak{g}$ — двумерное векторное пространство над K, (e_1, e_2) — базис в $\mathfrak{g}$. Существует, и притом только одно, билинейное кососимметрическое умножение $(x, y) \mapsto [x, y]$ на $\mathfrak{g}$, такое, что $[e_1, e_2] = e_2$. Легко проверить, что $\mathfrak{g}$ таким образом наделяется структурой разрешимой алгебры Ли. Теперь пусть $\mathfrak{h}$ некоммутативная двумерная алгебра Ли над K. Покажем, что $\mathfrak{h}$ изоморфна $\mathfrak{g}$. Пусть (f_1, f_2) — базис в $\mathfrak{h}$. Элемент $[f_1, f_2]$ не равен нулю (иначе $\mathfrak{h}$ была бы коммутативна) и, значит, порождает одномерное подпространство $\mathfrak{k}$ алгебры $\mathfrak{h}$. Имеем $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \mathfrak{k}$. Пусть (e'_1, e'_2)—базис в $\mathfrak{h}$, такой, что $e'_2 \in \mathfrak{k}$. Итак, $[e'_1, e'_2] = \lambda e'_2$, причем $\lambda \neq 0$. Заменяя e'_1 на $\lambda^{-1} e_1$, видим, что можно предполагать $\lambda = 1$, откуда и следует наше утверждение.

II. Формулы (5) § 1 показывают, что $\mathscr{D}\mathfrak{t}(n, K) = \mathfrak{n}(n, K)$. Так как $\mathfrak{n}(n, K)$ нильпотентна и, следовательно, разрешима, то $\mathfrak{t}(n, K)$ разрешима. Отсюда следует, что $\mathfrak{st}(n, K)$ разрешима. В частности, $\mathfrak{st}(2, K)$ изоморфна алгебре из примера I.

2. Радикал алгебры Ли

Пусть $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — два разрешимых идеала алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Алгебра $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ изоморфна $\mathfrak{a}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ и, значит, разрешима, так же как и $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, являющаяся расширением $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})/\mathfrak{b}$ при помощи $\mathfrak{b}$

(предложение 1). Отсюда следует, что максимальный разрешимый идеал в $\mathfrak{g}$ содержит любой разрешимый идеал алгебры $\mathfrak{g}$, т. е. $\mathfrak{g}$ обладает наибольшим разрешимым идеалом. Это оправдывает следующее

Определение 2. *Радикалом алгебры Ли называется ее наибольший разрешимый идеал.*

Предложение 3. *Радикал $\mathfrak{r}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ есть наименьший идеал в $\mathfrak{g}$, такой, что радикал алгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ равен нулю.*

Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$ и φ — каноническое отображение $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. Если радикал $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ равен нулю, то $\varphi(\mathfrak{r})$, являющийся разрешимым идеалом в $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$, равен нулю, откуда $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{a}$. С другой стороны, прообраз $\varphi^{-1}(\mathfrak{r}')$ радикала $\mathfrak{r}'$ алгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ является, согласно предложению 1, разрешимым идеалом в $\mathfrak{g}$ и, следовательно, равен $\mathfrak{r}$; поэтому $\mathfrak{r}' = \{0\}$.

Предложение 4. *Пусть $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$ — алгебры Ли. Радикал $\mathfrak{r}$ произведения $\mathfrak{g}_i$ является произведением радикалов $\mathfrak{r}_i$ алгебр $\mathfrak{g}_i$.*

Произведение $\mathfrak{r}'$ идеалов $\mathfrak{r}_i$ является разрешимым идеалом (предложение 1), откуда $\mathfrak{r}' \subset \mathfrak{r}$. Канонический образ $\mathfrak{r}$ в $\mathfrak{g}_i$ — разрешимый идеал в $\mathfrak{g}_i$, а значит, содержится в $\mathfrak{r}_i$; следовательно, $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{r}'$.

3. Нильпотентный радикал алгебры Ли

Определение 3. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Нильпотентным радикалом алгебры $\mathfrak{g}$ называется пересечение ядер ее неприводимых конечномерных представлений.*

Замечания. 1) Пусть $\mathfrak{s}$ — нильпотентный радикал алгебры $\mathfrak{g}$. Так как любая убывающая цепочка подпространств в $\mathfrak{g}$ стабилизируется, то существует конечное число неприводимых конечномерных представлений алгебры $\mathfrak{g}$, пересечение ядер которых равно $\mathfrak{s}$. Прямая сумма этих представлений полупроста и в качестве ядра имеет $\mathfrak{s}$. Отсюда следует, что множество ядер неприводимых конечномерных полупростых представлений алгебры $\mathfrak{g}$ обладает наименьшим элементом, а именно $\mathfrak{s}$.

2) Согласно предложению 4 в) из § 4, n° 3, $\mathfrak{s}$ является также *пересечением наибольших идеалов нильпотентности* конечномерных представлений алгебры $\mathfrak{g}$. В частности, $\mathfrak{s}$ содержится в наибольшем нильпотентном идеале алгебры $\mathfrak{g}$, вследствие чего является ее *нильпотентным идеалом.*

3) Любая линейная форма λ на $\mathfrak{g}$, обращающаяся в нуль на $\mathscr{D}\mathfrak{g}$, является неприводимым представлением (в пространстве K) алгебры $\mathfrak{g}$, откуда $\lambda(\mathfrak{s}) = \{0\}$. Поэтому $\mathfrak{s} \subset \mathscr{D}\mathfrak{g}$. Кроме того, $\mathfrak{s}$ со-

держится в радикале $\mathfrak{r}$ алгебры $\mathfrak{g}$ согласно замечанию 2. Покажем теперь, что $\mathfrak{s} = \mathfrak{r} \cap \mathscr{D}\mathfrak{g}$.

Лемма 1. *Пусть V — конечномерное векторное пространство над K, $\mathfrak{g}$ — подалгебра в $\mathfrak{gl}(V)$, такая, что V — простой $\mathfrak{g}$-модуль, и $\mathfrak{a}$ — коммутативный идеал в $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{a} \cap \mathscr{D}\mathfrak{g} = \{0\}$.*

Пусть S — подалгебра в $\mathscr{L}(V)$, порожденная 1 и $\mathfrak{a}$.

Если $\mathfrak{b}$ — идеал алгебры $\mathfrak{g}$, содержащийся в $\mathfrak{a}$ и такой, что $\operatorname{Tr} bs = 0$ для всех $b \in \mathfrak{b}$ и всех $s \in S$, то, в частности, по определению S имеем $\operatorname{Tr}(b^n) = 0$ при любом целом $n > 0$. Поэтому b — нильпотентный эндоморфизм (*Алг.*, гл. VII, § 5, n° 5, следствие 4 предложения 13). В силу нильпотентности всех элементов из $\mathfrak{b}$ имеем $\mathfrak{b} = \{0\}$ (§ 4, n° 3, лемма 2). Применим это вначале к идеалу $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}]$ алгебры $\mathfrak{g}$. Если $x \in \mathfrak{g}$, $a \in \mathfrak{a}$, $s \in S$, то $\operatorname{Tr}[x, a]s = \operatorname{Tr}(xas - axs) = \operatorname{Tr} x(as - sa) = 0$, поскольку $as = sa$. Стало быть, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] = \{0\}$. Следовательно, элементы из $\mathfrak{g}$ коммутируют с элементами из $\mathfrak{a}$, а, тем самым, и с элементами из S. Если x, y — элементы из $\mathfrak{g}$ и если $s \in S$, то $\operatorname{Tr}[x, y]s = \operatorname{Tr}(xys - yxs) = \operatorname{Tr} x(ys - sy) = 0$, поскольку $ys = sy$. Взяв теперь в качестве $\mathfrak{b}$ идеал $\mathscr{D}\mathfrak{g} \cap \mathfrak{a}$, получим, что $\mathscr{D}\mathfrak{g} \cap \mathfrak{a} = \{0\}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{r}$ — ее радикал, $\mathfrak{s}$ — ее нильпотентный радикал. Тогда $\mathfrak{s} = \mathscr{D}\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r}$.*

Мы уже знаем, что $\mathfrak{s} \subset \mathscr{D}\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r}$. Достаточно будет теперь только показать, что если ρ — простое конечномерное представление алгебры $\mathfrak{g}$, то $\rho(\mathscr{D}\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r}) = \{0\}$. Пусть k — наименьшее целое положительное число, такое, что $\rho(\mathscr{D}^{k+1}\mathfrak{r}) = \{0\}$; положим $\mathfrak{g}' = \rho(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{a}' = \rho(\mathscr{D}^k\mathfrak{r})$; так как $\mathscr{D}^k\mathfrak{r}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{a}'$ — идеал в $\mathfrak{g}'$; этот идеал коммутативен, ибо $\rho(\mathscr{D}^{k+1}(\mathfrak{r})) = \{0\}$. Если V — пространство представления ρ, то $\mathfrak{g}' \subset \mathfrak{gl}(V)$ и V — простой $\mathfrak{g}'$-модуль. Тогда $\rho(\mathscr{D}\mathfrak{g} \cap \mathscr{D}^k\mathfrak{r}) \subset \mathscr{D}\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{a}' = \{0\}$. Если предположить, что $k > 0$, то $\mathscr{D}^k\mathfrak{r} \subset \mathscr{D}\mathfrak{g}$, $\rho(\mathscr{D}^k\mathfrak{r}) = \{0\}$, что противоречило бы определению k. Поэтому $k = 0$, т. е. $\rho(\mathscr{D}\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r}) = \{0\}$.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли. Нильпотентный радикал $\mathfrak{g}$ равен $\mathscr{D}\mathfrak{g}$. Если ρ — неприводимое конечномерное представление алгебры $\mathfrak{g}$, то $\rho(\mathfrak{g})$ — коммутативная алгебра. Ассоциативная алгебра L, порожденная* 1 *и $\rho(\mathfrak{g})$, является расширением конечной степени поля K.*

Здесь $\mathfrak{r} = \mathfrak{g}$, откуда $\mathfrak{s} = \mathscr{D}\mathfrak{g}$. Поэтому $\rho(\mathscr{D}\mathfrak{g}) = \{0\}$, что и доказывает коммутативность $\mathfrak{g}' = \rho(\mathfrak{g})$. Каждый элемент $\neq 0$ из L обратим по лемме Шура; значит, L — поле.

Следствие 2 (теорема Ли). *Пусть $\mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли; предположим, что поле K алгебраически замкнуто. Пусть M —*

некоторый $\mathfrak{g}$-модуль, конечномерный над K, и $(M_i)_{0 \leqslant i \leqslant r}$ — ряд Жордана — Гёльдера модуля M. Тогда M_{i-1}/M_i одномерен над K для $1 \leqslant i \leqslant r$, и для любого $x \in \mathfrak{g}$ имеем $x_{M_{i-1}/M_i} = \lambda_i(x) \cdot 1$, где λ_i — линейная форма на $\mathfrak{g}$, нулевая на $\mathscr{D}\mathfrak{g}$. В частности, любой простой конечномерный $\mathfrak{g}$-модуль является на самом деле одномерным.

Пусть ρ_i — представление $\mathfrak{g}$ в M_{i-1}/M_i. Ассоциативная алгебра L_i, порожденная элементами 1 и $\rho_i(\mathfrak{g})$, есть поле конечной степени над K, равное, следовательно, K. Далее, M_{i-1}/M_i — простой L_i-модуль, откуда $\dim M_{i-1}/M_1 = 1$. Остальная часть следствия очевидна.

Замечания. 1) Если заменить $(M_i)_{0 \leqslant i \leqslant r}$ другим рядом Жордана — Гёльдера модуля M, то последовательность $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ заменится последовательностью вида $(\lambda_{\pi(1)}, \ldots, \lambda_{\pi(r)})$, где π — перестановка $\{1, \ldots, r\}$, что следует из теоремы Жордана — Гёльдера.

2) Пусть $(e_1, \ldots, e_r)$ — базис в M, такой, что $e_i \in M_{i-1}$, $e_i \notin M_i$ $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Если $x \in \mathfrak{g}$, то эндоморфизм на M, соответствующий x, представим в этом базисе треугольной матрицей с диагональными элементами, равными $\lambda_1(x), \ldots, \lambda_r(x)$.

Следствие 3. *Предположим, что K алгебраически замкнуто. Если $\mathfrak{g}$ — разрешимая r-мерная алгебра, то любой ее идеал является членом убывающего ряда идеалов размерностей r, $r-1, \ldots, 0$.*

В самом деле, любой идеал входит в некоторый ряд Жордана — Гёльдера алгебры $\mathfrak{g}$, рассматриваемой как пространство присоединенного представления (*Алг.*, гл. I, § 6, n° 14, следствие теоремы 8); остается применить следствие 2.

Следствие 4. *Предположим, что $K = \mathbf{R}$. Пусть $\mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли. Любое ее неприводимое представление имеет размерность $\leqslant 2$. Любой идеал алгебры $\mathfrak{g}$ является членом убывающей цепочки идеалов $(\mathfrak{g}_i)_{0 \leqslant i \leqslant m}$, такой, что $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_m = \{0\}$, $\dim \mathfrak{g}_{i-1}/\mathfrak{g}_i \leqslant 2$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$.*

Это доказывается так же, как и следствия 2 и 3, причем нужно иметь в виду, что любое алгебраическое расширение поля $\mathbf{R}$ имеет степень $\leqslant 2$.

Следствие 5. *Для того чтобы алгебра Ли $\mathfrak{g}$ была разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ была нильпотентной.*

В силу следствия 1 это условие является необходимым. Оно достаточно, так как $\mathfrak{g}/\mathscr{D}\mathfrak{g}$ коммутативна.

Следствие 6. *Пусть* ρ — *конечномерное представление алгебры Ли* $\mathfrak{g}$. *Пусть* $\mathfrak{r}$ — *радикал* $\mathfrak{g}$. *Любой элемент* $x \in \mathfrak{r}$, *такой, что эндоморфизм* $\rho(x)$ *нильпотентен, принадлежит наибольшему идеалу нильпотентности* $\mathfrak{n}$ *представления* ρ.

Пусть V — пространство представления ρ и $(V_i)_{0 \leqslant i \leqslant r}$ — ряд Жордана — Гёльдера $\mathfrak{r}$-модуля V, и пусть ρ_i — представление $\mathfrak{r}$ в пространстве V_i/V_{i-1} $(1 \leqslant i \leqslant r)$. Если $\rho(x)$ нильпотентен, то таковы же и $\rho_i(x)$, и так как для любого i алгебра, порожденная $\rho_i(\mathfrak{r})$, является полем, $\rho_i(x) = 0$. Обратно, если $\rho_i(x) = 0$ для любого i, то $\rho(x)$ нильпотентен. Это доказывает, что множество $\mathfrak{a}$ тех $x \in \mathfrak{r}$, для которых $\rho(x)$ нильпотентны, является идеалом в $\mathfrak{r}$. С другой стороны, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathscr{D}\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r} \subset \mathfrak{n} \cap \mathfrak{r} \subset \mathfrak{a}$, поэтому $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Это доказывает, что $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{n}$.

Следствие 7. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *алгебра Ли,* $\mathfrak{r}$ — *ее радикал. Следующие четыре множества совпадают*: а) *наибольший нильпотентный идеал в* $\mathfrak{g}$; б) *наибольший нильпотентный идеал в* $\mathfrak{r}$; в) *множество* $x \in \mathfrak{r}$, *таких, что эндоморфизм* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ *нильпотентен*; г) *множество* $x \in \mathfrak{r}$, *таких, что* $\mathrm{ad}_{\mathfrak{r}}\, x$ *нильпотентен.*

Обозначим через $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ эти четыре множества. Включения $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{d} \subset \mathfrak{c}$ ясны. Включение $\mathfrak{c} \subset \mathfrak{a}$ имеет место, согласно следствию 6, примененному к присоединенному представлению алгебры $\mathfrak{g}$.

4. *Критерий разрешимости*

Лемма 2. *Пусть* x — *эндоморфизм конечномерного векторного пространства* V, s (соотв. n) — *его полупростая* (соотв. *нильпотентная*) *компонента* (см. *Алг.*, гл. VIII, § 9, n° 4, определение 4). *Пусть* $\mathrm{ad}\, x$, $\mathrm{ad}\, s$, $\mathrm{ad}\, n$ — *образы* x, s, n *соответственно в присоединенном представлении алгебры* $\mathfrak{gl}(V)$. *Тогда* $\mathrm{ad}\, s$ (соотв. $\mathrm{ad}\, n$) *является полупростой* (соотв. *нильпотентной*) *компонентной* $\mathrm{ad}\, x$ *и многочленом от* $\mathrm{ad}\, x$ *с коэффициентами из* K *без свободного члена.*

Имеем $\mathrm{ad}\, x = \mathrm{ad}\, s + \mathrm{ad}\, n$, $[\mathrm{ad}\, s, \mathrm{ad}\, n] = 0$ и $\mathrm{ad}\, n$ нильпотентен (§ 4, лемма 1). Покажем, что эндоморфизм $\mathrm{ad}\, s$ полупрост. Это достаточно сделать для случая алгебраически замкнутого поля K (см. *Алг.*, гл. VIII, § 9, n° 2, предложение 3). Итак, пусть $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — базис в V, такой, что $s(e_i) = \lambda_i e_i$ $(\lambda_i \in K)$. Пусть (E_{ij}) — канонический базис в $\mathbf{M}_n(K) = \mathfrak{gl}(V)$. По формулам (5) § 1 $(\mathrm{ad}\, s) \cdot E_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij}$, поэтому $\mathrm{ad}\, s$ полупрост. Последнее утверждение леммы следует из *Алг.*, гл. VIII, § 9, n° 4, предложение 8.

Лемма 3. *Пусть M — конечномерное векторное пространство, A и B — два подпространства в $\mathfrak{gl}(M)$, $B \subset A$, и T — множество $t \in \mathfrak{gl}(M)$, таких, что $[t, A] \subset B$. Если $z \in T$ и $\operatorname{Tr}(zu) = 0$ для любого $u \in T$, то z — нильпотентный эндоморфизм.*

Достаточно провести доказательство для случая алгебраически замкнутого поля K, что мы и будем впредь предполагать. Пусть s и n — полупростая и нильпотентная компоненты z и (e_i) — базис в M, такой, что $s(e_i) = \lambda_i e_i$ $(\lambda_i \in K)$. Пусть $V \subset K$ — векторное подпространство над $\mathbf{Q}$, порожденное λ_i. Будем доказывать, что $V = \{0\}$. Пусть f есть $\mathbf{Q}$-линейная форма на V, и пусть t — эндоморфизм на M, такой, что $te_i = f(\lambda_i) e_i$. Если (E_{ij}) — канонический базис в $\mathfrak{gl}(M)$, определенный правилом $E_{ij}e_k = \delta_{jk}e_i$, то

$$(\operatorname{ad} s) E_{ij} = (\lambda_i - \lambda_j) E_{ij},$$
$$(\operatorname{ad} t) E_{ij} = (f(\lambda_i) - f(\lambda_j)) E_{ij}.$$

Существует многочлен P без свободного члена с коэффициентами из поля K, такой, что $P(\lambda_i - \lambda_j) = f(\lambda_i) - f(\lambda_j)$ для любых i, j (ибо если $\lambda_i - \lambda_j = \lambda_h - \lambda_k$, то $f(\lambda_i) - f(\lambda_j) = f(\lambda_h) - f(\lambda_k)$, и если $\lambda_i - \lambda_j = 0$, то $f(\lambda_i) - f(\lambda_j) = 0$). Итак, $\operatorname{ad} t = P(\operatorname{ad} s)$. С другой стороны, $\operatorname{ad} s$ — многочлен от $\operatorname{ad} z$ без свободного члена. Однако $(\operatorname{ad} z)(A) \subset B$, откуда также $(\operatorname{ad} t)(A) \subset B$. В силу предположения имеем $0 = \operatorname{Tr}(zt) = \sum \lambda_i f(\lambda_i)$, откуда $0 = f(\operatorname{Tr}(zt)) = \sum f(\lambda_i)^2$. Так как $f(\lambda_i)$ — рациональные числа, то $f = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 2 (*критерий Картана*). *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, M — конечномерное векторное пространство, ρ — представление $\mathfrak{g}$ в M и β — билинейная форма, ассоциированная с ρ. Алгебра $\rho(\mathfrak{g})$ разрешима тогда и только тогда, когда $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ ортогональна к $\mathfrak{g}$ относительно β.*

Очевидно, можно ограничиться тем случаем, когда $\mathfrak{g}$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{gl}(M)$ и ρ — тождественное отображение. Если $\mathfrak{g}$ разрешима, то $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ содержится в наибольшем идеале нильпотентности тождественного представления алгебры $\mathfrak{g}$ (теорема 1) и, следовательно, ортогональна к $\mathfrak{g}$ относительно β (§ 4, предложение 4г)). Предположим, что $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ ортогональна к $\mathfrak{g}$ относительно β и докажем, что $\mathfrak{g}$ разрешима. Пусть T — множество $t \in \mathfrak{gl}(M)$, таких, что $[t, \mathfrak{g}] \subset \mathscr{D}\mathfrak{g}$. Если $t \in T$ и если x, y принадлежат $\mathfrak{g}$, то $[t, x] \in \mathscr{D}\mathfrak{g}$, откуда

$$\operatorname{Tr}(t[x, y]) = \beta([t, x], y) = 0$$

и по линейности $\operatorname{Tr}(tu) = 0$ для любого $u \in \mathscr{D}\mathfrak{g}$. Кроме того, ясно, что $\mathscr{D}\mathfrak{g} \subset T$. Следовательно (лемма 3), любой элемент из $\mathscr{D}\mathfrak{g}$

нильпотентен. Отсюда вытекает, что алгебра $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ нильпотентна (§ 4, следствие 3 теоремы 1) и, таким образом, $\mathfrak{g}$ разрешима (n° 3, следствие 5 теоремы 1).

5. Новые свойства радикала

Предложение 5. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{r}$ — ее радикал.*

а) *Если ρ — конечномерное представление $\mathfrak{g}$ и β — ассоциированная билинейная форма, то $\mathfrak{r}$ и $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ ортогональны относительно β.*

б) *$\mathfrak{r}$ является ортогональным дополнением к $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ относительно формы Киллинга.*

Пусть x, y взяты из $\mathfrak{g}$, $z \in \mathfrak{r}$. Имеем $[y, z] \in \mathscr{D}\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r}$, откуда $\beta([x, y], z) = \beta(x, [y, z]) = 0$ (теорема 1). Значит, а) доказано.

Пусть $\mathfrak{r}'$ — ортогональное дополнение к $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ относительно формы Киллинга. Это идеал в $\mathfrak{g}$ (§ 3, n° 6, предложение 7а)), содержащий $\mathfrak{r}$ вследствие только что доказанного. С другой стороны, образ $\mathfrak{s}$ идеала $\mathfrak{r}'$ в присоединенном представлении $\mathfrak{g}$ разрешим (теорема 2), поэтому идеал $\mathfrak{r}'$ разрешим как центральное расширение $\mathfrak{s}$. Значит, $\mathfrak{r}' \subset \mathfrak{r}$.

Следствие 1. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ разрешима тогда и только тогда, когда $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ является ортогональным дополнением к $\mathfrak{g}$ относительно формы Киллинга.*

Это непосредственное следствие предложения 5б).

Следствие 2. *Радикал алгебры Ли $\mathfrak{g}$ является характеристическим идеалом.*

В самом деле, $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ — характеристический идеал, а форма Киллинга вполне инвариантна (§ 3, n° 6, предложение 10). Следовательно, ортогональное дополнение к $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ относительно формы Киллинга является характеристическим идеалом (§ 3, n° 6, предложение 7б)).

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{r}$ — ее радикал, $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Тогда радикал идеала $\mathfrak{a}$ равен $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{a}$.*

В самом деле, $\mathfrak{r} \cap \mathfrak{a}$ — разрешимый идеал в $\mathfrak{a}$ и, следовательно, содержится в радикале $\mathfrak{r}'$ алгебры $\mathfrak{a}$. Обратно, $\mathfrak{r}'$ — идеал в $\mathfrak{g}$ (следствие 2 и § 1, n° 4, предложение 2), откуда $\mathfrak{r}' \subset \mathfrak{r}$.

Следствие 2 может быть уточнено следующим образом.

Предложение 6. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{r}$ — ее радикал, $\mathfrak{n}$ — наибольший нильпотентный идеал. Любое дифференцирование алгебры $\mathfrak{g}$ переводит $\mathfrak{r}$ в $\mathfrak{n}$.*

Пусть D — дифференцирование алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} + Kx_0$ — алгебра Ли, в которой $\mathfrak{g}$ является идеалом коразмерности 1, таким, что $Dx = [x_0, x]$ для любого $x \in \mathfrak{g}$ (§ 1, n° 8, *пример* 1). В силу следствия 3 предложения 5 $\mathfrak{r}$ содержится в радикале $\mathfrak{r}'$ алгебры $\mathfrak{g}'$. Имеем $D(\mathfrak{r}) = [x_0, \mathfrak{r}] \subset [\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'] \cap \mathfrak{r}' = \mathfrak{s}'$. Для любого $x \in \mathfrak{s}'$ эндоморфизм $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'} x$ нильпотентен (теорема 1). Поэтому для любого $x \in \mathfrak{s}' \cap \mathfrak{g}$ нильпотентен эндоморфизм $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$. Значит, $D(\mathfrak{r})$ содержится в нильпотентном идеале $\mathfrak{s}' \cap \mathfrak{g}$ алгебры $\mathfrak{g}$.

СЛЕДСТВИЕ. *Наибольший нильпотентный идеал алгебры Ли характеристичен.*

Замечание. Для того чтобы подытожить некоторые из предыдущих результатов, заметим, что если обозначить через $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{k}$ соответственно радикал алгебры $\mathfrak{g}$, ее наибольший нильпотентный идеал, ее нильпотентный радикал и ортогональное дополнение к $\mathfrak{g}$ относительно формы Киллинга, то получим

$$\mathfrak{r} \supset \mathfrak{k} \supset \mathfrak{n} \supset \mathfrak{s}.$$

Включение $\mathfrak{r} \supset \mathfrak{k}$ следует из предложения 5б). Включение $\mathfrak{k} \supset \mathfrak{n}$ следует из § 4, n° 4, предложение 6б). Включение $\mathfrak{n} \supset \mathfrak{s}$ было отмечено в замечании 2 n° 3.

6. Расширение поля скаляров

Пусть $\mathfrak{g}$ есть K-алгебра Ли и K_1 — расширение K. Ясно, что $\mathfrak{g}_{(K_1)}$ разрешима тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ разрешима, так как $\mathscr{D}^n(\mathfrak{g}_{(K_1)}) = (\mathscr{D}^n\mathfrak{g})_{(K_1)}$.

Пусть $\mathfrak{r}$ — радикал $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{r}_{(K_1)}$ — *радикал* $\mathfrak{g}_{(K_1)}$. В самом деле, пусть β — форма Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$. Так как $\mathfrak{r}$ является ортогональным дополнением к $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ относительно β (предложение 5б)), то $\mathfrak{r}_{(K_1)}$ является ортогональным дополнением к $(\mathscr{D}\mathfrak{g})_{(K_1)} = \mathscr{D}(\mathfrak{g}_{(K_1)})$ относительно формы, получающейся из β путем расширения K до K_1, т. е. относительно формы Киллинга алгебры $\mathfrak{g}_{(K_1)}$ (§ 3, n° 8). Наше утверждение, таким образом, получается после применения еще раз предложения 5б).

§ 6. Полупростые алгебры Ли

Напомним, что K обозначает поле характеристики 0 *и что все алгебры Ли конечномерны над K.*

1. Определение полупростых алгебр Ли

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Говорят, что $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, если единственным ее коммутативным идеалом является* $\{0\}$.

Замечания. 1) Нулевая алгебра Ли полупроста. Алгебра размерности 1 или 2 не является полупростой (см. § 5, n° 1, пример 1). Существуют полупростые алгебры размерности 3 (см. n° 7).

2) Центр полупростой алгебры тривиален, поэтому присоединенное представление является точным. т.к. центр - коммут. идеал

3) Если $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$ полупросты, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \ldots \times \mathfrak{g}_n$ полупроста, поскольку проекции на $\mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n$ любого коммутативного идеала $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ равны нулю. , а он содержится в произведении проекций.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Следующие условия эквивалентны:*

а) *$\mathfrak{g}$ полупроста;*

б) *радикал $\mathfrak{r}$ алгебры $\mathfrak{g}$ равен нулю;*

в) *форма Киллинга β на $\mathfrak{g}$ невырожденна.*

Кроме того, полупростая алгебра Ли равна своему производному идеалу.

а) $\Longrightarrow$ б). Действительно, если $\mathfrak{r} \neq \{0\}$, то последний отличный от нулевой алгебры член производного ряда является коммутативным идеалом в $\mathfrak{g}$. использ. инвариантность ф. К.

б) $\Longrightarrow$ в). Это следует из предложения 5б) в § 5, n° 5 (которое доказывает одновременно и последнее утверждение теоремы).

в) $\Longrightarrow$ а). Это следует из предложения 6б) в § 4, n° 4. §3.6.7 (б)

Следствие. *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, ρ — представление $\mathfrak{g}$ в конечномерном пространстве V. Тогда $\rho(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{sl}(V)$.*

В самом деле, линейная форма $x \longmapsto \operatorname{Tr} \rho(x)$ $(x \in \mathfrak{g})$ обращается в нуль на любом x вида $[y, z]$ $(y \in \mathfrak{g},\ z \in \mathfrak{g})$, а значит, и на $\mathscr{D}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$.

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, ρ — ее точное конечномерное представление. Тогда билинейная форма на $\mathfrak{g}$, ассоциированная с ρ, невырожденна.*

В самом деле, ортогональное дополнение к $\mathfrak{g}$ относительно этой формы является разрешимым идеалом (§ 5, n° 4, теорема 2) и, значит, равно нулю.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, β — форма Киллинга, $\mathfrak{a}$ — полупростая подалгебра в $\mathfrak{g}$. Ортогональное дополнение $\mathfrak{h}$ к $\mathfrak{a}$ относительно β является дополнительным подпространством к $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{g}$ и $[\mathfrak{a}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$. Если $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, то и $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, который будет тогда централизатором $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{g}$.*

Пусть β' — ограничение β на $\mathfrak{a}$. Так как β' — билинейная форма, ассоциированная с представлением $x \longmapsto \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ алгебры $\mathfrak{a}$ в пространстве $\mathfrak{g}$, а это представление является точным, то β' невырожденна (предложение 1). Значит, $\mathfrak{h}$ дополнительно к $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{g}$. Кроме того, если x, y лежит в $\mathfrak{a}$ и $z \in \mathfrak{h}$, то $\beta(x, [y, z]) = \beta([x, y], z) = 0$, ибо $[x, y] \in \mathfrak{a}$. Поэтому $[y, z] \in \mathfrak{h}$, а это доказывает, что $[\mathfrak{a}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$.

Если $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, то известно, что $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$ (§ 3, предложение 7) и $\mathfrak{g}$ отождествляется с $\mathfrak{a} \times \mathfrak{h}$. Так как центр идеала $\mathfrak{a}$ равен нулю, то его централизатор в $\mathfrak{g}$ есть $\mathfrak{h}$.

Следствие 2. *Любое расширение полупростой алгебры при помощи полупростой полупросто и тривиально.*

Это сразу вытекает из следствия 1.

Следствие 3. *Если $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, то любое ее дифференцирование является внутренним.*

В самом деле, $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$ изоморфна $\mathfrak{g}$, т. е. полупроста и является идеалом алгебры Ли $\mathfrak{d}$ дифференцирований $\mathfrak{g}$ (§ 1, предложение 1). Если $D \in \mathfrak{d}$ коммутирует со всеми элементами из $\operatorname{ad} \mathfrak{g}$, то для любого $x \in \mathfrak{g}$ имеем $\operatorname{ad} D(x) = [D, \operatorname{ad} x] = 0$, откуда $D(x) = 0$; поэтому $D = 0$. Следствие 3 вытекает теперь из следствия 1.

2. Полупростота представлений

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли. Ее присоединенное представление полупросто. Все ее идеалы и факторалгебры полупросты.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Ортогональное дополнение $\mathfrak{b}$ к $\mathfrak{a}$ относительно формы Киллинга является идеалом в $\mathfrak{g}$, а $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ — коммутативным идеалом (§ 3, n° 6, предложение 7), т. е. равно нулю. Поэтому $\mathfrak{b}$ является дополнением к $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{g}$. Кроме того, поскольку форма Киллинга на $\mathfrak{g}$ невырожденна, таковыми будут и ее ограничения на $\mathfrak{a}$ и на $\mathfrak{b}$ (*Алг.* гл. IX, § 4, n° 1, следствие предложения 1), так что $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ полупросты (n° 1, теорема 1, и § 3, n° 6, предложение 9).

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Тогда следующие два условия эквивалентны:*

а) *Все конечномерные линейные представления алгебры $\mathfrak{g}$ полупросты.*

б) *Для данного линейного представления ρ алгебры $\mathfrak{g}$ в векторном пространстве V конечной размерности и данного подпространства W коразмерности 1, такого, что $\rho(x) V \subset W$ для любого $x \in \mathfrak{g}$, существует прямая, дополняющая W, устойчивая относительно $\rho(\mathfrak{g})$ (и, стало быть, аннулируемая $\rho(\mathfrak{g})$).*

Ясно, что а) влечет за собой б). Предположим, что б) верно. Пусть σ — конечномерное представление $\mathfrak{g}$ в векторном пространстве M и N — подпространство M, устойчивое относительно $\sigma(\mathfrak{g})$. Пусть μ — представление $\mathfrak{g}$ в $\mathcal{L}(M)$, канонически индуцируемое представлением σ (§ 3, n° 3); напомним, что $\mu(x) = \operatorname{ad}_{\mathcal{L}(M)} \sigma(x)$. Пусть V (соотв. W) — подпространство в $\mathcal{L}(M)$, состоящее из линейных отображений M в N, таких, что их

$\mu(x) f = [\sigma(x), f] = \sigma(x) f - f \sigma(x) \in \mathcal{L}(M)$

$f \in \mathcal{L}(M)$

где $\mu: \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathcal{L}(M))$

ограничение на N является гомотетией (соотв. нулевым отображением). Тогда W имеет коразмерность 1 в V и $\mu(x)(V) \subset W$ для любого $x \in \mathfrak{g}$. Согласно условию б), существует элемент $u \in V$, аннулируемый $\mu(x)$ для любого $x \in \mathfrak{g}$, ограничение которого на N является ненулевой гомотетией. Умножая u на подходящий скаляр, можно считать, что u является проектированием M на N. Так как $\mu(x) . u = 0$ означает, что u перестановочно с $\sigma(x)$, то ядро u является дополнением к N в M, устойчивым относительно $\sigma(x)$ для любого $x \in \mathfrak{g}$. Поэтому σ полупросто.

Лемма 3. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *полупростая алгебра Ли*, ρ — *линейное представление* $\mathfrak{g}$ *в конечномерном векторном пространстве* V *и* W — *подпространство в* V *коразмерности* 1, *такое, что* $\rho(x)(V) \subset W$ *для любого* $x \in \mathfrak{g}$. *Тогда существует прямая, дополняющая* W *и устойчивая относительно* $\rho(\mathfrak{g})$.

Для любого $x \in \mathfrak{g}$ пусть $\sigma(x)$ — ограничение $\rho(x)$ на W. Предположим сначала, что σ неприводимо. Если $\sigma = 0$, то $\rho(x)\rho(y) = 0$ для любых x, y из $\mathfrak{g}$, откуда $\rho(\mathfrak{g}) = \rho(\mathscr{D}\mathfrak{g}) = \{0\}$ и наше утверждение очевидно. Если $\sigma \neq \{0\}$, то пусть $\mathfrak{n}$ — ядро σ, и пусть $\mathfrak{m}$ — идеал, дополняющий $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{g}$ (лемма 1); тогда $\mathfrak{m} \neq \{0\}$ и ограничение σ на $\mathfrak{m}$ точно; ограничение на $\mathfrak{m}$ билинейной формы, ассоциированной с σ, невырожденно (предложение 1), поэтому можно построить элемент Казимира c, ассоциированный с $\mathfrak{m}$ и σ. Согласно предложению 12 из § 3, n° 7, $\sigma(c)$ — автоморфизм W. С другой стороны, $\rho(c)(V) \subset W$. Поэтому ядро Z эндоморфизма $\rho(c)$ является прямой, дополняющей W; так как, далее, c принадлежит к центру универсальной обертывающей алгебры для $\mathfrak{g}$, то $\rho(c)$ перестановочно с $\rho(x)$ для любого $x \in \mathfrak{g}$ и, значит, Z устойчиво относительно $\rho(\mathfrak{g})$.

В общем случае можно рассуждать индукцией по размерности V. Пусть T — ненулевое минимальное устойчивое подпространство в W. Пусть ρ' — факторпредставление в $V' = V/T$. Для любого $x \in \mathfrak{g}$ имеем $\rho'(x)(V') \subset W'$, где $W' = W/T$ имеет коразмерность 1 в V'. По предположению индукции существует прямая, дополняющая W' и устойчивая относительно $\rho'(\mathfrak{g})$. Ее прообраз Z в V устойчив относительно $\rho(\mathfrak{g})$, содержит T в качестве подпространства коразмерности 1 и таков, что $Z \cap W = T$, откуда $\rho(x)(Z) \subset T$ для любого $x \in \mathfrak{g}$. Согласно тому, что было доказано выше, существует прямая, дополняющая T в Z, устойчивая относительно $\rho(\mathfrak{g})$; эта прямая является дополнением к W в V, что и завершает доказательство.

Теорема 2 (*Г. Вейль*). *Любое конечномерное линейное представление полупростой алгебры вполне приводимо.*

Это следует из лемм 2 и 3.

Определение 2. *Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется простой, если единственными ее идеалами являются $\mathfrak{g}$ и $\{0\}$ и если, кроме того, $\mathfrak{g}$ некоммутативна.*

Простая алгебра Ли полупроста. Алгебра $\{0\}$ не является простой.

Предложение 2. *Для того чтобы алгебра Ли была полупростой, необходимо и достаточно, чтобы она была произведением простых алгебр.*

Условие является достаточным (n° 1, замечание 3). Обратно, пусть $\mathfrak{g}$ полупроста. Так как присоединенное представление $\mathfrak{g}$ полупросто, то $\mathfrak{g}$ является прямой суммой ненулевых минимальных идеалов $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m$. Поэтому $\mathfrak{g}$ отождествляется с произведением алгебр $\mathfrak{a}_i$ (§ 1, n° 1). Любой идеал в $\mathfrak{a}_i$ является тогда идеалом и в $\mathfrak{g}$, а поэтому равен нулю или $\mathfrak{a}_i$. Кроме того, $\mathfrak{a}_i$ некоммутативен. Поэтому $\mathfrak{a}_i$ являются простыми алгебрами.

Следствие 1. *Полупростая алгебра Ли является прямым произведением своих простых идеалов $\mathfrak{g}_i$. Каждый идеал в $\mathfrak{g}$ является произведением некоторых из этих $\mathfrak{g}_i$.* т.к. некоммут

Имеем $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 \times \ldots \times \mathfrak{a}_m$, где $\mathfrak{a}_i$ просты. Так как центр $\mathfrak{a}_i$ равен нулю, то централизатор $\mathfrak{a}_i$ в $\mathfrak{g}$ является произведением $\mathfrak{a}_j$ для $j \neq i$. Пусть теперь $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Если он не содержит $\mathfrak{a}_i$, то $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}_i = \{0\}$, откуда $[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_i] = \{0\}$ и $\mathfrak{a}$ содержится в произведении $\mathfrak{a}_j$ для $j \neq i$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{a}$ является произведением некоторых из $\mathfrak{a}_j$. Поэтому простые идеалы $\mathfrak{g}$ суть в точности $\mathfrak{a}_i$.

т.к. $\mathfrak{a}_i$ просты

$[\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_i] \subset \mathfrak{a}$ т.к. $\mathfrak{a}$ - идеал $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}_i = 0 \Rightarrow [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_i] =$

Простые идеалы полупростой алгебры Ли называются ее *простыми компонентами*.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$ — две алгебры Ли, $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{r}'$ — их радикалы и f — гомоморфизм $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}'$. Тогда $\mathfrak{r}' = f(\mathfrak{r})$.*

Так как $f(\mathfrak{r})$ разрешима, то $f(\mathfrak{r}) \subset \mathfrak{r}'$. С другой стороны, $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ полупроста (§ 5, n° 2, предложение 3), поэтому алгебра $\mathfrak{g}'/f(\mathfrak{r})$, изоморфная факторалгебре алгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$, сама полупроста (лемма 1), откуда $f(\mathfrak{r}) \supset \mathfrak{r}'$ (§ 5, n° 2, предложение 3).

т.к. алгебра полупроста $\Leftrightarrow$ радикал равен нулю.

Замечания. 1) Теорема 2 допускает обращение: если любое конечномерное представление алгебры $\mathfrak{g}$ полупросто, то $\mathfrak{g}$ полупроста. В самом деле, так как присоединенное представление полупросто, то любой идеал в $\mathfrak{g}$ обладает дополнительным идеалом, т. е. его можно рассматривать как факторалгебру алгебры $\mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{g}$ не полупроста, то она обладает ненулевой коммутативной факторалгеброй и, следовательно, одномерной

факторалгеброй. Однако одномерная алгебра Ли K обладает неполупростыми представлениями, например

$$\lambda \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K и σ — представление алгебры $\mathfrak{g}$ в векторном пространстве M. Пусть, с другой стороны, f есть K-линейное отображение $\mathfrak{g}$ в M, такое, что

$$f([x, y]) = \sigma(x).f(y) - \sigma(y).f(x) \tag{1}$$

для любых x, y из $\mathfrak{g}$. Согласно § 1, n° 8, пример 2, задание σ и f равносильно заданию гомоморфизма $x \mapsto (f(x), \sigma(x))$ алгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{af}(M)$. С другой стороны, мы видели (*там же*), что элемент $(f(x), \sigma(x))$ алгебры $\mathfrak{af}(M)$ канонически отождествляется с элементом $\rho(x)$ алгебры $\mathfrak{gl}(N)$ (где $N = M \times K$), индуцирующим $\sigma(x)$ на M и переводящим элемент $(0, 1)$ пространства N в $f(x)$. Поэтому ρ является представлением $\mathfrak{g}$ в N, таким, что $\rho(x)(N) \subset M$ для любого $x \in \mathfrak{g}$.

В таком случае, если $\mathfrak{g}$ *полупроста*, существует (лемма 3) прямая Z, дополняющая M в N и аннулируемая $\rho(\mathfrak{g})$. Иначе говоря, *существует элемент* $m_0 \in M$, такой, что $\rho(x)$ аннулирует $(-m_0, 1) \in N$ для любого $x \in \mathfrak{g}$, т. е. *такой, что*

$$f(x) = \sigma(x).m_0 \tag{2}$$

для любого $x \in \mathfrak{g}$.

* Предположим, что $K = \mathbf{R}$. Пусть G — связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Рассмотрим аналитический гомоморфизм φ группы G в аффинную группу A пространства M, соответствующий гомоморфизму $x \mapsto (f(x), \sigma(x))$ алгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{af}(M)$. Предыдущие результаты можно переформулировать, сказав, что если $\mathfrak{g}$ полупроста, то $\varphi(G)$ обладает неподвижной точкой в M. В самом деле, пусть H — множество элементов из $\mathbf{GL}(N)$, относительно которых устойчивы линейные многообразия в N, параллельные M. Существует (§ 1, n° 8, *пример* 2) канонический изоморфизм ψ группы A на H. Пусть Z — прямая, дополняющая M в N. Сказать, что $\rho(\mathfrak{g})$ аннулирует Z, — это все равно что сказать, что $(\psi \circ \varphi)(G)$ оставляет неподвижными все точки прямой Z, т. е. (если вспомнить определение ψ) что $\varphi(G)$ оставляет неподвижной проекцию на M точки пересечения Z и $M \times \{1\}$. *

3. Полупростые и нильпотентные элементы в полупростых алгебрах Ли

Предложение 3. *Пусть M — векторное пространство конечной размерности над K и $\mathfrak{g}$ — полупростая подалгебра в $\mathfrak{gl}(M)$. Тогда $\mathfrak{g}$ содержит полупростые и нильпотентные компоненты своих элементов.*

Пусть K_1 — расширение K. Тогда форма Киллинга алгебры $\mathfrak{g}_{(K_1)}$ является расширением на $\mathfrak{g}_{(K_1)}$ формы Киллинга $\mathfrak{g}$ (§ 3, n° 8)

и поэтому невырожденна; следовательно, $\mathfrak{g}_{(K_1)}$ полупроста. Достаточно доказать предложение 3 для случая алгебраически замкнутого поля, что мы и будем предполагать далее.

Для любого подпространства N пространства M пусть $\mathfrak{g}_N$ — подалгебра в $\mathfrak{gl}(M)$, состоящая из элементов, след ограничения которых на N равен нулю и относительно которых устойчиво N. Так как $\mathfrak{g} = \mathscr{D}\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_N$, если N устойчиво относительно $\mathfrak{g}$. Пусть теперь $\mathfrak{g}^*$ — пересечение нормализатора алгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{gl}(M)$ и алгебр $\mathfrak{g}_N$, где N пробегает множество подпространств в M, устойчивых относительно $\mathfrak{g}$. Так как полупростая (соотв. нильпотентная) компонента s (соотв. n) элемента $x \in \mathfrak{gl}(M)$ является многочленом от x без свободного члена и так как $\operatorname{ad} s$ (соотв. $\operatorname{ad} n$) является полупростой (соотв. нильпотентной) компонентой $\operatorname{ad} x$ (§ 5, n° 4, лемма 2), то ясно, что $x \in \mathfrak{g}^*$ влечет за собой $s \in \mathfrak{g}^*$ и $n \in \mathfrak{g}^*$. Достаточно убедиться, таким образом, в том, что $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$. Так как $\mathfrak{g}$ — полупростой идеал в $\mathfrak{g}^*$, то $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{a} \times \mathfrak{g}$ (n° 1, следствие 1 предложения 1). Пусть $a \in \mathfrak{a}$, и пусть N — подпространство, минимальное среди подпространств в M, отличных от нуля и устойчивых относительно $\mathfrak{g}$. Ограничение a на N скалярно вследствие теоремы Бернсайда, имеет след 0 по построению и, следовательно, равно нулю, поскольку характеристика K равна нулю. Так как, далее, M — прямая сумма подпространств вида N, то $a = 0$, откуда $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{g}$.

Следствие. *Элемент x из $\mathfrak{g}$ является полупростым* (соотв. *нильпотентным*) *эндоморфизмом пространства M тогда и только тогда, когда $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ является полупростым* (соотв. *нильпотентным*) *эндоморфизмом $\mathfrak{g}$.*

Пусть s (соотв. n) — полупростая (соотв. нильпотентная) компонента элемента $x \in \mathfrak{g}$. Имеем $s \in \mathfrak{g}$ и $n \in \mathfrak{g}$ (предложение 3). Тогда $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} s$ (соотв. $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} n$) — полупростая (соотв. нильпотентная) компонента эндоморфизма $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ по лемме 2 из § 5, n° 4. Если x полупрост (соотв. нильпотентен), то таков же и $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$. Если теперь эндоморфизм $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ полупрост (соотв. нильпотентен), то он равен $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} s$ (соотв. $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} n$), откуда $x = s$ (соотв. $x = n$), так как присоединенное представление $\mathfrak{g}$ точно.

Определение 3. *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли. Ее элемент x называется полупростым* (соотв. *нильпотентным*), *если для любого конечномерного над K $\mathfrak{g}$-модуля M эндоморфизм x_M полупрост* (соотв. *нильпотентен*).

Предложение 4. *Пусть $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ — полупростые алгебры Ли, $\mathfrak{f}$ — гомоморфизм $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}'$. Если $x \in \mathfrak{g}$ полупрост* (соотв. *нильпотентен*), *то и $\mathfrak{f}(x)$ таков же. Если $\mathfrak{f}$ сюръективен, то любой полупростой* (соотв. *нильпотентный*) *элемент из $\mathfrak{g}'$ является обра-*

зом при отображении f некоторого полупростого (соотв. *нильпотентного*) *элемента из* $\mathfrak{g}$.

Если ρ — представление алгебры $\mathfrak{g}'$, то $\rho \circ f$ — представление $\mathfrak{g}$, откуда следует первое утверждение. Если f сюрьективен, то существует гомоморфизм g алгебры $\mathfrak{g}'$ в $\mathfrak{g}$, такой, что $f \circ g$ — тождественный гомоморфизм алгебры $\mathfrak{g}'$ (n° 1, следствие 2 предложения 1), так что второе утверждение следует из первого.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли.*

а) *Пусть $x \in \mathfrak{g}$. Если существует точное представление ρ алгебры $\mathfrak{g}$, такое, что $\rho(x)$ — полупростой* (соотв. *нильпотентный*) *эндоморфизм, то x полупрост* (соотв. *нильпотентен*).

б) *Любой элемент из $\mathfrak{g}$ может быть единственным образом записан в виде суммы коммутирующих полупростого и нильпотентного элементов.*

Пусть выполнены предположения утверждения а). Пусть, далее, σ — представление $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$ — идеал, дополняющий ядро σ, и α — проекция $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{b}$. Тогда $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ по следствию из предложения 3 полупрост (соотв. нильпотентен), откуда и $\operatorname{ad}_{\mathfrak{b}} \alpha(x)$ полупрост (соотв. нильпотентен). Так как $\sigma(x) = \sigma(\alpha(x))$, то первое утверждение вытекает из следствия предложения 3. Второе утверждение следует тогда из предложения 3, примененного к какому-либо точному представлению.

4. Редуктивные алгебры Ли

Определение 4. *Алгебра Ли называется редуктивной, если ее присоединенное представление полупросто.*

Предложение 5. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, а $\mathfrak{r}$ — ее радикал. Следующие условия эквивалентны:*

а) *$\mathfrak{g}$ редуктивна;*

б) *$\mathscr{D}\mathfrak{g}$ полупроста;*

в) *$\mathfrak{g}$ является произведением полупростой и коммутативной алгебр;*

г) *$\mathfrak{g}$ обладает конечномерным представлением с невырожденной ассоциированной билинейной формой;*

д) *$\mathfrak{g}$ обладает точным конечномерным полупростым представлением;*

модуль $\mathfrak{g}$-полупрост

е) *нильпотентный радикал алгебры $\mathfrak{g}$ равен нулю;*

ж) *$\mathfrak{r}$ является центром $\mathfrak{g}$.*

а) $\Rightarrow$ б). Если присоединенное представление алгебры $\mathfrak{g}$ полупросто, то $\mathfrak{g}$ является прямой суммой ненулевых минимальных идеалов $\mathfrak{a}_i$, значит $\mathfrak{g}$ изоморфна произведению $\mathfrak{a}_i$, причем каждая из алгебр $\mathfrak{a}_i$ не содержит других идеалов, кроме $\{0\}$ и $\mathfrak{a}_i$, т. е. $\mathfrak{a}_i$ либо проста, либо коммутативна размерности 1.

т. к. nil

т-д в $\mathfrak{g}/\mathscr{D}\mathfrak{g}$ только т.е эл-ты которые дают поль

т.к $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ - идеал. n°2.

Следовательно, $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ совпадает с произведением тех $\mathfrak{a}_i$, которые являются простыми, и, таким образом, полупроста.

б) $\Rightarrow$ в). Если $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ полупроста, то $\mathfrak{g}$ изоморфна произведению $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ и алгебры Ли $\mathfrak{h}$ (n° 1, следствие 1 предложения 1); $\mathfrak{h}$ изоморфна $\mathfrak{g}/\mathscr{D}\mathfrak{g}$ и, значит, коммутативна. стр 13 следствие

в) $\Rightarrow$ г). Пусть $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ — две алгебры Ли, ρ_i — конечномерное представление $\mathfrak{g}_i$, β_i — билинейная форма на $\mathfrak{g}_i$, ассоциированная с ρ_i $(i=1, 2)$. Можно рассматривать ρ_1 и ρ_2 как представления алгебры $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$; пусть ρ — их прямая сумма. Ясно, что билинейная форма, ассоциированная с ρ, является прямой суммой β_1 и β_2, поэтому она невырожденна, если невырожденны β_1 и β_2. Теперь для доказательства импликации в) $\Rightarrow$ г) достаточно рассмотреть два таких случая: 1) $\mathfrak{g}$ полупроста; тогда присоединенное представление имеет в качестве ассоциированной формы форму Киллинга, которая невырожденна; 2) $\mathfrak{g}=K$; тогда тождественное представление $\mathfrak{g}$ в K имеет невырожденную ассоциированную билинейную форму.

г) $\Rightarrow$ д). Пусть ρ — конечномерное представление алгебры $\mathfrak{g}$ и β — ассоциированная билинейная форма. Согласно предложению 4 из § 4, n° 3, существует полупростое конечномерное представление σ алгебры $\mathfrak{g}$, такое, что ядро $\mathfrak{n}$ этого представления ортогонально к $\mathfrak{g}$ относительно β. Если β невырожденна, то $\mathfrak{n}=\{0\}$, т. е. σ точно.

д) $\Rightarrow$ е). Это очевидно.

е) $\Rightarrow$ ж). Если нильпотентный радикал алгебры $\mathfrak{g}$ равен нулю, $\mathscr{D}\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r}$ также равен нулю (§ 5, n° 3, теорема 1); так как $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] \subset \mathscr{D}\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r}$, то $\mathfrak{r}$ — центр алгебры $\mathfrak{g}$.

ж) $\Rightarrow$ а). Если $\mathfrak{r}$ — центр $\mathfrak{g}$, то присоединенное представление алгебры $\mathfrak{g}$ совпадает с присоединенным представлением алгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$, являющейся полупростой алгеброй Ли (§ 5; n° 2, предложение 3); это представление, таким образом, полупросто (теорема 2).

Замечание. Если алгебра Ли $\mathfrak{g}$ обладает разложением в виде произведения $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ коммутативной алгебры $\mathfrak{a}$ и полупростой алгебры $\mathfrak{b}$, то это разложение единственно. Более точно, центр $\mathfrak{g}$ равен произведению центров $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, т. е. равен $\mathfrak{a}$, а $\mathscr{D}\mathfrak{g}=\mathscr{D}\mathfrak{a} \times \mathscr{D}\mathfrak{b}=\mathfrak{b}$.

Следствие. а) *Всякое конечное произведение редуктивных алгебр Ли является редуктивной алгеброй.*

б) *Если $\mathfrak{g}$ — редуктивная алгебра Ли с центром $\mathfrak{c}$, то любой идеал в $\mathfrak{g}$ является ее прямым сомножителем, равным произведению своих пересечений с $\mathfrak{c}$ и $\mathscr{D}\mathfrak{g}$, и редуктивной алгеброй Ли.*

в) *Факторалгебра редуктивной алгебры Ли редуктивна.*

Утверждение а) следует, например, из условия в) предложения 5.

Предположим, что $\mathfrak{g}$ редуктивна. Пусть $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Так как присоединенное представление алгебры $\mathfrak{g}$ полупросто, то $\mathfrak{a}$ обладает дополнительным идеалом $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{g}$ равна $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$. Для любого $x \in \mathfrak{g}$ пусть $\rho(x)$ — ограничение $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ на $\mathfrak{a}$. Тогда ρ — полупростое представление $\mathfrak{g}$, обращающееся в нуль на $\mathfrak{b}$ и индуцирующее при факторизации присоединенное представление $\mathfrak{a}$. Таким образом, идеал $\mathfrak{a}$ редуктивен. Аналогично алгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, изоморфные друг другу, редуктивны. Наконец, пусть $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}'$ — центры $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$; имеем $\mathfrak{a} = \mathfrak{d} \times \mathscr{D}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} = \mathscr{D}\mathfrak{b} \times \mathfrak{d}'$, $\mathfrak{d} \times \mathfrak{d}' = \mathfrak{c}$, $\mathscr{D}\mathfrak{a} \times \mathscr{D}\mathfrak{b} = \mathscr{D}\mathfrak{g}$, откуда $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}) + (\mathfrak{a} \cap \mathscr{D}\mathfrak{g})$.

Предложение 6. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{r}$ — ее радикал, а $\mathfrak{s}$ — ее нильпотентный радикал.*

а) $\mathfrak{s} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] = \mathscr{D}\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r}$.

б) $\mathfrak{s}$ *есть пересечение ортогональных дополнений к $\mathfrak{g}$ относительно билинейных форм, ассоциированных с конечномерными представлениями алгебры $\mathfrak{g}$.*

Ясно, что $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] \subset \mathscr{D}\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r}$. По теореме 1 из § 5, n° 3, имеем $\mathscr{D}\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r} = \mathfrak{s}$. Пусть $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$ и f — канонический гомоморфизм $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}'$; тогда $f(\mathfrak{r})$ равен радикалу $\mathfrak{r}'$ алгебры $\mathfrak{g}'$ (следствие 3 предложения 2, n° 2), откуда $[\mathfrak{g}', \mathfrak{r}'] = \{0\}$ и, значит, $\mathfrak{r}'$ — центр $\mathfrak{g}'$. Следовательно (предложение 5), $\mathfrak{g}'$ обладает точным конечномерным полупростым представлением, откуда $\mathfrak{s} \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$. Утверждение а) доказано.

Пусть $\mathfrak{t}$ — пересечение ортогональных дополнений к $\mathfrak{g}$ относительно билинейных форм, ассоциированных с конечномерными представлениями $\mathfrak{g}$. Имеем $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{t}$ (§ 4, n° 3, предложение 4г)). С другой стороны, $\mathfrak{g}/\mathfrak{s}$ обладает точным конечномерным полупростым представлением, а потому (предложение 5) и конечномерным представлением ρ, ассоциированная билинейная форма которого невырожденна; рассматриваемое как представление алгебры $\mathfrak{g}$ ρ обладает невырожденной ассоциированной билинейной формой β на $\mathfrak{g}$, причем ортогональное дополнение к $\mathfrak{g}$ относительно β равно $\mathfrak{s}$, откуда $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{s}$. Поэтому $\mathfrak{t} = \mathfrak{s}$.

Даже в случае $\mathfrak{s} \neq \{0\}$ могут существовать инвариантные симметрические билинейные формы, невырожденные на $\mathfrak{g}$ (упражнение 18 в)). Такие формы, конечно, не ассоциированы ни с каким представлением $\mathfrak{g}$.

Следствие. *Пусть $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ — алгебры Ли, $\mathfrak{s}$ (соотв. $\mathfrak{s}'$) — нильпотентный радикал $\mathfrak{g}$ (соотв. $\mathfrak{g}'$) и f — гомоморфизм $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}'$.*

а) $\mathfrak{s}' = f(\mathfrak{s})$.

б) $\mathfrak{g}'$ *редуктивна тогда и только тогда, когда ядро f содержит $\mathfrak{s}$.*

В самом деле, если $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{r}'$ — радикалы $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$, то $\mathfrak{s}' = [\mathfrak{g}', \mathfrak{r}'] = [f(\mathfrak{g}), f(\mathfrak{r})] = f([\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]) = f(\mathfrak{s})$. Утверждение б) является непосредственным следствием а).

5. *Применение: один критерий полупростоты представлений*

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{r}$ — ее радикал, ρ — конечномерное представление $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}' = \rho(\mathfrak{g})$ и $\mathfrak{r}' = \rho(\mathfrak{r})$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

а) *ρ полупросто;*

б) *$\mathfrak{g}'$ редуктивна и ее центр состоит из полупростых эндоморфизмов;*

в) *$\mathfrak{r}'$ состоит из полупростых эндоморфизмов;*

г) *ограничение ρ на $\mathfrak{r}$ полупросто.*

а) $\Rightarrow$ б). Если ρ полупросто, то $\mathfrak{g}'$ редуктивна (предложение 5); ассоциативная алгебра, порожденная 1 и $\mathfrak{g}'$, полупроста (*Алг.*, гл. VIII, § 5, n° 1, предложение 3), поэтому и ее центр полупрост (*там же*, § 5, n° 9, предложение 12), значит элементы центра полупросты (там же, § 9, n° 1, предложение 2).

б) $\Rightarrow$ в). Если $\mathfrak{g}'$ редуктивна, то ее центр равен ее радикалу, т. е. $\mathfrak{r}'$, откуда и следует импликация б) $\Rightarrow$ в).

в) $\Rightarrow$ г). Предположим, что $\mathfrak{r}'$ состоит из полупростых эндоморфизмов. Так как $[\mathfrak{g}', \mathfrak{r}']$ состоит из нильпотентных эндоморфизмов (n° 4, предложение 6), то $[\mathfrak{g}', \mathfrak{r}'] = \{0\}$. Теперь импликация в) $\Rightarrow$ г) следует из *Алг.*, гл. VIII, § 9, n° 2, теорема 1.

г) $\Rightarrow$ а). Пусть $\mathfrak{s}$ — нильпотентный радикал $\mathfrak{g}$ и ρ' — ограничение ρ на $\mathfrak{r}$. Элементы из $\rho(\mathfrak{s})$ нильпотентны, следовательно, $\mathfrak{s}$ содержится в наибольшем идеале нильпотентности представления ρ'. Так как ρ' полупросто, то $\rho'(\mathfrak{s}) = \{0\}$ и $\mathfrak{g}'$ редуктивна (следствие предложения 6), так что $\mathfrak{g}' = \mathfrak{a}' \times \mathfrak{r}'$, где $\mathfrak{a}'$ полупроста (предложение 5). Пусть A' (соотв. R') — ассоциативная алгебра, порожденная 1 и $\mathfrak{a}'$ (соотв. $\mathfrak{r}'$). Она полупроста (*Алг.*, гл. VIII, § 5, n° 1, предложение 3), откуда $A' \otimes_K R'$ полупроста (*там же*, § 7, n° 6, следствие 4 теоремы 3). Поэтому ассоциативная алгебра, порожденная 1 и $\mathfrak{g}'$ и являющаяся факторалгеброй алгебры $A' \otimes_K R'$, полупроста, что и доказывает полупростоту представления ρ.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, а ρ и ρ' — ее полупростые представления конечной размерности. Тогда тензорное произведение представлений ρ и ρ' полупросто.*

Пусть $\mathfrak{r}$ — радикал $\mathfrak{g}$. Для $x \in \mathfrak{r}$ элементы $\rho(x)$ и $\rho'(x)$ полупросты (теорема 4), откуда $\rho(x) \otimes 1 + 1 \otimes \rho'(x)$ полупрост (*Алг.*, гл. VIII, § 9, следствие теоремы 1), вследствие чего тензорное произведение ρ и ρ' полупросто (теорема 4).

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, ρ — полупростое представление $\mathfrak{g}$ в конечномерном векторном пространстве V, T и S — тензорная и симметрическая алгебры пространства V, σ_T и σ_S — канонически связанные с ρ представления $\mathfrak{g}$ в T и S.*

Тогда σ_T и σ_S полупросты и, более точно, равны прямым суммам конечномерных неприводимых представлений.

Пусть T^n — однородная компонента T, состоящая из тензоров степени n. Это подпространство устойчиво относительно σ_T и представление, определенное σ_T в T^n, полупросто (следствие 1). Отсюда и следует утверждение о σ_T и, значит, о σ_S, являющемся факторпредставлением представления σ_T.

Следствие 3. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, а ρ и ρ' — два полупростых конечномерных представления $\mathfrak{g}$ в пространствах M и M'. Тогда представление $\mathfrak{g}$ в $\mathscr{L}_K(M, M')$, канонически индуцируемое представлениями ρ и ρ', полупросто.*

В самом деле, $\mathfrak{g}$-модуль $\mathscr{L}_K(M, M')$, канонически отождествляется с $\mathfrak{g}$-модулем $M^* \otimes_K M'$ (§ 3, n° 3, предложение 4), так что следствие 3 вытекает из следствия 1.

Следствие 4. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$ и ρ — полупростое представление $\mathfrak{g}$.*

а) *Ограничение ρ' представления ρ на $\mathfrak{a}$ полупросто.*

б) *Если ρ просто, то ρ' является суммой попарно изоморфных простых представлений.*

Факторизуя по ядру представления ρ, можно предполагать, что ρ точно. Тогда $\mathfrak{g}$ редуктивна. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$, где $\mathfrak{g}_1$ — центр $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}_2$ полупроста. Имеем $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2$, где $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{a}_2 \subset \mathfrak{g}_2$ и $\mathfrak{a}_1$ — центр $\mathfrak{a}$. Элементы из $\rho(\mathfrak{g}_1)$ и, в частности, элементы из $\rho(\mathfrak{a}_1)$ полупросты (теорема 4), т. е. представление ρ' полупросто (теорема 4). Утверждение а) доказано. Утверждение б) следует из а), если воспользоваться § 3, n° 1, следствие предложения 1.

6. Редуктивные подалгебры алгебры Ли

Определение 5. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$. Говорят, что $\mathfrak{h}$ редуктивна в $\mathfrak{g}$, если представление $x \mapsto \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ алгебры $\mathfrak{h}$ полупросто.*

Подпредставлением этого представления является присоединенное представление $\mathfrak{h}$. Следовательно, если $\mathfrak{h}$ редуктивна в $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{h}$ редуктивна. С другой стороны, $\mathfrak{h}$ редуктивна сама в себе тогда и только тогда, когда она просто редуктивна.

Предложение 7. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — ее редуктивная подалгебра, ρ — представление $\mathfrak{g}$ в векторном пространстве V и W — сумма конечномерных подпространств в V, являющихся простыми $\mathfrak{h}$-модулями. Тогда W устойчиво относительно $\rho(\mathfrak{g})$.*

Пусть W_0 — конечномерный простой $\mathfrak{h}$-подмодуль в V. Покажем, что для любого $x \in \mathfrak{g}$ выполняется $\rho(x)(W_0) \subset W$.

Обозначим через M векторное пространство $\mathfrak{g}$, рассматриваемое как $\mathfrak{h}$-модуль, задаваемый представлением $x \mapsto \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ подалгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$. Тогда $M \otimes_K W_0$ — полупростой $\mathfrak{h}$-модуль (следствие 1 теоремы 4). Пусть θ есть K-линейное отображение $M \otimes_K W_0$ в V, определенное правилом $\theta(x \otimes w) = \rho(x) w$. Это гомоморфизм $\mathfrak{h}$-модулей, ибо если $y \in \mathfrak{h}$, то

$$\theta([y, x] \otimes w + x \otimes \rho(y) w) = \rho([y, x]) w + \rho(x) \rho(y) w = \\ = \rho(y) \rho(x) w = \rho(y) \theta(x \otimes w).$$

Поэтому $\theta(M \otimes_K W_0)$ — конечномерный полупростой $\mathfrak{h}$-модуль. Значит, $\theta(M \otimes_K W_0) \subset W$, т. е. $\rho(x)(W_0) \subset W$ для любого $x \in \mathfrak{g}$.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — редуктивная подалгебра в $\mathfrak{g}$ и ρ — конечномерное полупростое представление $\mathfrak{g}$. Тогда ограничение ρ на $\mathfrak{h}$ полупросто.*

В самом деле, достаточно изучить случай простого ρ. Примем обозначения V, W предложения 4. Пусть W_1 — подпространство в V, минимальное среди ненулевых подпространств, устойчивых относительно $\rho(\mathfrak{h})$. Имеем $W_1 \subset W$, откуда $W \neq \{0\}$ и, следовательно, $W = V$.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — редуктивная подалгебра в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{k}$ — редуктивная подалгебра в $\mathfrak{h}$. Тогда $\mathfrak{k}$ — редуктивная подалгебра в $\mathfrak{g}$.*

В самом деле, представление $x \mapsto \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ алгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ полупросто, следовательно, его ограничение на $\mathfrak{k}$ полупросто (следствие 1).

7. Примеры полупростых алгебр Ли

Предложение 8. *Пусть V — конечномерное векторное пространство. Тогда алгебра Ли $\mathfrak{gl}(V)$ редуктивна, ее центр равен множеству гомотетий пространства V, а производная алгебра равна $\mathfrak{sl}(V)$, причем эта последняя алгебра полупроста.*

Тождественное представление алгебры $\mathfrak{gl}(V)$ неприводимо, поэтому она редуктивна и, значит, равна прямой сумме своего центра и своей производной алгебры. Центр $\mathfrak{c}$ является множеством гомотетий (*Алг.*, гл. II, § 2, n° 5, следствие 1 предложения 5). Ясно, что $\mathscr{D}(\mathfrak{gl}(V)) \subset \mathfrak{sl}(V)$. Так как $\mathfrak{sl}(V) \cap \mathfrak{c} = \{0\}$, то $\mathscr{D}(\mathfrak{gl}(V)) = \mathfrak{sl}(V)$. Поэтому $\mathfrak{sl}(V)$ полупроста.

Пример. Отождествим $\mathfrak{sl}(K^2)$ с алгеброй матриц порядка 2 со следом нуль. Положим

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тогда X, Y, H образуют базис $\mathfrak{sl}(K^2)$, причем

$$[\mathrm{H}, \mathrm{X}] = 2\mathrm{X}, \quad [\mathrm{H}, \mathrm{Y}] = -2\mathrm{Y}, \quad [\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = \mathrm{H}.$$

Так как алгебра размерности 1 или 2 является полупростой (n° 1, замечание 1), то $\mathfrak{sl}(K^2)$ проста. Фактически $\mathfrak{sl}(V)$ проста, лишь только $\dim V \geqslant 2$, как мы увидим позднее (см. также упражнения 21 и 24).

Предложение 9. *Пусть V есть n-мерное векторное пространство над K, β — симметрическая* (соотв. *знакопеременная*) *невырожденная билинейная форма на V. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, состоящая из $x \in \mathfrak{gl}(V)$, таких, что $\beta(xm, m') + \beta(m, xm') = 0$ для любых m, m' из V. Тогда $\mathfrak{g}$ редуктивна; она полупроста, за исключением случая, когда β — симметрическая форма и $n = 2$.*

Для любого $u \in \mathfrak{gl}(V)$ обозначим через u^* элемент, сопряженный к нему относительно β; имеем $\mathrm{Tr}(u) = \mathrm{Tr}(u^*)$, согласно предложению 7 из *Алг.*, гл. IX, § 1, n° 8. Условие $\beta(um, m') + \beta(m, um') = 0$ для любых m, m' из V означает, что $u + u^* = 0$. В частности, если $v \in \mathfrak{gl}(V)$, то $(v - v^*)^* = v^* - v$, т. е. $v - v^* \in \mathfrak{g}$. Пусть теперь u — элемент из $\mathfrak{g}$, ортогональный к $\mathfrak{g}$ относительно билинейной формы φ, ассоциированной с тождественным представлением $\mathfrak{g}$. Для любого $v \in \mathfrak{gl}(V)$ имеем $\mathrm{Tr}\, u(v - v^*) = 0$, откуда

$$\mathrm{Tr}(uv) = \mathrm{Tr}(uv^*) = \mathrm{Tr}(uv^*)^* = \mathrm{Tr}(vu^*) = -\mathrm{Tr}(vu) = -\mathrm{Tr}(uv),$$

поэтому $\mathrm{Tr}(uv) = 0$. Отсюда следует, что $u = 0$, так что φ невырожденна. Поэтому $\mathfrak{g}$ редуктивна (предложение 5). Осталось показать, что центр $\mathfrak{g}$ равен нулю (за исключением случая, когда β симметрическая и $n = 2$). Расширяя поле скаляров, можно предполагать, что K алгебраически замкнуто.

а) Если β — симметрическая форма, то ее можно отождествить с билинейной формой на K^n с матрицей I_n в каноническом базисе (*Алг.*, гл. IX, § 6, следствие 1 теоремы 1). В этом случае $\mathfrak{g}$ отождествляется с алгеброй Ли кососимметрических матриц (§ 3, n° 4, пример 1). Пусть $\mathrm{U} = (u_{ij}) \in \mathfrak{g}$, и предположим, что U коммутирует с матрицей $(v_{ij}) \in \mathfrak{g}$, в которой все элементы нулевые, за исключением $v_{i_0 j_0}$ и $v_{j_0 i_0}$ ($i_0 \neq j_0$), равных соответственно 1 и -1. Находим $u_{i_0 j} = u_{j_0 j} = u_{i i_0} = u_{i j_0} = 0$ для $i \neq i_0$, j_0 и $j \neq i_0$, j_0. Если $n > 2$, то для любых не равных индексов i_0 и j существуют различные индексы i и j_0, такие, что $i \neq i_0$, $j_0 \neq j$, $j_0 \neq i_0$; отсюда $u_{i_0 j_0} = 0$. Это доказывает, что произвольный элемент центра алгебры $\mathfrak{g}$ равен нулю.

б) Если β — знакопеременная форма и $n = 2m$, то можно отождествить β с билинейной формой на K^{2m} с матрицей

$\begin{pmatrix} 0 & I_m \\ -I_m & 0 \end{pmatrix}$ в каноническом базисе (*Алг.*, гл. IX, § 5, следствие 1 теоремы 1). В этом случае $\mathfrak{g}$ отождествляется с алгеброй Ли матриц вида $U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, где $D = -{}^tA$, B и C симметрические (A, B, C, D из $\mathbf{M}_m(K)$) (§ 3, n° 4, *пример* 1). Допустим вначале, что U коммутирует с матрицей $\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & -{}^tX \end{pmatrix}$, где $X \in \mathbf{M}_m(K)$. Выполняются равенства $AX = XA$, $CX = -{}^tXC$, $XB = -B \cdot {}^tX$; так как эти равенства должны выполняться для любого X, то выводим отсюда, что A — скалярная матрица λI_m. Пусть теперь U коммутирует с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & Y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где Y—симметрическая матрица из $\mathbf{M}_m(K)$. Имеем $\lambda Y = YC = CY = 0$. Это доказывает, прежде всего, что $\lambda = 0$. Кроме того, для любого $X \in \mathbf{M}_m(K)$ матрица $X + {}^tX$ симметрическая, откуда должно получиться $XC = -{}^tXC$. Вместе с равенством $CX = -{}^tXC$, полученным выше, это показывает, что C коммутирует с любым элементом из $\mathbf{M}_m(K)$, вследствие чего C — скалярная матрица, а значит, нулевая, так как $YC = 0$. Показано, таким образом, что $B = 0$.

Когда β — симметрическая форма и $n = 2$, алгебра $\mathfrak{g}$ имеет размерность 1 и, значит, коммутативна. Для других случаев см. упражнения 25 и 26.

8. *Теорема Леви — Мальцева*

Пусть E — полное нормированное пространство над $\mathbf{R}$ и u — его непрерывный эндоморфизм. Мы видели (*Теор. функц. действ. перем.*, гл. IV, § 2, n° 6), что последовательность $\frac{u^n}{n!}$ суммируема в $\mathscr{L}(E)$, и положили

$$e^u = \exp u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}.$$

Пусть теперь E — векторное пространство над полем K и u — *нильпотентный* эндоморфизм E. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$ имеет лишь конечное число ненулевых членов, что позволяет положить

$$e^u = \exp u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}.$$

Это определение согласуется с предыдущим, если $K=\mathbf{R}$ и E — полное нормированное пространство. Если v — другой нильпотентный эндоморфизм E, перестановочный с u, то

$$e^u e^v = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}\right)\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{v^p}{p!}\right) = \sum_{n,\ p=0}^{\infty} \frac{u^n v^p}{n!\,p!} =$$

$$= \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!}\left(\sum_{n+p=q} \binom{q}{n} u^n v^p\right) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{1}{q!}(u+v)^q = e^{u+v}. \qquad (3)$$

В частности, $e^u e^{-u} = e^{-u} e^u = e^0 = 1$, откуда e^u — всегда автоморфизм E.

Если, кроме того, E — алгебра (не обязательно ассоциативная) и u — *дифференцирование* (нильпотентное) алгебры E, то e^u — *автоморфизм* алгебры E. В самом деле, если $x,\ y \in E$, то

$$u^p(xy) = \sum_{r+s=p} \binom{p}{r} u^r(x)\, u^s(y)$$

для любого целого $p \geqslant 0$ (формула Лейбница). Из нее следует, что

$$e^u(xy) = \sum_{p\geqslant 0} \frac{1}{p!} u^p(xy) = \sum_{p\geqslant 0} \sum_{r+s=p} \frac{u^r(x)\, u^s(y)}{r!\,s!} =$$

$$= \sum_{r,\ s=0}^{\infty} \frac{u^r(x)\, u^s(y)}{r!\,s!} = e^u(x)\, e^u(y),$$

что и требовалось доказать.

Пусть теперь $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Если x принадлежит нильпотентному радикалу $\mathfrak{g}$, то дифференцирование $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ алгебры $\mathfrak{g}$ нильпотентно. Поэтому можно ввести следующее

Определение 6. *Специальным автоморфизмом алгебры $\mathfrak{g}$ называется автоморфизм вида $e^{\mathrm{ad}\, x}$, где x принадлежит нильпотентному радикалу алгебры $\mathfrak{g}$.*

Ясно, что любой идеал в $\mathfrak{g}$ устойчив относительно специального автоморфизма.

Определение 7. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{r}$ — ее радикал. Подалгеброй Леви алгебры $\mathfrak{g}$ называется любая подалгебра в $\mathfrak{g}$, дополняющая в ней радикал $\mathfrak{r}$.*

Подалгебра Леви изоморфна $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$, вследствие чего полупроста. Так как любая полупростая подалгебра пересекается с радикалом по $\{0\}$, то если $\mathfrak{h}$ полупроста и $\mathfrak{g}=\mathfrak{r}+\mathfrak{h}$, то $\mathfrak{h}$ — подалгебра Леви; значит, образ подалгебры Леви при сюръективном гомоморфизме является подалгеброй Леви.

Теорема 5 (Леви — Мальцев). *Любая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ обладает подалгеброй Леви $\mathfrak{s}$. Любая подалгебра Леви алгебры $\mathfrak{g}$ переводится в $\mathfrak{s}$ специальным автоморфизмом этой алгебры.*

Пусть $\mathfrak{r}$ — радикал алгебры $\mathfrak{g}$. Рассмотрим сначала два частных случая.

а) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] = \{0\}$.

Согласно предложению 5, $\mathfrak{g}$ является тогда произведением своего центра $\mathfrak{r}$ и подалгебры $\mathscr{D}\mathfrak{g}$, являющейся полупростой. Поэтому $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ — подалгебра Леви. Более того, если $\mathfrak{s}'$ — полупростая подалгебра, то $\mathfrak{s}' = \mathscr{D}\mathfrak{s}'$ (теорема 1), поэтому $\mathfrak{s}' \subset \mathscr{D}\mathfrak{g}$, т. е. $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ — единственная подалгебра Леви алгебры $\mathfrak{g}$.

б) $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] \neq \{0\}$ и имеется лишь два идеала $\mathfrak{g}$, содержащихся в $\mathfrak{r}$: $\mathfrak{r}$ и $\{0\}$.

Тогда $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}] = \mathfrak{r}$, $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] = \{0\}$ и центр $\mathfrak{g}$ равен нулю. Пусть M (соотв. N) — подпространство в $\mathscr{L}(\mathfrak{g})$, состоящее из линейных отображений $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{r}$, ограничение которых на $\mathfrak{r}$ является гомотетией (соотв. нулевым отображением); N имеет коразмерность 1 в M. Если $m \in M$, то через $\lambda(m)$ обозначим коэффициент гомотетии, индуцируемой m в $\mathfrak{r}$. Пусть σ — представление $\mathfrak{g}$ в $\mathscr{L}(\mathfrak{g})$, канонически индуцируемое присоединенным представлением; напомним, что $\sigma(x) . u = [\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x, u]$ для любого $x \in \mathfrak{g}$ и $u \in \mathscr{L}(\mathfrak{g})$.

$$\begin{array}{c} \mathscr{L}(\mathfrak{g}) \\ \cup \\ M \\ \cup \\ N \\ \cup \\ P \end{array}$$

Ясно, что $\sigma(x) M \subset N$ для любого $x \in \mathfrak{g}$. Более того, если $x \in \mathfrak{r}$, $y \in \mathfrak{g}$, $u \in M$, то

$$(\sigma(x) . u)(y) = [x, u(y)] - u([x, y]) = -\lambda(u)[x, y], \tag{4}$$

так как $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] = \{0\}$; (4) можно переписать в виде

$$\sigma(x) . u = -\mathrm{ad}(\lambda(u) . x). \tag{5}$$

Так как центр $\mathfrak{g}$ равен нулю, то отображение $x \mapsto \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ определяет биекцию φ радикала $\mathfrak{r}$ на подпространство P пространства $\mathscr{L}(\mathfrak{g})$. Это подпространство устойчиво относительно $\sigma(\mathfrak{g})$ и содержится в N, так как $\mathfrak{r}$ — коммутативный идеал, а (5) показывает, что $\sigma(x)(M) \subset P$ для любого $x \in \mathfrak{r}$. Представление $\mathfrak{g}$ в $M/P = V$, индуцируемое представлением σ, является, таким образом, нулевым на $\mathfrak{r}$ и определяет представление σ' полупростой алгебры $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ в V. Для любого $y \in \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ пространство $\sigma'(y)(V)$ содержится в N/P, имеющем коразмерность 1 в V. Следовательно (n° 2, лемма 3), существует элемент $u_0 \in M$, такой, что $\lambda(u_0) = -1$ и $\sigma(x) . u_0 \in P$ для любого $x \in \mathfrak{g}$. Отображение $x \mapsto \varphi^{-1}(\sigma(x) . u_0)$ является линейным отображением $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{r}$. Согласно (5), его ограничение на $\mathfrak{r}$ является тождественным отображением $\mathfrak{r}$. Поэтому его ядро есть подпространство $\mathfrak{s}$, дополняющее $\mathfrak{r}$ в $\mathfrak{g}$. Так как $\mathfrak{s}$ — это множество $x \in \mathfrak{g}$, таких,

что $\sigma(x).u_0=0$, то $\mathfrak{s}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$ и, следовательно, подалгебра Леви алгебры $\mathfrak{g}$.

Пусть $\mathfrak{s}'$ — вторая подалгебра Леви. Для любого $x \in \mathfrak{s}'$ пусть $h(x)$ — единственный элемент из $\mathfrak{r}$, такой, что $x+h(x) \in \mathfrak{s}$. Так как $\mathfrak{s}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{r}$ — коммутативный идеал, то для любых x, y из $\mathfrak{s}'$ имеем

$$[x+h(x),\ y+h(y)]=[x,\ y]+[x,\ h(y)]+[h(x),\ y] \in \mathfrak{s},$$

откуда

$$h([x,\ y])=(\operatorname{ad} x).h(y)-(\operatorname{ad} y).h(x).$$

По замечанию 2 из n° 2 существует элемент $a \in \mathfrak{r}$, такой, что $h(x)=-[x,\ a]$ для любого $x \in \mathfrak{s}'$. Тогда

$$x+h(x)=x+[a,\ x]=(1+\operatorname{ad} a).x. \tag{6}$$

Так как идеал $\mathfrak{r}$ коммутативный, то $(\operatorname{ad} a)^2=0$, т. е. $1+\operatorname{ad} a=e^{\operatorname{ad} a}$. Поскольку $\mathfrak{r}=[\mathfrak{g},\ \mathfrak{r}]$, автоморфизм $e^{\operatorname{ad} a}$ является специальным. Согласно (6), этот автоморфизм переводит $\mathfrak{s}'$ в $\mathfrak{s}$.

в) Общий случай.

Будем вести доказательство индукцией по размерности радикала n. В случае $n=0$ доказывать нечего и потому предполагаем, что теорема верна для алгебр Ли, размерность радикала которых $<\dim \mathfrak{r}$. Согласно а), можно также рассматривать лишь случай $[\mathfrak{g},\ \mathfrak{r}] \neq \{0\}$. Так как алгебра $[\mathfrak{g},\ \mathfrak{r}]$ нильпотентна (n° 4, предложение 6), ее центр $\mathfrak{c}$ отличен от $\{0\}$. Пусть $\mathfrak{m}$ — минимальный ненулевой идеал в $\mathfrak{g}$, содержащийся в $\mathfrak{c}$. Если $\mathfrak{m}=\mathfrak{r}$, то мы пришли к случаю б). Пусть тогда $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{r}$, и пусть f — каноническое отображение $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}'=\mathfrak{g}/\mathfrak{m}$. Радикал $\mathfrak{g}'$ есть $\mathfrak{r}'=\mathfrak{r}/\mathfrak{m}$. По предположению индукции $\mathfrak{g}'$ обладает подалгеброй Леви $\mathfrak{h}'$. В этом случае $\mathfrak{h}=f^{-1}(\mathfrak{h}')$ является подалгеброй в $\mathfrak{g}$, содержащей $\mathfrak{m}$ и такой, что $\mathfrak{h}/\mathfrak{m}=\mathfrak{h}'$ полупроста и, следовательно, $\mathfrak{m}$ — ее радикал. По предположению индукции $\mathfrak{h}=\mathfrak{m}+\mathfrak{s}$, где $\mathfrak{s}$ — полупростая алгебра. Теперь равенство $\mathfrak{g}'=\mathfrak{r}'+\mathfrak{h}'$ влечет за собой $\mathfrak{g}=\mathfrak{r}+\mathfrak{h}=\mathfrak{r}+\mathfrak{m}+\mathfrak{s}=\mathfrak{r}+\mathfrak{s}$, вследствие чего $\mathfrak{s}$ — подалгебра Леви в $\mathfrak{g}$.

Пусть $\mathfrak{s}'$ — вторая подалгебра Леви в $\mathfrak{g}$. Тогда $f(\mathfrak{s})$ и $f(\mathfrak{s}')$ — две подалгебры Леви в $\mathfrak{g}'$ и по предположению индукции существует элемент $a' \in [\mathfrak{g}',\ \mathfrak{r}']$, такой, что $e^{\operatorname{ad} a'}(f(\mathfrak{s}'))=f(\mathfrak{s})$. Если $a \in [\mathfrak{g},\ \mathfrak{r}]$ таково, что $f(a)=a'$, то отсюда следует, что

$$\mathfrak{s}_1=e^{\operatorname{ad} a}(\mathfrak{s}') \subset \mathfrak{m}+\mathfrak{s}=\mathfrak{h}.$$

Итак, $\mathfrak{s}_1$ и $\mathfrak{s}$ — две подалгебры Леви в $\mathfrak{h}$, и существует по предположению индукции $b \in \mathfrak{m}$, такой, что $e^{\operatorname{ad} b}(\mathfrak{s}_1)=\mathfrak{s}$. Поэтому $\mathfrak{s}=e^{\operatorname{ad} b}.e^{\operatorname{ad} a}(\mathfrak{s}')$. Наконец, так как $\mathfrak{m}$ лежит в центре $[\mathfrak{g},\ \mathfrak{r}]$, то $e^{\operatorname{ad} b}.e^{\operatorname{ad} a}=e^{\operatorname{ad}(b+a)}$ и $b+a \in [\mathfrak{g},\ \mathfrak{r}]$, что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Пусть* $\mathfrak{s}$ — *подалгебра Леви в* $\mathfrak{g}$ *и* $\mathfrak{h}$ — *полупростая подалгебра в* $\mathfrak{g}$.

а) *Существует специальный автоморфизм* $\mathfrak{g}$, *переводящий* $\mathfrak{h}$ *в некоторую подалгебру в* $\mathfrak{s}$.

б) $\mathfrak{h}$ *содержится в подалгебре Леви алгебры* $\mathfrak{g}$.

Пусть $\mathfrak{r}$ — радикал $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{a}=\mathfrak{h}+\mathfrak{r}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$. Тогда $\mathfrak{a}/\mathfrak{r}$ полупроста и $\mathfrak{r}$ разрешима, т. е. $\mathfrak{r}$ — радикал $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{h}$ — подалгебра Леви в $\mathfrak{a}$. С другой стороны, $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{s}=\mathfrak{h}'$ — подалгебра, дополняющая $\mathfrak{r}$ в $\mathfrak{a}$, т. е. являющаяся подалгеброй Леви в $\mathfrak{a}$. В этом случае существует (теорема 5) элемент $a\in[\mathfrak{a},\mathfrak{r}]$, такой, что $e^{\mathrm{ad}_{\mathfrak{a}}a}$ переводит $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{h}'$. Имеем $a\in[\mathfrak{g},\mathfrak{r}]$; $e^{\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}a}$ переводит $\mathfrak{h}$ в некоторую подалгебру алгебры $\mathfrak{s}$ и $e^{-\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}a}(\mathfrak{s})$ — подалгебра Леви в $\mathfrak{g}$, содержащая $\mathfrak{h}$.

Следствие 2. *Для того чтобы подалгебра* $\mathfrak{h}$ *алгебры* $\mathfrak{g}$ *была подалгеброй Леви этой алгебры, необходимо и достаточно, чтобы* $\mathfrak{h}$ *была максимальной полупростой подалгеброй в* $\mathfrak{g}$.

Это немедленно вытекает из следствия 1.

Следствие 3. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *алгебра Ли,* $\mathfrak{m}$ — *идеал в* $\mathfrak{g}$, *такой, что* $\mathfrak{g}/\mathfrak{m}$ *полупроста. Тогда* $\mathfrak{g}$ *обладает подалгеброй, дополняющей* $\mathfrak{m}$ *в* $\mathfrak{g}$. *Иначе говоря, любое расширение полупростой алгебры несущественно.*

Пусть $\mathfrak{s}$ — подалгебра Леви алгебры $\mathfrak{g}$ (теорема 5). Ее канонический образ в $\mathfrak{g}/\mathfrak{m}$, являющийся подалгеброй Леви, равен $\mathfrak{g}/\mathfrak{m}$, и, значит, $\mathfrak{g}=\mathfrak{s}+\mathfrak{m}$. Тогда идеал алгебры $\mathfrak{s}$, дополняющий в $\mathfrak{s}$ идеал $\mathfrak{m}\cap\mathfrak{s}$, является подалгеброй в $\mathfrak{g}$, дополняющей $\mathfrak{m}$ в $\mathfrak{g}$.

Следствие 4. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *алгебра Ли,* $\mathfrak{r}$ — *ее радикал,* $\mathfrak{s}$ — *подалгебра Леви в* $\mathfrak{g}$ *и* $\mathfrak{m}$ — *идеал в* $\mathfrak{g}$. *Тогда* $\mathfrak{m}$ *является прямой суммой* $\mathfrak{m}\cap\mathfrak{r}$, *радикала идеала* $\mathfrak{m}$, *и* $\mathfrak{m}\cap\mathfrak{s}$, *его подалгебры Леви.*

Известно, что $\mathfrak{m}\cap\mathfrak{r}$ — радикал $\mathfrak{m}$ (§ 5, n° 5, следствие 3 предложения 5). Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Леви в $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{s}'$ — подалгебра Леви в $\mathfrak{g}$, содержащая $\mathfrak{h}$ (следствие 1). Алгебра $\mathfrak{m}\cap\mathfrak{s}'$ — идеал в $\mathfrak{s}'$, следовательно, она полупроста и содержит $\mathfrak{h}$, отсюда $\mathfrak{m}\cap\mathfrak{s}'$ равна $\mathfrak{h}$. Поэтому $\mathfrak{m}$ — прямая сумма $\mathfrak{m}\cap\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{m}\cap\mathfrak{s}'$. Существует специальный автоморфизм, переводящий $\mathfrak{s}'$ в $\mathfrak{s}$; этот автоморфизм сохраняет $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{m}$; поэтому $\mathfrak{m}$ равен прямой сумме $\mathfrak{m}\cap\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{m}\cap\mathfrak{s}$ и $\mathfrak{m}\cap\mathfrak{s}$ — подалгебра Леви в $\mathfrak{m}$.

9. Теорема об инвариантах

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, ρ — представление $\mathfrak{g}$ в векторном пространстве M. Для класса δ неприводимых представлений $\mathfrak{g}$ пусть M_δ — изотипная компонента типа δ пространства M. Подпространство M_0-инвариантных элементов из M есть не что

иное, как M_{δ_0}, где δ_0 обозначает класс нулевого представления $\mathfrak{g}$ в пространстве размерности 1.

Лемма 4. *Пусть* ρ, σ, τ — *представления алгебры* $\mathfrak{g}$ *в векторных пространствах* M, N, P. *Предположим, что задано* K-*билинейное отображение* $(m, n) \mapsto m \cdot n$ *множества* $M \times N$ *в* P, *такое, что* $(\rho(x) m) \cdot n + m \cdot (\sigma(x) n) = \tau(x)(m \cdot n)$ *для любых* $m \in M$, $n \in N$, $x \in \mathfrak{g}$.

а) *Если* $m_0 \in M_0$, *то отображение* $n \mapsto m_0 \cdot n$ *является гомоморфизмом* $\mathfrak{g}$-*модулей*.

б) *Если* $n \in N_\delta$, *то* $m_0 \cdot n \in P_\delta$.

в) *Если* M — *алгебра* (*не обязательно ассоциативная*), $\rho(x)$ — *дифференцирование* M, *то* M_0 — *подалгебра в* M *и каждая компонента* M_δ *является левым и правым* M_0-*модулем*.

Для любых $m_0 \in M_0$, $n \in N$ и $x \in \mathfrak{g}$ имеем

$$\tau(x)(m_0 \cdot n) = m_0 \cdot (\sigma(x) n),$$

откуда следует а). Утверждение б) следует из а) (*Алг.*, гл. VIII, § 3, n° 4, предложение 10). Если же $N = P = M$, $\sigma = \tau = \rho$, то утверждение в) является частным случаем утверждения б).

Лемма 5. *Предположим, кроме того, что* σ *и* τ *полупросты, т. е.* N (соотв. P) — *прямая сумма* N_δ (соотв. P_δ). *Для любого* $n \in N$ (соотв. $p \in P$) *пусть* $n^\natural$ (соотв. $p^\natural$) — *его компонента в* N_0 (соотв. P_0). *Пусть* $m_0 \in M_0$. *Тогда для любого* $n \in N$ *имеем* $(m_0 \cdot n)^\natural = m_0 \cdot n^\natural$.

По линейности достаточно рассмотреть случай $n \in N_\delta$. Если $\delta \neq \delta_0$, то $n^\natural = 0$ и $m_0 \cdot n \in P_\delta$ (лемма 4), откуда $(m_0 \cdot n)^\natural = 0 = m_0 \cdot n^\natural$. Если $\delta = \delta_0$, то $n^\natural = n$ и $m_0 \cdot n \in P_0$ (лемма 4), поэтому $(m_0 \cdot n)^\natural = m_0 \cdot n = m_0 \cdot n^\natural$.

Теорема 6. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *алгебра Ли*, V — *полупростой* $\mathfrak{g}$-*модуль конечной размерности над* K, S — *симметрическая алгебра пространства* V *и* x_S — *дифференцирование* S, *продолжающее* x_V (*так что* $x \mapsto x_S$ — *представление* $\mathfrak{g}$ *в* S).

а) *Алгебра* S_0 *инвариантов в* S *является конечно порожденной*.

б) *Для каждого класса* δ *конечномерных неприводимых представлений пусть* S_δ — *изотипная компонента* S *типа* δ. *Тогда* S_δ *является* S_0-*модулем конечного типа*.

Пусть $\overline{S} \subset S$ — идеал в S, состоящий из элементов алгебры S без свободного члена. Пусть I — идеал в S, порожденный $S_0 \cap \overline{S}$, и $(s_1, s_2, \ldots, s_p)$ — конечная система образующих *идеала* I (*Комм. алг.*, гл. III, § 1). Можно предполагать, что s_i принадлежат $S_0 \cap \overline{S}$ и однородны (в самом деле, x_S сохраняют степень,

поэтому каждая компонента S_δ — градуированный подмодуль). Пусть S_1 — подалгебра в S, порожденная 1 и s_i. Имеем $S_1 \subset S_0$. Покажем, что $S_1 = S_0$. Для этого покажем, что любой однородный элемент s из S_0 лежит в S_1, причем доказательство будем вести индукцией по степени n элемента s. Если $n = 0$, то наше утверждение очевидно. Предположим, далее, что $n > 0$ и что наше утверждение доказано, когда степень s меньше n. Так как $s \in I$, то $s = \sum_{i=1}^{p} s_i s'_i$, где s'_i — элементы из S, которые можно предполагать однородными, причем $\deg(s'_i) = \deg(s) - \deg(s_i) < n$. Применима лемма 5, ибо $\mathfrak{g}$-модуль S полупрост (n° 5, следствие 2 теоремы 4); в обозначениях этой леммы имеем

$$s = s^\natural = \sum_{i=1}^{p} (s_i s'_i)^\natural = \sum_{i=1}^{p} s_i s'^\natural_i.$$

Элементы $s'^\natural_i$ суть однородные элементы из S_0, степень которых $< n$ (так как каждая компонента S_δ — это градуированный модуль). По предположению индукции они лежат в S_1. Отсюда $s \in S_1$, что и доказывает утверждение а).

Рассмотрим теперь конечномерное неприводимое представление $\mathfrak{g}$ класса δ в пространстве M. Пусть $L = \mathscr{L}_K(M, S)$. Для любого $s \in S$ и любого $f \in L$ пусть sf — элемент L, определенный формулой $(sf)(m) = s \,.\, f(m)$ $(m \in M)$; таким образом, на L введена структура S-модуля конечного типа, ибо M конечномерно над K; вследствие этого L — нётеров S-модуль, так как кольцо S нётерово. Кроме того, L канонически наделено структурой $\mathfrak{g}$-модуля. Для любого целого $n \geqslant 0$ пусть S^n — множество однородных элементов степени n алгебры S; тогда $\mathfrak{g}$-модуль $\mathscr{L}_K(M, S^n)$ полупрост (n° 5, следствие 3 теоремы 4) и, значит, полупрост $\mathfrak{g}$-модуль L. С другой стороны, для $s \in S$, $f \in L$, $x \in \mathfrak{g}$ и $m \in M$ имеем:

$$\begin{aligned}(x_L(sf))(m) &= x_S((sf)(m)) - (sf)(x_M m) = \\ &= x_S(s \,.\, f(m)) - s \,.\, f(x_M m) = \\ &= (x_S s) \,.\, (f(m)) = s \,.\, (x_S f(m)) - s \,.\, f(x_M m) = \\ &= ((x_S s) f)(m) + (s(x_L f))(m),\end{aligned}$$

т. е. $x_L(sf) = (x_S s) f + s(x_L f)$. Теперь мы сможем применить лемму 5.

Подмножество L_0 инвариантных элементов из L есть не что иное, как множество гомоморфизмов $\mathfrak{g}$-модуля M в $\mathfrak{g}$-модуль S. Поэтому если обозначить через φ канонический гомоморфизм $M \otimes_K L$ на S, то $\varphi(M \otimes_K L_0) = S_\delta$. Так как, очевидно, φ — гомоморфизм S-модулей, то достаточно показать, что L_0 есть

S_0-модуль конечного типа. Пусть через J обозначен S-подмодуль в L, порожденный L_0. Так как L — нётеров S-модуль, то существует конечная последовательность $(f_1, \ldots, f_q)$ элементов из L_0, порождающих S-модуль J. Пусть L_1 есть S_0-модуль, порожденный $f_1, \ldots, f_q$. Имеем $L_1 \subset L_0$. Кроме того, если $f \in L_0$, то $f = \sum_{i=1}^{q} s_i f_i$ при $s_i \in S$ для любого i. Поэтому, используя лемму 5 вместе с обозначениями, принятыми там, получим

$$f = f^{\natural} = \left(\sum_{i=1}^{q} s_i f_i\right)^{\natural} = \sum_{i=1}^{q} s_i^{\natural} f_i \in L_1.$$

Отсюда $L_0 = L_1$, так что L_0 является S_0-модулем конечного типа.

10. Замена поля скаляров

Пусть K_1 — коммутативное расширение поля K. Для того чтобы алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над K была полупростой, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{g}_{(K_1)}$ была полупростой; в самом деле, форма Киллинга β_1 алгебры $\mathfrak{g}_{(K_1)}$ получается из формы Киллинга β алгебры $\mathfrak{g}$ расширением поля скаляров K до K_1; поэтому β_1 невырожденна тогда и только тогда, когда β невырожденна (*Алг.*, гл. IX, n° 4, следствие предложения 3).

Если $\mathfrak{g}_{(K_1)}$ проста, то $\mathfrak{g}$ полупроста по предыдущему, и, кроме того, она не может быть произведением двух ненулевых идеалов, т. е. проста. Напротив, если $\mathfrak{g}$ — простая алгебра, то $\mathfrak{g}_{(K_1)}$ (являющаяся полупростой алгеброй) может не быть простой (упражнения 17 и 25б)).

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{r}$ — ее радикал. Тогда $\mathfrak{r}_{(K_1)}$ — радикал $\mathfrak{g}_{(K_1)}$ (§ 5, n° 6). Следовательно, если $\mathfrak{s}$ — нильпотентный радикал $\mathfrak{g}$, то нильпотентный радикал $\mathfrak{g}_{(K_1)}$ равен $[\mathfrak{g}_{(K_1)}, \mathfrak{r}_{(K_1)}] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]_{(K_1)} = \mathfrak{s}_{(K_1)}$. Отсюда следует, что $\mathfrak{g}$ редуктивна тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}_{(K_1)}$ редуктивна.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, а $\mathfrak{h}$ — подалгебра. Напомним, что представление алгебры $\mathfrak{h}$ полупросто тогда и только тогда, когда представление алгебры $\mathfrak{h}_{(K_1)}$, которое получается расширением до K_1 поля скаляров, полупросто. Поэтому $\mathfrak{h}$ редуктивна в $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{h}_{(K_1)}$ редуктивна в $\mathfrak{g}_{(K_1)}$.

Пусть теперь K_0 — подполе в K, такое, что степень $[K : K_0]$ конечна. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и $\mathfrak{g}_0$ — (конечномерная) алгебра Ли, получающаяся из $\mathfrak{g}$ сужением кольца скаляров K до K_0. Любой коммутативный идеал в $\mathfrak{g}$ является коммутативным

идеалом в $\mathfrak{g}_0$; обратно, если $\mathfrak{a}_0$ — коммутативный идеал в $\mathfrak{g}_0$, то наименьшее подпространство в $\mathfrak{g}$ над K, содержащее $\mathfrak{a}_0$, является коммутативным идеалом в $\mathfrak{g}$; поэтому $\mathfrak{g}$ полупроста тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}_0$ полупроста. Если $\mathfrak{g}_0$ проста, то ясно, что $\mathfrak{g}$ проста. Обратно, предположим, что $\mathfrak{g}$ проста, и покажем, что $\mathfrak{g}_0$ проста. Пусть $\mathfrak{a}_0$ — простая компонента $\mathfrak{g}_0$. Для любого $\lambda \in K^*$ $\lambda\mathfrak{a}_0$ — идеал в $\mathfrak{g}_0$ и $[\mathfrak{a}_0, \lambda\mathfrak{a}_0] = \lambda[\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_0] = \lambda\mathfrak{a}_0 \neq \{0\}$, вследствие чего $\lambda\mathfrak{a}_0 \supset \mathfrak{a}_0$ и поэтому $\lambda\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}_0$, так как $\dim_{K_0}(\lambda\mathfrak{a}_0) = \dim_{K_0}(\mathfrak{a}_0)$. Между тем векторное подпространство в $\mathfrak{g}$, порожденное $\mathfrak{a}_0$, является ненулевым идеалом в $\mathfrak{g}$, а значит, совпадает со всем $\mathfrak{g}$. Отсюда $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_0$, что и требовалось доказать.

§ 7. Теорема Адо

Напомним, что K обозначает поле характеристики 0 *и что все алгебры Ли предполагаются конечномерными над K.*

1. Коэффициенты представления

Пусть U — ассоциативная алгебра с единицей над K, U^* — сопряженное к U векторное пространство и ρ — представление U в векторном пространстве E. Если $e \in E$ и $e' \in E^*$, то пусть $\theta(e, e') \in U^*$ — *коэффициент*, соответствующий ρ (*Алг.*, гл. VIII, § 13, n° 3). Напомним, что $\theta(e, e')(x) = \langle\rho(x)e, e'\rangle$ и что для фиксированного e' отображение $e \mapsto \theta(e, e')$ является гомоморфизмом U-модуля E в U-модуль U^* корегулярного представления алгебры U (*там же*, предложение 1); значит, векторное подпространство в U^*, порожденное коэффициентами ρ (мы будем обозначать его в этом параграфе через $C(\rho)$), является U-подмодулем в U^*. Если $(e'_i)_{i\in I}$ — семейство элементов, порождающих E^* над K, то отображение $e \mapsto (\theta(e, e'_i))$ является *инъективным* U-гомоморфизмом E в $C(\rho)^I$. В самом деле, если $\theta(e, e'_i) = 0$ для любого i, то $\langle e, e'_i\rangle = \langle\rho(1)e, e'_i\rangle = \theta(e, e'_i)(1) = 0$ для любого i, откуда $e = 0$.

В частности, если U — универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и если ρ — представление $\mathfrak{g}$ (отождествляемое с представлением U) в векторном пространстве E размерности n, то $\mathfrak{g}$-модуль E изоморфен $\mathfrak{g}$-подмодулю в $(C(\rho))^n$.

2. Теорема о продолжении

Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathfrak{g}'$ равна прямой сумме идеала $\mathfrak{g}'$ и подалгебры $\mathfrak{h}$, U — универсальная обертывающая алгебра для $\mathfrak{g}$ и $U' \subset U$ — универсальная обертывающая алгебра для $\mathfrak{g}'$. Существует, и притом только одна, структура $\mathfrak{g}$-модуля на U',

такая, что: α) для любых $x \in \mathfrak{g}'$ и $u \in U'$ выполняется $x_{U'}u = -ux$; β) для любых $x \in \mathfrak{h}$ и $u \in U'$ выполняется $x_{U'}u = xu - ux$ (этот последний элемент лежит, конечно, в U', так как $\mathfrak{g}'$ и, следовательно, U' устойчиво относительно внутреннего дифференцирования, определенного элементом x). В самом деле, условия α) и β) определяют единственным образом линейное отображение $x \mapsto x_{U'}$ алгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathscr{L}_K(U')$. Достаточно поэтому проверить, что $[x, y]_{U'} = [x_{U'}, y_{U'}]$; понятно, что можно ограничиться рассмотрением трех следующих случаев:

1) $x \in \mathfrak{g}'$, $y \in \mathfrak{g}'$; тогда

$$[x, y]_{U'} u = -u(xy - yx) = (x_{U'}y_{U'} - y_{U'}x_{U'}) u;$$

2) $x \in \mathfrak{h}$, $y \in \mathfrak{g}'$; тогда

$$[x, y]_{U'} u = -u(xy - yx) = \\ = x(-uy) - (-uy)x + (xu - ux)y = (x_{U'}y_{U'} - y_{U'}x_{U'}) u;$$

3) $x \in \mathfrak{h}$, $y \in \mathfrak{h}$; тогда $[x, y]_{U'}$ и $[x_{U'}, y_{U'}]$ — два дифференцирования U', ограничения которых на $\mathfrak{g}'$ совпадают с ограничениями $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}[x, y]$ и $[\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x, \mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} y]$; значит, эти дифференцирования равны.

Мы рассмотрим также дуальное представление $x \mapsto -{}^t x_{U'}$ алгебры $\mathfrak{g}$ в U'^*. Для $x \in \mathfrak{g}'$ $-{}^t x_{U'}$ является транспонированным (контрагредиентным) к правому умножению на x в U'; соответствующее представление алгебры U' является, таким образом, ее корегулярным представлением.

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{g}'$ — ее подалгебра и ρ' — представление $\mathfrak{g}'$ в V'. Представление ρ алгебры $\mathfrak{g}$ в V называется продолжением представления ρ' на $\mathfrak{g}$, если существует инъективный гомоморфизм $\mathfrak{g}'$-модуля V' в $\mathfrak{g}'$-модуль V. Говорят также, что $\mathfrak{g}$-модуль V является продолжением $\mathfrak{g}'$-модуля V'.*

Если ρ' конечномерно и $\mathfrak{g}'$ — разрешимый идеал в $\mathfrak{g}$, то для существования продолжения *конечной размерности* необходимо, чтобы идеал $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}']$ содержался в наибольшем идеале нильпотентности представления ρ' (§ 5, n° 3, теорема 1).

Теорема 1 (*Цассенхауз*). *Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}' + \mathfrak{h}$ является прямой суммой идеала $\mathfrak{g}'$ и подалгебры $\mathfrak{h}$ и ρ' — конечномерное представление $\mathfrak{g}'$, наибольший идеал нильпотентности которого содержит $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}']$.*

а) *Существует конечномерное продолжение ρ представления ρ' на $\mathfrak{g}$, наибольший идеал нильпотентности которого содержит наибольший идеал нильпотентности ρ'.*

б) *Если для любого $x \in \mathfrak{h}$ ограничение на $\mathfrak{g}'$ преобразования $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$ нильпотентно, то можно, кроме того, выбрать ρ так, чтобы его наибольший идеал нильпотентности содержал $\mathfrak{h}$.*

Пусть U' — универсальная обертывающая алгебра для $\mathfrak{g}'$. Будем предполагать, что U' и U'^* наделены структурами $\mathfrak{g}$-модулей, определенными в начале этого пункта.

$$\begin{array}{c} U'^* \\ \cup \\ S \\ \cup \\ C(\rho') \end{array}$$

Пусть $I \subset U'$ — ядро представления ρ' (отождествленного с представлением алгебры U'). Это двусторонний идеал конечной коразмерности в U'. Подпространство $C(\rho')$ пространства U'^* (см. n° 1) ортогонально к I. Пусть S есть $\mathfrak{g}$-подмодуль в U'^*, порожденный $C(\rho')$.

Покажем, что S *конечномерно* над K. Пусть V' — пространство, в котором действует ρ', и $V' = V'_0 \supset V'_1 \supset \ldots \supset V'_d = \{0\}$ — ряд Жордана — Гёльдера $\mathfrak{g}'$-модуля V'. Пусть ρ'_i — представление $\mathfrak{g}'$ в V'_{i-1}/V'_i, индуцированное ρ' $(1 \leqslant i \leqslant d)$. Пусть $I' \subset U'$ — пересечение ядер представлений ρ'_i (отождествленных с представлениями алгебры U'). Имеем

$$I'^d \subset I \subset I'$$

и $I' \cap \mathfrak{g}'$ — наибольший идеал нильпотентности представления ρ'. Согласно § 2, n° 6, следствие предложения 6, I'^d — идеал конечной коразмерности в U'. Если $x \in \mathfrak{h}$, то дифференцирование $u \mapsto xu - ux$ алгебры U' отображает $\mathfrak{g}'$ в $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subset I'$, а значит, U' в I' и I'^d в I'^d. Кроме того, ясно, что I'^d есть $\mathfrak{g}'$-подмодуль в U'. Поэтому I'^d является $\mathfrak{g}$-подмодулем в U'. Подпространство, ортогональное к I'^d в U'^*, будет конечномерным $\mathfrak{g}$-подмодулем, содержащим $C(\rho')$, а значит, и S. Это доказывает, что S конечномерно над K. Для $x \in I' \cap \mathfrak{g}'$ элемент x^d, очевидно, содержится в аннуляторе $\mathfrak{g}$-модуля U'/I'^d, а значит, и в аннуляторе $\mathfrak{g}$-модуля S.

Мы видели в n° 1, что $\mathfrak{g}'$-модуль V' изоморфен $\mathfrak{g}'$-подмодулю произведения $(C(\rho'))^n$. Поэтому $\mathfrak{g}$-модуль S^n и дает конечномерное продолжение ρ представления ρ' на $\mathfrak{g}$. Кроме того, эндоморфизм $\rho(x)$ нильпотентен для любого $x \in I' \cap \mathfrak{g}'$; так как $I' \cap \mathfrak{g}'$ — идеал в $\mathfrak{g}$ (ибо содержится в $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}']$ по предположению), то понятно, что $I' \cap \mathfrak{g}'$ содержится в наибольшем идеале нильпотентности представления ρ. Таким образом, а) доказано.

Предположим, наконец, что для любого $x \in \mathfrak{h}$ ограничение на $\mathfrak{g}'$ преобразования $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ нильпотентно. Так как элементы из $\mathfrak{h}$ действуют на U' дифференцированиями, то для любого $u \in U'$ и любого $x \in \mathfrak{h}$ существует целое e, такое, что $(x_{U'})^e \cdot u = 0$; эндоморфизмы, индуцируемые $x_{U'}$ в U'/I'^d и в S (являющихся конечномерными пространствами), нильпотентны. Итак, $\rho(x)$ нильпотентен для любого $x \in \mathfrak{h}$. Выше мы видели, что то же самое верно для любого $x \in I' \cap \mathfrak{g}'$. Так как $I' \cap \mathfrak{g}'$ — идеал в $\mathfrak{g}'$, содержащий $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}']$, то сумма $\mathfrak{h} + I' \cap \mathfrak{g}'$ является также идеалом в $\mathfrak{g}$. Утверждение б) теоремы 1 вытекает, таким образом, из следующей леммы:

Лемма 1. *Пусть алгебра Ли $\mathfrak{g}$ равна прямой сумме идеала $\mathfrak{g}'$ и подалгебры $\mathfrak{h}$. Пусть σ — конечномерное представление $\mathfrak{g}$. Предположим, что эндоморфизм $\sigma(x)$ нильпотентен для любого $x \in \mathfrak{g}'$ и любого $x \in \mathfrak{h}$. Тогда $\sigma(x)$ нильпотентен для любого $x \in \mathfrak{g}$.*

Факторизуя по ядру σ, можно предполагать, что σ точно. Тогда $\mathfrak{g}'$ и $\mathfrak{h}$ нильпотентны, поэтому $\mathfrak{g}$ (расширение $\mathfrak{h}$ при помощи $\mathfrak{g}'$) разрешимо. Поэтому $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{g}'$ содержатся в наибольшем идеале нильпотентности представления σ (§ 5, n° 3, следствие 6 теоремы 1).

Одно усиление теоремы 1 см. в упражнении 4.

3. *Теорема Адо*

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{n}$ — наибольший нильпотентный идеал в $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$ — нильпотентный идеал в $\mathfrak{g}$ и ρ — конечномерное представление $\mathfrak{a}$, такое, что все элементы из $\rho(\mathfrak{a})$ нильпотентны. Тогда ρ обладает конечномерным продолжением σ на $\mathfrak{g}$, таким, что все элементы из $\sigma(\mathfrak{n})$ нильпотентны.*

Пусть $\mathfrak{a} = \mathfrak{n}_0 \subset \mathfrak{n}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{n}_p = \mathfrak{n}$ — последовательность подалгебр в $\mathfrak{n}$, таких, что $\mathfrak{n}_{i-1}$ — идеал коразмерности 1 в $\mathfrak{n}_i$ для $1 \leqslant i \leqslant p$ (§ 4, n° 1, предложение 1д)). Алгебра $\mathfrak{n}_i$ является, следовательно, прямой суммой $\mathfrak{n}_{i-1}$ и подалгебры размерности 1. Так как эндоморфизм $\operatorname{ad}_{\mathfrak{n}} x$ нильпотентен для любого $x \in \mathfrak{n}$, то можно (теорема 1) шаг за шагом построить конечномерные продолжения $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p = \rho'$ представления ρ на $\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots, \mathfrak{n}_p = \mathfrak{n}$, такие, что все элементы из $\rho'(\mathfrak{n})$ нильпотентны.

Пусть $\mathfrak{r}$ — радикал $\mathfrak{g}$, и пусть $\mathfrak{n} = \mathfrak{r}_0 \subset \mathfrak{r}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{r}_q = \mathfrak{r}$ — последовательность подалгебр из $\mathfrak{r}$, таких, что $\mathfrak{r}_{i-1}$ — идеал коразмерности 1 в $\mathfrak{r}$ для $1 \leqslant i \leqslant q$ (§ 5, n° 1, предложение 2г)). Алгебра $\mathfrak{r}_i$ является, таким образом, прямой суммой $\mathfrak{r}_{i-1}$ и одномерной подалгебры. Так как $[\mathfrak{r}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{n}$, то можно (теорема 1) шаг за шагом построить продолжения конечной размерности $\rho'_1, \rho'_2, \ldots, \rho'_q = \rho''$ представления ρ' на $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \ldots, \mathfrak{r}_q = \mathfrak{r}$, такие, что все элементы из $\rho''(\mathfrak{n})$ нильпотентны.

Наконец, $\mathfrak{g}$ — прямая сумма $\mathfrak{r}$ и некоторой подалгебры $\mathfrak{s}$ (§ 6, n° 8, теорема 5). Так как $[\mathfrak{s}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{n}$, то можно построить конечномерное продолжение σ представления ρ'' на $\mathfrak{g}$, такое, что любой элемент из $\sigma(\mathfrak{n})$ нильпотентен.

Теорема 2. *Каждая алгебра Ли обладает точным конечномерным представлением.*

Более точно,

Теорема 3 (Адо). *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и $\mathfrak{n}$ — ее наибольший нильпотентный идеал. Тогда существует точное конечномерное*

представление ρ *алгебры* $\mathfrak{g}$, *такое, что все элементы из* $\rho(\mathfrak{n})$ *нильпотентны.*

Алгебра Ли K размерности 1 обладает точным конечномерным представлением τ, таким, что все элементы из $\tau(K)$ нильпотентны, например, представлением

$$\lambda \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко отсюда вывести, что центр $\mathfrak{c}$ алгебры $\mathfrak{g}$, являющийся произведением одномерных алгебр, обладает точным конечномерным представлением σ, таким, что все элементы из $\sigma(\mathfrak{c})$ нильпотентны. Пусть σ_1 — конечномерное продолжение представления σ на $\mathfrak{g}$, такое, что все элементы из $\sigma_1(\mathfrak{n})$ нильпотентны (предложение 1); пусть $\mathfrak{k}$ обозначает ядро σ_1; тогда $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{c} = \{0\}$. Кроме того, пусть σ_2 — присоединенное представление алгебры $\mathfrak{g}$, ядром которого является $\mathfrak{c}$; любой элемент из $\sigma_2(\mathfrak{n})$ нильпотентен. Прямая сумма ρ представлений σ_1 и σ_2 является конечномерной; любой элемент из $\rho(\mathfrak{n})$ нильпотентен и ядро ρ, содержащееся в $\mathfrak{k}$ и $\mathfrak{c}$, равно нулю, так что ρ точно.

УПРАЖНЕНИЯ

§ 1

1) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — ее идеалы (соотв. характеристические идеалы). Тогда множество $x \in \mathfrak{g}$, таких, что $[x, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{a}$, — идеал (соотв. характеристический идеал) в $\mathfrak{g}$, называемый *аннулятором* $\mathfrak{b}$ *по модулю* $\mathfrak{a}$. Показать, что $\mathscr{C}_{p+1}\mathfrak{g}$ является аннулятором $\mathfrak{g}$ по модулю $\mathscr{C}_p\mathfrak{g}$.

2) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли размерности n над полем K, такая, что размерность центра $\mathfrak{g}$ не менее $n-1$. Тогда $\mathfrak{g}$ коммутативна.

3) Пусть M — не обязательно ассоциативная алгебра над полем K, $(e_i)_{i \in I}$ — базис векторного пространства M, c_{ijk} — структурные константы в базисе (e_i). Для того чтобы M была алгеброй Ли, необходимо и достаточно, чтобы c_{ijk} удовлетворяли следующим соотношениям: а) $c_{iik} = 0$; б) $c_{ijk} = -c_{jik}$; в) $\sum\limits_{r \in I} (c_{ijr}c_{rkl} + c_{jkr}c_{ril} + c_{kir}c_{rjl}) = 0$ для любых i, j, k, l из I.

4) а) Предположим, что элемент 2 обратим в K. Пусть $\mathfrak{a}$ — алгебра Ли над K. На K-модуле $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a} \times \mathfrak{a}$ определим коммутатор формулой

$$[(x_1, x_2), (y_1, y_2)] = ([x_1, y_1] + [x_2, y_2], [x_1, y_2] + [x_2, y_1]).$$

Тогда $\mathfrak{a}'$ есть K-алгебра Ли, а отображения $x \longmapsto \frac{1}{2}(x, x)$, $x \longmapsto \frac{1}{2}(x, -x)$ — изоморфизмы $\mathfrak{a}$ на идеалы $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ в $\mathfrak{a}'$, прямой суммой которых является $\mathfrak{a}'$. (Рассмотреть квадратичное расширение K' кольца K с базисом 1 и k, таким, что $k^2 = 1$. Построить $\mathfrak{a}_{(K_1)}$, а затем сузить до K кольцо скаляров. Заметить после этого, что $\frac{1}{2}(1+k)$, $\frac{1}{2}(1-k)$ — идемпотенты в K' и что $(1+k)(1-k) = 0$.)

б) Пусть $\mathfrak{a}$ — алгебра Ли над полем вещественных чисел, $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_{(\mathbf{C})}$, $\mathfrak{b}$ — вещественная алгебра Ли, которая получается из $\mathfrak{g}$ сужением поля скаляров до $\mathbf{R}$. Показать, что $\mathfrak{b}_{(\mathbf{C})}$ изоморфна $\mathfrak{a}'_{(\mathbf{C})}$, где $\mathfrak{a}'$ — алгебра, введенная в п. а). (Рассмотреть $V = \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ как векторное пространство над $\mathbf{C}$ согласно формуле $(z \otimes z')z'' = z \otimes z'z''$. Заметить, что V — комплексификация вещественного подпространства в V, порожденного $1 \otimes 1$ и $i \otimes i$, и что это подпространство совпадает с квадратичным расширением $\mathbf{R}$ с базисом 1 и k, причем $k^2 = 1$.)

5) Пусть V и W — векторные пространства размерностей $n+1$ и n над полем K. Показать, что $\mathfrak{gl}(W)$ изоморфна некоторой подалгебре в $\mathfrak{sl}(V)$. (Можно предполагать, что W — гиперплоскость в V. Пусть $e \in V$, $e \notin W$. Для $x \in \mathfrak{gl}(W)$ пусть $y(x)$ — элемент из $\mathfrak{gl}(V)$, продолжающий x и такой, что $y(e) = -\operatorname{Tr}(x) \,.\, e$. Показать, что отображение $x \longmapsto y(x)$ является изоморфизмом $\mathfrak{gl}(W)$ на подалгебру алгебры $\mathfrak{sl}(V)$.)

6) Для того чтобы алгебра Ли $\mathfrak{g}$ была ассоциативной, необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ содержалась в центре $\mathfrak{g}$.

¶ 7) Пусть A — кольцо (возможно, без единицы), такое, что соотношение $2a = 0$ в A влечет за собой $a = 0$. Пусть U — подкольцо в A, являющееся идеалом $\mathbf{Z}$-алгебры Ли, ассоциированной с A.

а) Если x, y принадлежат U, то $(xy - yx) A \subset U$ (записать $(xy - yx) s = x(ys) - (ys) x - y(xs - sx)$) и $A(xy - yx) A \subset U$ (записать $r(xy - yx) s = (xy - yx) sr + r[(xy - yx) s] - [(xy - yx) s] r$).

б) Предположим, что U коммутативно. Пусть $x \in U$, $s \in A$ и $y = xs - sx$. Показать, что $(yt)^3 = 0$ для любого $t \in A$. (Элемент x коммутирует с $xs - sx$ и $xs^2 - s^2x$; вывести отсюда, что $2(xs - sx)^2 = 0$, откуда $y^2 = 0$. Аналогично $(yt - ty)^2 = 0$ для любого $t \in A$.)

в) Предположим теперь, что единственные двусторонние идеалы в A суть $\{0\}$ и A и что для любого ненулевого элемента y из A существует элемент $t \in A$, такой, что yt ненильпотентен. Показать, что если $U \neq A$, то U содержится в центре A. (Показать, используя а), что U коммутативно, а затем использовать б).)

г) Пусть V — идеал $\mathbf{Z}$-алгебры Ли, ассоциированной с A. Тогда либо V содержится в центре A, либо $V \supset [A, A]$. (Применить в) к множеству U элементов $t \in A$, таких, что $[t, A] \subset V$; использовать тождество $[xy, z] = [x, yz] + [y, zx]$.)

8) Если x_1, x_2, x_3, x_4 — 4 элемента алгебры Ли, то

$$[[x_1, x_2], x_3], x_4] + [[[x_2, x_1], x_4], x_3] + [[[x_3, x_4], x_1], x_2] + \\ + [[[x_4, x_3], x_2], x_1] = 0.$$

9) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, в которой для любых x и y выполняется соотношение $[[x, y], y] = 0$.

а) Показать, что $3[[x, y], z] = 0$ для любых x, y, z из $\mathfrak{g}$. (Заметить, что $[[x, y], z]$ — трилинейная знакопеременная функция от x, y, z, и применить тождество Якоби.)

б) Аналогичным образом, используя а) и упр. 8, показать, что $[[[x, y], z], t] = 0$ для любых x, y, z, t из $\mathfrak{g}$.

10) Пусть L — ассоциативная алгебра, $\mathfrak{g}$ — ассоциированная с ней алгебра Ли. Любое дифференцирование алгебры L является дифференцированием алгебры $\mathfrak{g}$, однако обратное неверно. (Рассмотреть тождественное отображение ассоциативно-коммутативной алгебры.)

11) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, такой, что $\mathscr{D}\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$. Показать что $\mathfrak{h}$ — характеристический идеал в $\mathfrak{g}$.

12) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли.

а) Для того чтобы некоторое дифференцирование D алгебры $\mathfrak{g}$ было перестановочно со всеми внутренними дифференцированиями $\mathfrak{g}$, необходимо и достаточно, чтобы D отображало $\mathfrak{g}$ в ее центр.

б) Будем предполагать теперь, что $\mathfrak{g}$ имеет нулевой центр, так что $\mathfrak{g}$ можно отождествить с идеалом алгебры Ли $\mathfrak{D}$ всех дифференцирований $\mathfrak{g}$. Показать, что централизатор $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{D}$ равен нулю (использовать а)). В частности, центр $\mathfrak{D}$ равен нулю.

в) Показать, что дифференцирование Δ алгебры $\mathfrak{D}$, такое, что $\Delta(\mathfrak{g}) = \{0\}$, является нулевым. (Имеем $[\Delta(\mathfrak{D}), \mathfrak{g}] \subset \Delta([\mathfrak{D}, \mathfrak{g}]) + [\mathfrak{D}, \Delta(\mathfrak{g})] \subset \Delta(\mathfrak{g}) = \{0\}$, откуда $\Delta(\mathfrak{D}) = \{0\}$ согласно б).)

г) Показать, что если, кроме того, $\mathfrak{g} = \mathscr{D}\mathfrak{g}$, то любое дифференцирование Δ алгебры $\mathfrak{D}$ является внутренним (использовать в) и упр. 11).

13) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — два подмодуля в $\mathfrak{g}$. Определим для любого целого $i \geqslant 0$ подмодули $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}_i(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ и $\mathfrak{n}_i = \mathfrak{n}_i(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ следующим

образом: $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{m}_{i+1} = [\mathfrak{m}_i, \mathfrak{b}]$, $\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{n}_{i+1} = [\mathfrak{n}_i, \mathfrak{b}]$. Показать, что $[\mathfrak{a}, \mathfrak{m}_i] \subset \mathfrak{n}_{i+1}$ для $i = 1, 2, \ldots$ (доказывать индукцией по i, замечая, что $\mathfrak{m}_i([\mathfrak{a}, \mathfrak{b}], \mathfrak{b}) = \mathfrak{m}_i(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ и $\mathfrak{n}_i([\mathfrak{a}, \mathfrak{b}], \mathfrak{b}) = \mathfrak{n}_{i+1}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$).

¶ 14) Пусть $\mathfrak{a}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{b}$ — подалгебра в $\mathfrak{a}$. Назовем *нормальным рядом*, соединяющим $\mathfrak{a}$ с $\mathfrak{b}$, убывающий ряд подалгебр $\mathfrak{a}$ вида $(\mathfrak{a}_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$, таких, что $\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{b}$, причем $\mathfrak{a}_{i+1}$ — идеал в $\mathfrak{a}_i$ при $0 \leqslant i < n$. Говорят, что $\mathfrak{b}$ — *субнормальная* подалгебра в $\mathfrak{a}$, если существует нормальный ряд, соединяющий $\mathfrak{a}$ с $\mathfrak{b}$.

а) Пусть $\mathfrak{b}$ — субнормальная подалгебра в $\mathfrak{a}$, $(\mathfrak{a}_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ — нормальный ряд, соединяющий $\mathfrak{a}$ с $\mathfrak{b}$. Вывести из упр. 13, что $[\mathscr{C}^{n+p}\mathfrak{b}, \mathfrak{a}] \subset \mathscr{C}^p\mathfrak{b}$, для чего заметить, что $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{a}_{i+1}$ для $0 \leqslant i < n$.

б) Вывести из а), что пересечение $\mathscr{C}^\infty\mathfrak{b}$ подалгебр $\mathscr{C}^p\mathfrak{b}$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ является идеалом в $\mathfrak{a}$.

в) Вывести из б), что субнормальная подалгебра $\mathfrak{c}$ алгебры $\mathfrak{a}$, такая, что $\mathfrak{c} = \mathscr{D}\mathfrak{c}$, является идеалом в $\mathfrak{a}$.

г) Если K — поле и $\dim_K \mathfrak{a} < +\infty$, показать, что пересечение $\mathscr{D}^\infty\mathfrak{b}$ подалгебр $\mathscr{D}^p\mathfrak{b}$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ является идеалом в $\mathfrak{a}$. (Показать, что это пересечение является субнормальной подалгеброй в $\mathfrak{a}$, и применить в).)

¶ 15) а) Пусть $\mathfrak{a}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{b}$ — подалгебра в $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{c}$ — идеал в $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{z}$ — централизатор $\mathfrak{c}$ в $\mathfrak{a}$. Имеем $[\mathfrak{z}, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{z}$. Вывести отсюда, что $\mathfrak{b} + \mathfrak{z}$ — подалгебра в $\mathfrak{a}$, в которой $\mathfrak{z}$ является идеалом.

б) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — субнормальная подалгебра в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{b}$ — идеал в $\mathfrak{a}$. Если централизатор $\mathfrak{b}$ в $\mathfrak{a}$ и централизатор $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{g}$ равны нулю, то централизатор $\mathfrak{z}$ подалгебры $\mathfrak{b}$ в $\mathfrak{g}$ также равен нулю. (Пусть $\mathfrak{h} = \mathfrak{a} + \mathfrak{z}$, это подалгебра, согласно а); $\mathfrak{a}$ субнормальна в $\mathfrak{h}$; если $\mathfrak{z} \neq \{0\}$, то $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{h}$, поэтому $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{a}'$, причем $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}' \subset \mathfrak{h}$; пусть $a' \in \mathfrak{a}'$, $a' \notin \mathfrak{a}$ и $a' = a + z$, $a \in \mathfrak{a}$, $z \in \mathfrak{z}$, $z \neq 0$; показать, что $[z, \mathfrak{a}]$ содержится в $\mathfrak{a}$ и коммутирует с $\mathfrak{b}$, откуда $[z, \mathfrak{a}] = \{0\}$, что является противоречием.)

в) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли с нулевым центром, $\mathfrak{D}_1$ — алгебра Ли дифференцирований алгебры $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{D}_2$ — алгебра Ли дифференцирований алгебры $\mathfrak{D}_1, \ldots$. Отождествим $\mathfrak{g}$ с идеалом в $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_1$ — с идеалом в $\mathfrak{D}_2, \ldots$ (см. упражнение 12 б)). Используя б) и упражнение 12 б), показать, что централизатор $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{D}_i$ равен нулю для всех i. (Продолжение этого упражнения см. в § 4, упражнение 15.)

16) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{D}$ — алгебра Ли дифференцирований $\mathfrak{g}$. Тождественное отображение $\mathfrak{D}$ позволяет определить полупрямое произведение $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{D}$ на $\mathfrak{g}$, называемое *голоморфом* $\mathfrak{g}$. Отождествим $\mathfrak{g}$ с идеалом, а $\mathfrak{D}$ — с подалгеброй алгебры $\mathfrak{h}$.

а) Показать, что централизатор $\mathfrak{g}^*$ алгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{h}$ совпадает с множеством элементов $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, x - x$ $(x \in \mathfrak{g})$.

б) Для любого элемента $x + d$ алгебры $\mathfrak{h}$ $(x \in \mathfrak{g}, d \in \mathfrak{D})$ положим $\theta(x + d) = \mathrm{ad}_\mathfrak{g} x - x + d$. Показать, что θ—автоморфизм порядка 2 алгебры $\mathfrak{h}$, который переводит $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}^*$, так что $\mathfrak{h}$ можно отождествить с голоморфом алгебры $\mathfrak{g}^*$.

в) Для любого идеала $\mathfrak{k} \neq \{0\}$ алгебры $\mathfrak{h}$ имеем $\mathfrak{k} \cap (\mathfrak{g} + \mathfrak{g}^*) \neq \{0\}$. (Если $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g} = \{0\}$, то $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}^*$.)

г) Если $\mathfrak{g}$ коммутативна, то любой идеал $\mathfrak{k} \neq \{0\}$ алгебры $\mathfrak{h}$ содержит $\mathfrak{g}$. Если K — поле и $\dim_K \mathfrak{g} < +\infty$, то вывести из этого, что если $\mathfrak{k} \neq \mathfrak{g}$, то $\mathfrak{h}$ не может быть голоморфом $\mathfrak{k}$ (использовать б)).

17) Предположим, что K — поле. Пусть T — переменная и $L = K((T))$; L каноническим образом наделено нормированием (порядок формального

степенного ряда), которое превращает его в полное нормированное поле.

а) Пусть V — конечномерное векторное пространство над K. Тогда $V_{(L)}$ канонически наделено структурой полного метризуемого векторного пространства (*Топ. вект. пр.*, гл. I, § 2, n° 3, теорема 2). Пусть $(x_p)_{p \in \mathbf{Z}}$ — семейство элементов из V, таких, что $x_p = 0$ для любого p, меньшего некоторого фиксированного целого рационального числа. Тогда ряд $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} x_p T^p$ сходится в $V_{(L)}$ и любой элемент из $V_{(L)}$ представляется в таком виде единственным способом. (Выбрать базис в V.)

б) Векторное пространство $\mathscr{L}_L(V_{(L)}) = (\mathscr{L}_K(V))_{(L)}$ канонически наделено структурой полного метризуемого векторного пространства. Любой эндоморфизм $V_{(L)}$ представляется единственным образом в виде $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} u_p T^p$, где $u_p \in \mathscr{L}_K(V)$ и u_p равны нулю для любого p, меньшего некоторого фиксированного целого рационального числа.

в) Если K имеет характеристику 0 и $u \in \mathscr{L}_K(V)$, положим

$$e^{Tu} = 1 + \frac{1}{1!} uT + \frac{1}{2!} u^2 T^2 + \ldots \in \mathscr{L}_L(V_{(L)}).$$

Если $x \in V$таково, что $ux = 0$, то $e^{Tu}.x = x$.

г) Если W — другое конечномерное векторное пространство над K и если $v \in \mathscr{L}_K(W)$, то $e^{T(u \otimes 1 + 1 \otimes v)} = e^{Tu} \otimes e^{Tv}$.

д) Вывести из в) и г), что если V наделено структурой алгебры, не обязательно ассоциативной, и если u — дифференцирование V, то e^{Tu} — автоморфизм алгебры $V_{(L)}$.

¶ 18) Пусть $\mathfrak{H}$ — комплексное гильбертово пространство, Y и Z — два непрерывных эрмитова оператора на $\mathfrak{H}$ и $\mathrm{B} = [\mathrm{Z}, \mathrm{Y}]$. Предположим, что Y и B перестановочны.

а) Показать, что $[\mathrm{Z}, \mathrm{Y}^n] = n\mathrm{B}\mathrm{Y}^{n-1}$ (доказывать индукцией по n).

б) Пусть f — непрерывно дифференцируемая функция вещественной переменной. Вывести из а), что $[\mathrm{Z}, f(\mathrm{Y})] = \mathrm{B}f'(\mathrm{Y})$.

в) Вывести из б), что $\mathrm{B} = 0$. (Показать, что если $\mathrm{B} \neq 0$, то f можно выбрать таким образом, что $\|f(\mathrm{Y})\| \leqslant 1$ и $\|\mathrm{B}f'(\mathrm{Y})\|$ сколь угодно велико.)

г) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли непрерывных операторов T на $\mathfrak{H}$, таких, что $\mathrm{T}^* = -\mathrm{T}$. Вывести из в), что условия $\mathrm{Y} \in \mathfrak{g}$, $\mathrm{Z} \in \mathfrak{g}$, $[[\mathrm{Z}, \mathrm{Y}], \mathrm{Y}] = 0$ влекут за собой $[\mathrm{Z}, \mathrm{Y}] = 0$.

19) а) Пусть L — ассоциативная алгебра над K. Для заданных k элементов $x_1, \ldots, x_k$ алгебры L положим

$$f_k(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(k)}.$$

В алгебре $L \otimes_K K[T_1, \ldots, T_k]$, где T_i — переменные, $f_k(x_1, \ldots, x_k)$ — коэффициент при $T_1 \ldots T_k$ в $(x_1T_1 + \ldots + x_kT_k)^k$, а значит, и коэффициент при $T_1 \ldots T_k$ в

$$\sum_{j=0}^{k-1} (x_1T_1 + \ldots + x_{k-1}T_{k-1})^j x_kT_k (x_1T_1 + \ldots + x_{k-1}T_{k-1})^{k-j-1}.$$

Для заданных двух элементов x, y алгебры L определим $g_{i,\,k-i}(x, y)$ как коэффициент при $T_1^i T_2^{k-i}$ в $(xT_1 + yT_2)^k$. Показать, что для него выполняется

$$i!\,(k-i)!\,g_{i,\,k-i}(x, y) = \mathfrak{f}_k(t_1, \ldots, t_k),$$

где $t_h = x$ для $h \leqslant i$ и $t_h = y$ для $h \geqslant i+1$.

б) Если L рассматривается как алгебра над K, то в $\mathscr{L}_K(L)$ имеем

$$(\mathrm{ad}\,x)^n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} \mathrm{L}_x^i \mathrm{R}_x^{n-i},$$

где L_x (соотв. R_x) — умножение $y \longmapsto xy$ (соотв. $y \longmapsto yx$).

Вывести отсюда, что если K — поле характеристики p (p простое), то

$$(\mathrm{ad}\,x)^p \,.\, y = (\mathrm{ad}\,x^p) \,.\, y, \tag{1}$$

$$(\mathrm{ad}\,x)^{p-1} \,.\, y = \sum_{i=0}^{p-1} x^i y x^{p-1-i}. \tag{2}$$

Вывести из (2), что

$$\mathfrak{f}_{p-1}(\mathrm{ad}\,x_1, \ldots, \mathrm{ad}\,x_{p-1}) \,.\, y = \mathfrak{f}_p(x_1, \ldots, x_{p-1}, y)$$

и

$$g_{i,\,p-1-i}(\mathrm{ad}\,x, \mathrm{ad}\,y) \,.\, y = (p-i)\, g_{i,\,p-i}(x, y).$$

Заключить отсюда, что для двух произвольных элементов x, y из L выполняется соотношение

$$(x+y)^p = x^p + y^p + \Lambda_p(x, y), \tag{3}$$

где

$$\Lambda_p(x, y) = \sum_{i=1}^{p-1} (p-i)^{-1} g_{i,\,p-1-i}(\mathrm{ad}\,x, \mathrm{ad}\,y) \,.\, y$$

принадлежит подалгебре Ли алгебры L, порожденной x и y (*формулы Джекобсона*).

20) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над кольцом K характеристики $p > 0$ (p простое). Говорят, что отображение $x \longmapsto x^{[p]}$ алгебры $\mathfrak{g}$ в себя является *p-отображением*, если выполняются следующие соотношения:

$$\mathrm{ad}\,x^{[p]} = (\mathrm{ad}\,x)^p,$$

$$(\lambda x)^{[p]} = \lambda^p x^{[p]},$$

$$(x+y)^{[p]} = x^{[p]} + y^{[p]} + \Lambda_p(x, y) \text{ (ср. с упражнением 19б))}$$

для x, y из $\mathfrak{g}$ и $\lambda \in K$. Будем называть *p-алгеброй Ли* над K множество, наделенное структурой, определенной заданием структуры алгебры Ли над K и p-отображением. Любая ассоциативная алгебра над K является p-алгеброй Ли относительно $[x, y] = xy - yx$ и $x^{[p]} = x^p$ (упражнение 19). Говорят, что отображение u p-алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в p-алгебру Ли $\mathfrak{g}'$ является *p-гомоморфизмом*, если u — гомоморфизм алгебр Ли и если $u(x^{[p]}) = (u(x))^{[p]}$. Показать, что в любой p-алгебре Ли $\mathfrak{g}$ любое p-отображение имеет вид $x \longmapsto x^{[p]} + \mathfrak{f}(x)$, где $\mathfrak{f}$ — отображение алгебры $\mathfrak{g}$ в ее центр, являющееся полулинейным относительно эндоморфизма $\lambda \longmapsto \lambda^p$ поля K. Более общо, если u — гомоморфизм $\mathfrak{g}$ на p-алгебру Ли $\mathfrak{g}'$, то $u(x^{[p]}) - (u(x))^{[p]}$ принадлежит центру алгебры $\mathfrak{g}'$.

21) а) Пусть K — поле характеристики $p > 0$, L — не обязательно ассоциативная алгебра над K. Показать, что дифференцирования алгебры L образуют p-алгебру Ли относительно p-отображения $D \longmapsto D^p$.

б) Пусть L — алгебра $K[X]/(X^p)$, а $\mathfrak{w}$ есть p-алгебра ее дифференцирований. Обозначим через D_i $(0 \leqslant i \leqslant p-1)$ дифференцирование L, такое, что $D_i(X) = X^i$. Показать, что D_i образуют базис $\mathfrak{w}$ над K и что $[D_i, D_j] = (j-i) D_{i+j-1}$, если $i+j \leqslant p$, $[D_i, D_j] = 0$, если $i+j > p$, и $D_i^p = 0$, за исключением $i = 1$, когда $D_1^p = D_1$.

в) Показать, что если $p \geqslant 3$, то алгебра $\mathfrak{w}$ не обладает идеалами, отличными от $\{0\}$ и $\mathfrak{w}$. (Используя таблицу умножения D_i, показать, что любой ненулевой идеал в $\mathfrak{w}$ содержит кратное D_{p-1}, отличное от нуля.)

г) Пусть V_k — векторное подпространство в $\mathfrak{w}$ с базисом из элементов D_i, таких, что $i \geqslant k$. Показать, что если $p \geqslant 5$, то V_k совпадает с множеством $Z \in \mathfrak{w}$, централизатор которого имеет размерность $\geqslant k+1$. Вывести отсюда, что если $p \geqslant 5$, то группа автоморфизмов алгебры $\mathfrak{w}$ разрешима.

22) Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная p-алгебра Ли над кольцом K характеристики p (p простое). Обозначим через $x \longmapsto x^p$ ее p-отображение. Для любого подмножества E алгебры $\mathfrak{g}$ обозначим через E^p *подмодуль* в $\mathfrak{g}$, порожденный x^p при $x \in E$. Говорят, что идеал $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ является *p-идеалом*, если $\mathfrak{a}^p \subset \mathfrak{a}$.

а) Для того чтобы идеал $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{g}$ был p-идеалом, необходимо и достаточно, чтобы он был ядром некоторого p-гомоморфизма (упражнение 20).

б) Сумма двух p-идеалов является p-идеалом. Сумма p-идеала и p-подалгебры является p-подалгеброй.

в) Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{g}$. Наименьшая p-подалгебра, содержащая $\mathfrak{h}$, есть $\mathfrak{h} + \mathfrak{h}^p + \mathfrak{h}^{p^2} + \ldots = \bar{\mathfrak{h}}$; если положить $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{h} + \mathfrak{h}^p + \mathfrak{h}^{p^2} + \ldots$ $\ldots + \mathfrak{h}^{p^i}$, то $\mathfrak{h}_i$ — идеал в $\bar{\mathfrak{h}}$ и $\bar{\mathfrak{h}}/\mathfrak{h}$ коммутативна. Если $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, то идеалами являются и $\mathfrak{h}_i$, и $\bar{\mathfrak{h}}$, причем этот последний является наименьшим p-идеалом, содержащим $\mathfrak{h}$.

г) Нормализатор и централизатор произвольного подмодуля в $\mathfrak{g}$ являются p-подалгебрами в $\mathfrak{g}$.

23) Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная коммутативная p-алгебра Ли над совершенным полем K характеристики $p > 0$.

а) Показать, что $\mathfrak{g}$ единственным способом представляется в виде прямой суммы двух p-подалгебр $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{k}$, таких, что в $\mathfrak{h}$ p-отображение биективно, а в $\mathfrak{k}$ нильпотентно (рассмотреть степени p-отображения в $\mathfrak{g}$; ср. с *Алг.*, гл. VIII, § 2, n° 2, лемма 2, и гл. VII, § 5, упражнение 20а)). Говорят, что $\mathfrak{h}$ есть *p-сердцевина* алгебры $\mathfrak{g}$.

б) Предположим, что K алгебраически замкнуто. Показать, что существует базис (e_i) подалгебры $\mathfrak{h}$, такой, что $e_i^p = e_i$ для любого i (рассмотреть p-подалгебру в $\mathfrak{h}$, порожденную одним элементом, и показать, что она содержит элемент x, такой, что $x^p = x \neq 0$; вести после этого доказательство индукцией по размерности $\mathfrak{h}$). Вывести отсюда, что имеется лишь конечное число p-подалгебр алгебры $\mathfrak{h}$ и что они находятся во взаимно однозначном соответствии с подпространствами векторного пространства, порожденного элементами e_i над простым подполем $\mathbf{F}_p$.

в) Показать, что существует такой базис (f_{ij}) подалгебры $\mathfrak{k}$ $(1 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant s_i$ для любого $i)$, где последовательность s_i убывающая, что $f_{1j}^p = 0$ для $1 \leqslant j \leqslant s_1$, $f_{ij}^p = f_{i-1,j}$ для $2 \leqslant i \leqslant k$, $1 \leqslant j \leqslant s_i$ (тем же способом, что и в *Алг.*, гл. VII, § 5, упражнение 20б)).

¶ 24) Пусть K — поле произвольной характеристики p, а X_i, Y_i, Z_i суть $3n$ различных переменных; системы $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $(Y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $(Z_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$

обозначим для краткости символами $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ соответственно. Пусть $A_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}}$ — алгебра формальных степенных рядов от $3n$ переменных X_i, Y_i, Z_i с коэффициентами в поле K; будем обозначать через $A_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ (соотв. $A_{\mathbf{x}}$) подалгебру в $A_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}}$, состоящую из формальных рядов, не содержащих $\mathbf{z}$ (соотв. $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$). Элемент из $A_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}}$ (соотв. $A_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$, $A_{\mathbf{x}}$) будет обозначаться через $u(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ (соотв. $u(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $u(\mathbf{x})$); система $(u_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}))_{1 \leqslant i \leqslant n}$ из n элементов $A_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}}$ будет обозначаться через $\mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$; аналогичны обозначения для формальных рядов, не содержащих одну или две из систем $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$. Если $u(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) \in A_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}}$ и если $\mathbf{f} = (f_i)$, $\mathbf{g} = (g_i)$, $\mathbf{h} = (h_i)$ — три системы из n элементов алгебры $A_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}}$, являющихся рядами без постоянного члена, то через $u(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}))$ обозначается формальный ряд, получающийся подстановкой f_i вместо X_i, g_i вместо Y_i, h_i вместо Z_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ в ряд u. Для любой системы $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ n натуральных чисел через $\mathbf{x}^\alpha$ обозначим одночлен $X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n}$; точно так же определим $\mathbf{y}^\alpha$ и $\mathbf{z}^\alpha$. Через ε_i обозначим систему α, в которой $\alpha_j = 0$, если $j \neq i$, $\alpha_i = 1$. Через $\mathbf{e}$ обозначим систему $(0, \ldots, 0)$ из n элементов алгебры $A_{\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}}$.

а) Назовем *формальным групповым законом* над K (или, допуская вольность речи, *формальной группой* над K) размерности n систему $G = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ из n элементов алгебры $A_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$, обладающую следующими свойствами: 1° $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{z})) = \mathbf{f}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \mathbf{z})$; 2° $\mathbf{f}(\mathbf{e}, \mathbf{y}) = \mathbf{y}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{e}) = \mathbf{x}$. Показать, что тогда обязательно $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X_i + Y_i + g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, где g_i содержит только одночлены степени не менее 2, каждый из которых содержит не менее одного X_j и одного Y_j. Показать, что существует, и притом только одна, система $\mathbf{h}(\mathbf{x})$ из n элементов алгебры $A_{\mathbf{x}}$, таких, что $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{h}(\mathbf{x})) = \mathbf{f}(\mathbf{h}(\mathbf{x}), \mathbf{x}) = \mathbf{e}$ (*Алг.*, гл. IV, § 5, n° 9, предложение 10). Говорят, что G *коммутативна*, если $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$.

б) Для любого $u \in A_{\mathbf{x}}$ через $L_{\mathbf{y}}u$ обозначим элемент $u(\mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{x}))$ алгебры $A_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$. Любое дифференцирование D алгебры $A_{\mathbf{x}}$ продолжается канонически до дифференцирования $A_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ (также обозначаемого через D), если положить $D(Y_i) = 0$ для любого i (*Алг.*, гл. IV, § 5, n° 8, предложение 6). Говорят, что D *левоинвариантно* в рассматриваемой формальной группе G, если $L_{\mathbf{y}}D = DL_{\mathbf{y}}$. Обозначим через $D^{(\mathbf{e})}$ линейное отображение $A_{\mathbf{x},\mathbf{y}}$ в $A_{\mathbf{y}}$, определенное формулой $D^{(\mathbf{e})}(u) = (Du)(\mathbf{e}, \mathbf{y})$; оно отображает $A_{\mathbf{x}}$ в K и определено своим ограничением на $A_{\mathbf{x}}$. Показать, что D левоинвариантно тогда и только тогда, когда для любого $v \in A_{\mathbf{x}}$ имеем $D^{(\mathbf{e})}(L_{\mathbf{y}}v) = (Dv)\,\mathbf{y}$.

Пусть D_i — дифференцирование $\partial/\partial X_i$ алгебры $A_{\mathbf{x}}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; существует левоинвариантное дифференцирование T_i, и притом только одно, такое, что $T_i^{(\mathbf{e})} = D_i^{(\mathbf{e})}$. Показать, что T_i линейно независимы над K и что любое левоинвариантное дифференцирование является линейной комбинацией T_i с коэффициентами из K. Вывести отсюда, что коммутатор $[D, D']$ и p-отображение $D \mapsto D^p$ (в случае, когда $p > 0$) превращают множество $\mathfrak{g}$ всех левоинвариантных дифференцирований в *алгебру Ли* (*p-алгебру Ли*, если $p > 0$), называемую *алгеброй Ли формальной группы G*.

в) Показать, что для любого формального ряда $u \in A_{\mathbf{x}}$ выполняется

$$u(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = u(0) + \sum_{i=1}^{n} Y_i T_i u + o_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \tag{1}$$

где в ряде o_2 степени всех одночленов $\geqslant 2$ по переменным Y_j. Вывести отсюда, что

$$u(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{z}))) = u(0) + \sum_{i=1}^{n} (Y_i + Z_i) T_i u + \\ + \sum_{i,j} Y_i Z_j ((T_i T_j)(u)) + o_3(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}), \qquad (2)$$

где в ряде o_3 степени всех одночленов $\geqslant 3$ по переменным Y_i и Z_i. Вывести отсюда, что

$$u(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y})) - u(\mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{x})) = \sum_{i<j} (X_i Y_j - X_j Y_i)\left([T_i, T_j]^{(e)}(u)\right) + o_3'(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \qquad (3)$$

где все члены o_3' имеют суммарную степень $\geqslant 3$. Показать, что если группа G коммутативна, то и алгебра $\mathfrak{g}$ коммутативна.

г) Пусть G' — вторая формальная группа размерности m с групповым законом $\mathbf{f}'$. *Формальным гомоморфизмом* G в G' называется система $\mathbf{F} = (F_j(\mathbf{x}))_{1 \leqslant j \leqslant m}$ элементов из $A_{\mathbf{x}}$, такая, что $\mathbf{f}'(\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{F}(\mathbf{y})) = \mathbf{F}(\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{y}))$. Для любого левоинвариантного дифференцирования $D \in \mathfrak{g}$ показать, что $v \longmapsto D(v \circ \mathbf{F})$ — левоинвариантное дифференцирование, принадлежащее алгебре Ли $\mathfrak{g}'$ группы G'. Если обозначить его через $\mathbf{F}^*(D)$, то $\mathbf{F}^*$ — гомоморфизм (p-гомоморфизм в случае $p > 0$) алгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}'$. Если $(T_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ и $\left(T_j'\right)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ — базисы в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}'$, такие, что $T_i^{(e)} = D_i^{(e)}$ и $T_j'^{(e)} = D_j^{(e)}$, то показать, что матрица отображения $\mathbf{F}^*$ в этих базисах равна $(\partial F_j / \partial X_i)_0$ (постоянный член ряда $\partial F_j / \partial X_i$, где i — номер строки, а j — номер столбца).

25) Назовем *формальной линейной группой* от n переменных над полем K и обозначим через $\mathbf{GL}(n, K)$ (когда нет опасности смешения понятий) формальную группу размерности n^2, в которой групповой закон определен формулой

$$f_{ij}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = -\delta_{ij} + \sum_{k=1}^{n} (\delta_{ik} + U_{ik})(\delta_{kj} + V_{kj})$$

(δ_{ij} — символ Кронекера; $3n^2$ переменных из общего определения упражнения 24 обозначены здесь через U_{ij}, V_{ij}, W_{ij} с двумя индексами, пробегающими целые числа от 1 до n). Показать, что если $D_{ij} = \partial / \partial U_{ij}$, то левоинвариантные дифференцирования X_{ij}, такие, что $X_{ij}^{(e)} = D_{ij}^{(e)}$, задаются формулой

$$X_{ij} = (1 + U_{ii}) D_{ij} + \sum_{k \neq i} U_{ki} D_{kj}.$$

Алгебра Ли группы $\mathbf{GL}(n, K)$ отождествляется с $\mathfrak{gl}(n, K)$, если отождествить X_{ij} с элементом E_{ij} канонического базиса последней алгебры (использовать формулу (3) упражнения 24). Если K имеет характеристику $p > 0$, то $X_{ii}^p = X_{ii}$ и $X_{ij}^p = 0$ для $i \neq j$.

¶ 26) а) Пусть K — поле характеристики $\neq 2$, E есть n-мерное векторное пространство над K, Φ — билинейная симметрическая невырожденная форма над E. Предположим, что E обладает ортогональным базисом относительно Φ, и обозначим через R (диагональную) матрицу Φ в этом базисе. Известно (*Алг.*, гл. IX, § 4, упражнение 11), что любая матрица (в рассматриваемом базисе) U элемента ортогональной группы $\mathbf{G}(\Phi)$, такая, что $\det(\mathrm{I} + \mathrm{U}) \neq 0$, записывается в виде $\mathrm{U} = \left(\mathrm{I} - \mathrm{R}^{-1}\mathrm{S}\right)^{-1}(\mathrm{I} + \mathrm{R}^{-1}\mathrm{S})$, где $\mathrm{S} =$

$=\mathrm{R}(\mathrm{U}-\mathrm{I})(\mathrm{U}+\mathrm{I})^{-1}$ — кососимметрическая матрица, такая, что $\det(\mathrm{I}-\mathrm{R}^{-1}\mathrm{S})\neq 0$; обратно, для любой матрицы S, удовлетворяющей этим условиям, $\mathrm{U}=(\mathrm{I}-\mathrm{R}^{-1}\mathrm{S})^{-1}(\mathrm{I}+\mathrm{R}^{-1}\mathrm{S})$ — матрица элемента из $\mathbf{G}(\Phi)$, такая, что $\det(\mathrm{I}+\mathrm{U})\neq 0$. Пусть S_{ij}, S'_{ij}, S''_{ij} суть $3n(n-1)/2$ переменных $(1\leqslant i<j\leqslant n)$, и пусть L — поле, содержащее кольцо формальных степенных рядов $K[[S_{ij}, S'_{ij}, S''_{ij}]]$. Если обозначить через S, S′, S″ матрицы

$$\sum_{i<j} S_{ij}(\mathrm{E}_{ij}-\mathrm{E}_{ji}),\qquad \sum_{i<j} S'_{ij}(\mathrm{E}_{ij}-\mathrm{E}_{ji}),\qquad \sum_{i<j} S''_{ij}(\mathrm{E}_{ij}-\mathrm{E}_{ji}),$$

то $\det(\mathrm{I}-\mathrm{R}^{-1}\mathrm{S})\neq 0$ и аналогичное равенство верно для S′ и S″; если положить

$$\mathrm{U}=(\mathrm{I}-\mathrm{R}^{-1}\mathrm{S})^{-1}(\mathrm{I}+\mathrm{R}^{-1}\mathrm{S}),\qquad \mathrm{U}'=(\mathrm{I}-\mathrm{R}^{-1}\mathrm{S}')^{-1}(\mathrm{I}+\mathrm{R}^{-1}\mathrm{S}'),$$

то также $\det(\mathrm{I}+\mathrm{U}\mathrm{U}')\neq 0$. Положим

$$\mathrm{F}(\mathrm{S},\mathrm{S}')=\mathrm{R}(\mathrm{U}\mathrm{U}'-\mathrm{I})(\mathrm{U}\mathrm{U}'+\mathrm{I})^{-1}=(\mathfrak{f}_{ij}(\mathrm{S},\mathrm{S}'));$$

тогда $\mathfrak{f}_{ij}(\mathrm{S},\mathrm{S}')$ принадлежат кольцу формальных степенных рядов $K[[S_{ij}, S'_{ij}]]$ и, рассматривая $\mathrm{F}(\mathrm{S},\mathrm{S}')$ как формальный степенной ряд с коэффициентами в алгебре матриц порядка n над K, можно записать

$$\mathrm{F}(\mathrm{S},\mathrm{S}')=\mathrm{S}+\mathrm{S}'+o_2(\mathrm{S},\mathrm{S}'),$$

где в элементах матрицы $o_2(\mathrm{S},\mathrm{S}')$ все члены имеют степень $\geqslant 1$ по переменным S_{ij} и степень $\geqslant 1$ по переменным S'_{ij}; аналогично

$$\mathrm{U}=\mathrm{I}+2\mathrm{R}^{-1}\mathrm{S}+o'_2(\mathrm{S}),$$

причем элементы матрицы $o'_2(\mathrm{S})$ — формальные ряды порядка $\geqslant 2$. Показать, что $\mathrm{F}(\mathrm{S},\mathrm{S}')$ — формальный групповой закон над K формальной группы размерности $n(n-1)/2$; эта группа называется *формальной ортогональной группой* (соответствующей Φ) и обозначается через $\mathbf{G}(\Phi)$ (здесь допускается некоторая вольность в обозначениях).

б) Если положить $\mathrm{M}(\mathrm{S})=(m_{ij}(\mathrm{S}))=(\mathrm{I}-\mathrm{R}^{-1}\mathrm{S})^{-1}(\mathrm{I}+\mathrm{R}^{-1}\mathrm{S})$, то M — формальный гомоморфизм $\mathbf{G}(\Phi)$ в $\mathbf{GL}(n, K)$. Пусть $\mathfrak{o}(\Phi)$ — алгебра Ли формальной группы $\mathbf{G}(\Phi)$; обозначим через $(T_{ij})_{i<j}$ базис этой алгебры, такой, что $T_{ij}^{(e)}=D_{ij}^{(e)}$ (упражнение 24г)); отождествив элемент $D=\sum_{i<j} c_{ij}T_{ij}$ алгебры $\mathfrak{o}(\Phi)$ с матрицей $\mathrm{D}=\sum_{i<j} c_{ij}(\mathrm{E}_{ij}-\mathrm{E}_{ji})$, показать, что (если использовать обозначения упражнения 24г) и отождествление алгебры Ли $\mathbf{GL}(n, K)$ с $\mathfrak{gl}(n, K)$, проведенное в упражнении 25)

$$\mathrm{M}^*(\mathrm{D})=2\mathrm{R}^{-1}\mathrm{D}.$$

Вывести отсюда, что M^* — изоморфизм $\mathfrak{o}(\Phi)$ на подалгебру в $\mathfrak{gl}(n, K)$, образованную матрицами X, такими, что ${}^t\mathrm{X}\mathrm{R}+\mathrm{R}\mathrm{X}=0$ (заметить, что для любой пары (a, b) элементов из E, отождествляемых с одностолбцовыми матрицами, $\Phi(a+\mathrm{M}(\mathrm{S}).a,\ b+\mathrm{M}(\mathrm{S}).b)={}^ta.(\mathrm{I}+{}^t\mathrm{M}(\mathrm{S}))\mathrm{R}(\mathrm{I}+\mathrm{M}(\mathrm{S})).b$ является степенным рядом, равным своему свободному члену, и использовать тот факт, что подалгебра матриц $\mathrm{X}\in\mathfrak{gl}(n, K)$, для которых ${}^t\mathrm{X}\mathrm{R}+\mathrm{R}\mathrm{X}=0$, имеет размерность $n(n-1)/2$).

в) Определить аналогичным образом *симплектическую формальную группу* от $2n$ переменных над произвольным полем K и показать, что ее алгебра Ли отождествляется с подалгеброй в $\mathfrak{gl}(2n, K)$, состоящей из матриц X, для которых

$$^t\mathrm{X}\mathrm{A} + \mathrm{A}\mathrm{X} = 0, \quad \text{где} \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{I}_n \\ -\mathrm{I}_n & 0 \end{pmatrix}.$$

27) Пусть K — поле характеристики $p > 0$, G — формальная группа размерности 2, определенная законом $f_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X_1 + Y_1 + X_1Y_1$, $f_2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X_2 + Y_2\left(1 + X_1^p\right)$. Показать, что G некоммутативна, а ее алгебра Ли коммутативна.

§ 2

1) Будем использовать обозначения T, J, T_n из определения 1 и n° 6. Пусть t — однородный тензор степени p алгебры T и σ — перестановка на множестве $\{1, 2, \ldots, p\}$. Тогда $t - \sigma t \in J + T_{p-1}$. (Свести к случаю, когда σ — транспозиция двух последовательных индексов.)

2) Предположим, что K — поле. Пусть $\mathfrak{g}$ есть K-алгебра Ли, а U — ее универсальная обертывающая алгебра.

а) Пусть u, v — элементы из U. Если u — элемент с фильтрацией $> n$, а v — с фильтрацией $> p$, то uv — элемент с фильтрацией $> n + p$ (использовать теорему 1).

б) Вывести из а), что единственными обратимыми элементами в U являются скаляры.

в) Вывести из б), что радикал U равен нулю.

3) Предположим, что K — поле. Пусть $\mathfrak{g}$ есть K-алгебра Ли, U — ее универсальная обертывающая алгебра. Левое регулярное представление U соответствует представлению ρ алгебры $\mathfrak{g}$ в пространстве U. Показать, что множество U_+ элементов из U без свободного члена устойчиво относительно ρ и что U_+ не обладает дополнением в U, устойчивым относительно ρ. В частности ρ не является полупростым. (Сравнить это с теоремой 2 из § 6.)

4) Предположим, что K — поле.

а) Проверить, что существует алгебра Ли $\mathfrak{g}$ размерности 3 с базисом (x, y, z), такая, что $[x, y] = z$, $[x, z] = [y, z] = 0$. Пусть U — универсальная обертывающая алгебра для $\mathfrak{g}$. Показать, что центр U является подалгеброй, порожденной 1 и z. (Рассмотреть для любого $\xi \in \mathfrak{g}$ дифференцирование симметрической алгебры S алгебры $\mathfrak{g}$, продолжающее $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,\xi$, и найти элементы из S, аннулируемые этим дифференцированием; применить затем последнее замечание из n° 8.)

б) Проверить, что существует трехмерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ с базисом (x, y, z), такая, что $[x, y] = y$, $[x, z] = z$, $[y, z] = 0$. Показать, что центр универсальной обертывающей алгебры для $\mathfrak{g}$ состоит лишь из скаляров. (Использовать тот же метод.)

5) Предположим, что K имеет характеристику $p > 0$ (p — простое). Предположим, что $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над K с базисом, канонически отождествляемая с подмодулем своей универсальной обертывающей алгебры U. Для того чтобы эндоморфизм φ K-модуля $\mathfrak{g}$ был p-отображением, необходимо и достаточно, чтобы $x \longmapsto x^p - \varphi(x)$ было полулинейным отображением (относительно $\lambda \longmapsto \lambda^p$) алгебры $\mathfrak{g}$ в центр U. Вывести отсюда, что если (b_λ) — базис алгебры $\mathfrak{g}$, то для того, чтобы в $\mathfrak{g}$ существовало p-отображение, необходимо и достаточно, чтобы для любого λ существовало $c_\lambda \in \mathfrak{g}$, такое, что $(\mathrm{ad}\, b_\lambda)^p = \mathrm{ad}\, c_\lambda$; если это так, то существует единственное p-отображение $x \longmapsto x^{[p]}$, такое, что $b_\lambda^{[p]} = c_\lambda$ для любого λ.

6) Пусть $\mathfrak{g}$ есть p-алгебра Ли над кольцом K характеристики $p > 0$ (p простое), U — ее универсальная обертывающая алгебра и σ — каноническое отображение $\mathfrak{g}$ в U. Пусть J — двусторонний идеал в U, порожденный элементами $(\sigma(x))^p - \sigma(x^{[p]})$, где x пробегает $\mathfrak{g}$. Назовем *ограниченной универсальной обертывающей алгеброй* алгебры $\mathfrak{g}$ ассоциативную алгебру $\widetilde{U} = U/J$. Отображение σ индуцирует посредством факторизации отображение $\widetilde{\sigma}$ (называемое каноническим) алгебры $\mathfrak{g}$ в $\widetilde{U}$, которое является p-гомоморфизмом (если $\widetilde{U}$ рассматривать как p-алгебру Ли).

а) Алгебра $\widetilde{U}$ и отображение $\widetilde{\sigma}$ являются решением следующей задачи об универсальном отображении: для любого p-гомоморфизма f алгебры $\mathfrak{g}$ в ассоциативную алгебру B над K (рассматриваемую как p-алгебра Ли) существует и единственен K-гомоморфизм f' алгебры $\widetilde{U}$ в B (относительно ассоциативных структур), такой, что $f = f' \circ \widetilde{\sigma}$.

б) Показать, что если $(b_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ — базис в $\mathfrak{g}$ (Λ вполне упорядочено), то $\widetilde{\sigma}$ инъективно, и если отождествить x с $\widetilde{\sigma}(x)$ для всех $x \in \mathfrak{g}$, то элементы $\prod_\lambda b_\lambda^{\nu_\lambda}$ (где λ возрастают и ν_λ равны нулю почти для всех λ, причем $0 \leqslant \nu_\lambda < p$ для всех λ) образуют базис в $\widetilde{U}$. (Отождествив канонически $\mathfrak{g}$ с подмодулем в U, положить $\varphi(x) = x^p - x^{[p]}$ для любого $x \in \mathfrak{g}$. Для любого составного индекса $\alpha = (\alpha_\lambda) \in \mathbf{N}^{(L)}$ пусть $\alpha_\lambda = \beta_\lambda + p\gamma_\lambda$, где $0 \leqslant \beta_\lambda < p$, и пусть $T_\alpha = \left(\prod_\lambda b_\lambda^{\beta_\lambda}\right)\left(\prod_\lambda (\varphi(b_\lambda))^{\gamma_\lambda}\right)$. Показать, что T_α образуют базис в U, а T_α с $\gamma = (\gamma_\lambda) \neq 0$ — базис в J; заметить, что $\varphi(b_\lambda)$ принадлежат центру U.)

7) Пусть $\mathfrak{g}$ есть p-алгебра Ли над кольцом K характеристики $p > 0$ (p простое). Говорят, что дифференцирование D является *р-диффгренцированием*, если $D(x^p) = (\mathrm{ad}\, x)^{p-1} . Dx$ для любого $x \in \mathfrak{g}$. Любое внутреннее дифференцирование является p-дифференцированием.

а) Пусть L — ассоциативная K-алгебра. Тогда любое дифференцирование L является p-дифференцированием, если рассматривать L как p-алгебру Ли. (Использовать формулу (2) из упражнения 19 § 1.)

б) Предположим, что $\mathfrak{g}$ обладает базисом. Для того чтобы некоторое дифференцирование $\mathfrak{g}$ было p-дифференцированием, необходимо и достаточно, чтобы оно допускало продолжение до дифференцирования ограниченной универсальной обертывающей алгебры для $\mathfrak{g}$. Вывести отсюда, что p-дифференцирования $\mathfrak{g}$ образуют p-подалгебру Ли p-алгебры дифференцирований алгебры $\mathfrak{g}$.

в) Если D есть p-дифференцирование $\mathfrak{g}$, то ядро D^k является p-подалгеброй в $\mathfrak{g}$.

г) Для любого дифференцирования D алгебры $\mathfrak{g}$ элемент $D(x^p) - (\mathrm{ad}\, x)^{p-1} . Dx$ принадлежит центру $\mathfrak{g}$ для любого $x \in \mathfrak{g}$ (использовать формулу (2) упражнения 19 § 1, полагая $L = \mathscr{L}(\mathfrak{g})$.)

8) Показать, что теорема 1 остается верной, если модуль $\mathfrak{g}$ является прямой суммой циклических подмодулей. (Заменить в доказательстве модуль P симметрической алгеброй алгебры $\mathfrak{g}$.)

9) Пусть k — поле из двух элементов, V — векторное пространство k^3, (x_1, x_2, x_3) — его канонический базис и K — внешняя алгебра пространства V, являющаяся восьмимерной коммутативной алгеброй над k. Пусть $\mathfrak{g}$ есть K-алгебра Ли с базисом $(e_1, e_2, e_3, e_{12}, e_{13}, e_{23})$, такая, что $[e_1, e_2] = [e_2, e_1] = e_{12}$, $[e_1, e_3] = [e_3, e_1] = e_{13}$, $[e_2, e_3] = [e_3, e_2] = e_{23}$, а остальные коммутаторы равны

нулю. Пусть $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, порожденный $u = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$. Как модуль $\mathfrak{h}$ порожден u, причем $[u, e_1] = x_2e_{12} + x_3e_{13}$, $[u, e_2] = x_1e_{12} + x_3e_{23}$, $[u, e_3] = x_1e_{13} + x_2e_{23}$. Пусть $v = x_1x_2e_{12} + x_1x_3e_{13} + x_2x_3e_{23}$.

а) Показать, что $v \notin \mathfrak{h}$. (Рассмотреть K-линейную форму φ на $\mathfrak{g}$, такую, что $\varphi(e_1) = \varphi(e_2) = \varphi(e_3) = 0$, $\varphi(e_{12}) = x_3$, $\varphi(e_{13}) = x_2$, $\varphi(e_{23}) = x_1$.)

б) Пусть f — линейное отображение $\mathfrak{g}$ в ассоциативную K-алгебру, такое, что $f([x, y]) = f(x)f(y) - f(y)f(x)$ для любых x, y из $\mathfrak{g}$. Показать, что $f(v) = f(u)^2$.

в) Вывести из а) и б), что каноническое отображение алгебры Ли $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ в ее универсальную обертывающую алгебру неинъективно.

10) Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли над полем, U — ее универсальная обертывающая алгебра, U_n — множество элементов из U с фильтрацией $\leqslant n$.

а) Пусть $x \in U_n$, $y \in U_n$ — два ненулевых элемента. Показать, что существуют $u \in U$, $v \in V$, такие, что $ux = vy$. (Сравнить размерности $\dim(U_px) = \dim U_p$, $\dim(U_py) = \dim U_p$ и $\dim U_{p+n}$. Вывести отсюда, что $U_px \cap U_py \neq \{0\}$ для достаточно больших p.)

б) Показать, что U обладает левым телом частных (*Алг.*, гл. I, § 9, упражнение 8), которое является в то же время и правым телом частных.

§ 3

1) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, ρ — представление $\mathfrak{g}$ в K-модуле M, σ — ассоциированное с ним представление $\mathfrak{g}$ в тензорной алгебре модуля M. Показать, что подмодуль симметрических тензоров и подмодуль антисимметрических тензоров являются устойчивыми относительно σ.

2) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, ρ — представление $\mathfrak{g}$ в K-модуле M, σ — ассоциированное с ним представление $\mathfrak{g}$ в $Q = \mathscr{L}(M, M; M)$. Для того чтобы элемент $f \in Q$ был инвариантным относительно σ, необходимо и достаточно, чтобы $\rho(x)$ были дифференцированиями модуля M, наделенного умножением при помощи f.

3) Пусть V — конечномерное векторное пространство над совершенным полем K.

а) Тождественное отображение алгебры $\mathfrak{gl}(V)$ определяет каноническим образом представление алгебры $\mathfrak{gl}(V)$ в $\bigotimes^p V$ и $\bigotimes^q V^*$, а значит, и представление $u \longmapsto u^p_q$ алгебры $\mathfrak{gl}(V)$ в $V^p_q = \left(\bigotimes^p V\right) \otimes \left(\bigotimes^q V^*\right)$. Показать, что эндоморфизм u^p_q полупрост, если полупрост u. (Расширяя поле скаляров, свести доказательство к случаю, когда K алгебраически замкнуто.) Показать, что u^p_q нильпотентен, если нильпотентен u. Вывести отсюда, что если s и n — полупростая и нильпотентная компоненты u, то s^p_q и n^p_q — полупростая и нильпотентная компоненты эндоморфизма u^p_q.

б) Вывести из а), что если элемент из V^p_q аннулируется эндоморфизмом u^p_q, то он аннулируется s^p_q и n^p_q.

в) Вывести из б) и упражнения 2, что если V наделено структурой не обязательно ассоциативной алгебры и если u — дифференцирование V, то s и n — дифференцирования V.

¶ 4) Предположим, что K — поле. Пусть $\mathfrak{g}$ есть K-алгебра Ли.

а) Пусть M и N — два $\mathfrak{g}$-модуля, причем N конечномерен над K. Пусть $(f_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ — базис N над K. Если элементы $e_1, \ldots, e_n$ модуля M, не все

равные 0, таковы, что элемент $\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i$ инвариантен в $M \otimes N$, то подпространство M_1 модуля M, порожденное $e_1, \ldots, e_n$, устойчиво относительно x_M; если, кроме того, N — простой модуль, то представление $\mathfrak{g}$ в M_1 дуально представлению $\mathfrak{g}$ в N.

б) Пусть M_1, M_2, N, N^* суть $\mathfrak{g}$-модули, конечномерные над K. Предположим, что модули M_1 и M_2 простые и что представления $\mathfrak{g}$ в N и N^* дуальны. Для того чтобы $\mathfrak{g}$-модуль M_1 был изоморфен $\mathfrak{g}$-подмодулю в $M_2 \otimes N$, необходимо и достаточно, чтобы M_2 был изоморфен $\mathfrak{g}$-подмодулю в $M_1 \otimes N^*$. (Использовать предложение 4; рассмотреть представление $\mathfrak{g}$ в $M_1^* \otimes M_2 \otimes N$ и применить а) к представлению, дуальному к этому последнему.)

¶ 5) Предположим, что K — поле характеристики 0. Пусть V — конечномерное векторное пространство над K, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(V)$, U — универсальная обертывающая алгебра для $\mathfrak{g}$, U_n — множество элементов с фильтрацией $\leqslant n$ в U, U^n — множество образов в U однородных симметрических тензоров степени n над $\mathfrak{g}$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ — базис векторного пространства $\mathfrak{g}$. Пусть $W_s = \bigotimes^s V$. Тождественное представление $\mathfrak{g}$ определяет ее представление в W_s, которое продолжается до гомоморфизма π_s алгебры U в алгебру $M_s = \mathscr{L}(W_s)$.

а) Пусть M'_s — подпространство в M_s, порожденное элементами вида $\beta_1 \otimes \beta_2 \otimes \ldots \otimes \beta_s$, где $\beta_i \in \mathscr{L}(V)$ и $\beta_i = 1$ по крайней мере для одного i. Пусть z — элемент из U_s, $z_0 = \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_s \leqslant m} a_{i_1 \ldots i_s} \alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_s}$ — его компонента в U^s, где $a_{i_1 \ldots i_s}$ симметричны относительно перестановок индексов. Показать, что

$$\pi_s(z) \equiv s! \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_s \leqslant m} a_{i_1 \ldots i_s} \alpha_{i_1} \otimes \ldots \otimes \alpha_{i_s} \quad \left(\operatorname{mod} M'_s\right).$$

б) Вывести из а), что для любого $z \in U$ существует конечномерное представление π алгебры U, такое, что $\pi(z) \neq 0$. (Одно из следствий из этого упражнения см. в § 7, упражнение 3.)

6) Предположим, что K — поле. Пусть $\mathfrak{g}$ есть K-алгебра Ли, $x \longmapsto x_M$ — конечномерное представление $\mathfrak{g}$, $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис в M и $\left(e_1^*, \ldots, e_n^*\right)$ — дуальный базис.

а) Пусть f — линейная форма на $\bigotimes^r M$; тогда

$$f = \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_r \leqslant n} f\left(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r}\right)\left(e_{i_1}^* \otimes \ldots \otimes e_{i_r}^*\right).$$

б) Пусть β — невырожденная билинейная форма на M, инвариантная относительно $\mathfrak{g}$. Пусть $\left(e'_1, \ldots, e'_n\right)$ — базис в M, такой, что $\beta\left(e_i, e'_j\right) = \delta_{ij}$. Пусть f — инвариантная линейная форма на $\bigotimes^r M$. Вывести из а), что

$$\sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_r \leqslant n} f\left(e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_r}\right)\left(e'_{i_1} \otimes \ldots \otimes e'_{i_r}\right)$$

— инвариантный элемент в $\bigotimes^r M$, не зависящий от выбора базиса (e_i).

в) Пусть U — универсальная обертывающая алгебра для $\mathfrak{g}$, U^* — пространство, дуальное к пространству U. Присоединенное представление $\mathfrak{g}$

продолжается до представления $x \mapsto x_U$ алгебры $\mathfrak{g}$ в U, определяемого формулой $x_U u = xu - ux$ для любого $u \in U$. Поэтому U^* наделено структурой $\mathfrak{g}$-модуля. Для того чтобы элемент f пространства U^* был инвариантным, необходимо и достаточно, чтобы $f(uv) = f(vu)$ для любых u, v из U.

г) Пусть $\mathfrak{h}$ — конечномерный идеал алгебры $\mathfrak{g}$, γ — инвариантная билинейная форма на $\mathfrak{g}$, ограничение которой на $\mathfrak{h}$ невырожденно. Пусть $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, $(y'_i)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ — два базиса $\mathfrak{h}$, такие, что $\gamma(y_i, y'_j) = \delta_{ij}$. Пусть r — целое число $\geqslant 1$. Пусть f — линейная форма на U, такая, что $f(uv) = f(vu)$ для любых u, v из U. Вывести из б) и в), что

$$\sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_r \leqslant n} f(y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_r}) y'_{i_1} y'_{i_2} \ldots y'_{i_r}$$

— элемент центра U, не зависящий от выбора базиса (y_i). Отыскать, в частности, заново элемент Казимира.

д) Пусть θ — перестановка индексов $\{1, \ldots, r\}$. Рассуждая аналогичным образом, показать, что

$$\sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_r \leqslant n} f(y_{i_{\theta(1)}} y_{i_{\theta(2)}} \ldots y_{i_{\theta(r)}}) y'_{i_1} y'_{i_2} \ldots y'_{i_r}$$

— элемент центра U, не зависящий от выбора базиса (y_i).

7) Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная алгебра Ли, β — ее форма Киллинга, $\mathfrak{g}_0$ — алгебра Ли, получающаяся из $\mathfrak{g}$ сужением поля скаляров до $\mathbf{R}$. Показать, что форма Киллинга алгебры $\mathfrak{g}_0$ равна удвоенной вещественной части формы β.

8) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Полилинейная форма

$$(x_1, \ldots, x_n) \to \operatorname{Tr}(\operatorname{ad} x_1 \circ \operatorname{ad} x_2 \circ \ldots \circ \operatorname{ad} x_n)$$

на $\mathfrak{g}^n$ инвариантна.

9) Пусть $\mathfrak{g}$ есть K-алгебра Ли, ρ и ρ' — полупростые представления $\mathfrak{g}$ в K-модулях V и V', а φ — гомоморфизм $\mathfrak{g}$-модуля V на $\mathfrak{g}$-модуль V'. Показать, что при отображении φ образ множества инвариантных элементов в V' является множеством инвариантных элементов в V' (использовать предложение 6).

10) Предположим, что K — поле. Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная K-алгебра Ли, M_1 и M_2 — два простых неизоморфных $\mathfrak{g}$-модуля, конечномерных над K. Если K_1 — сепарабельное расширение K, то показать, что не существует $\mathfrak{g}_{(K_1)}$-модуля, являющегося простым и изоморфного одновременно подмодулю $\mathfrak{g}_{(K_1)}$-модуля $M_{1(K_1)}$ и подмодулю $\mathfrak{g}_{(K_1)}$-модуля $M_{2(K_1)}$. (Использовать предложение 4 и заметить, что существование ненулевого инвариантного элемента в $M^*_{1(K_1)} \otimes_{K_1} M_{2(K_1)}$ влечет существование ненулевого инвариантного элемента в $M^*_1 \otimes_K M_2$ (*Алг.*, гл. II, § 5, n° 3, теорема 1)).

11) Пусть $\mathfrak{w}$ есть p-алгебра Ли, определенная в упражнении 21, § 1. Показать что ее форма Киллинга является нулевой.

¶ 12) Предположим, что K — поле. Пусть $\mathfrak{g}$ — некоторая K-алгебра Ли, а M — произвольный $\mathfrak{g}$-модуль. Обозначим через $C^p(\mathfrak{g}, M)$ пространство знакопеременных полилинейных отображений $\mathfrak{g}^p$ в M. Положим $C^0(\mathfrak{g}, M) = M$ и $C^p(\mathfrak{g}, M) = \{0\}$ при $p < 0$. Пусть $C^*(\mathfrak{g}, M)$ — прямая сумма $C^p(\mathfrak{g}, M)$. Элементы из $C^*(\mathfrak{g}, M)$ называются *коцепями* $\mathfrak{g}$ *со значениями в* M; те из них, которые принадлежат $C^p(\mathfrak{g}, M)$, называются p-мерными коцепями. Для любого $y \in \mathfrak{g}$ через $i(y)$ обозначим эндоморфизм $C^*(\mathfrak{g}, M)$, который отображает каждое подпространство $C^p(\mathfrak{g}, M)$ в $C^{p-1}(\mathfrak{g}, M)$ и для каждого

$p > 0$ задается формулой

$$(i(y)f)(x_1, \ldots, x_{p-1}) = f(y, x_1, \ldots, x_{p-1}). \tag{1}$$

Имеем $i(y)^2 = 0$.

а) Присоединенное представление $\mathfrak{g}$ и представление $\mathfrak{g}$ в M определяют представление $\mathfrak{g}$ в пространстве полилинейных отображений $\mathfrak{g}^p$ в M. Показать, что $C^p(\mathfrak{g}, M)$ устойчиво относительно этого представления. Пусть θ — представление $\mathfrak{g}$ в $C^*(\mathfrak{g}, M)$, таким образом определенное. Показать, что

$$\theta(x)\, i(y) - i(y)\,\theta(x) = i([x, y]) \tag{2}$$

для любых x, y из $\mathfrak{g}$.

б) Показать, что существует единственный эндоморфизм d модуля $C^*(\mathfrak{g}, M)$, отображающий $C^p(\mathfrak{g}, M)$ в $C^{p+1}(\mathfrak{g}, M)$, такой, что

$$d i(y) + i(y) d = \theta(y) \tag{3}$$

для любого $y \in \mathfrak{g}$. (Рассуждать индукцией по размерности коцепей.) Показать, что для любого $f \in C^p(\mathfrak{g}, M)$

$$df(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j], x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, \hat{x}_j, \ldots, x_{p+1}) + \\ + \sum_i (-1)^{i+1} (x_i)_M f(x_1, \ldots, \hat{x}_i, \ldots, x_{p+1})$$

(где значок ^ над буквой означает, что ее следует опустить).

в) Показать, что для любого $y \in \mathfrak{g}$

$$d\theta(y) = \theta(y)\, d. \tag{4}$$

(Показать сначала, используя (2) и (3), что $d\theta(y) - \theta(y)\, d$ перестановочно с любым $i(x)$. Затем доказывать индукцией по размерности коцепей.)

г) Показать, что $d^2 = 0$. (Показать сначала, используя (3) и (4), что d^2 перестановочно с любым $i(x)$. Затем доказывать индукцией по размерности коцепей.)

д) Ограничение d на $C^p(\mathfrak{g}, M)$ имеет ядро $Z^p(\mathfrak{g}, M)$, элементы которого называются p-мерными *коциклами* со значениями в M. Ограничение d на $C^{p-1}(\mathfrak{g}, M)$ имеет образ $B^p(\mathfrak{g}, M)$, элементы которого называются *кограницами* размерности p со значениями в M. Имеем $B^p(\mathfrak{g}, M) \subset Z^p(\mathfrak{g}, M)$. Факторпространство $Z^p(\mathfrak{g}, M)/B^p(\mathfrak{g}, M) = H^p(\mathfrak{g}, M)$ называется *пространством p-мерных когомологий* алгебры $\mathfrak{g}$ со значениями в M. Через $H^*(\mathfrak{g}, M)$ будем обозначать прямую сумму пространств $H^p(\mathfrak{g}, M)$. Показать, что $H^0(\mathfrak{g}, M)$ совпадает с множеством инвариантных элементов модуля M. Пусть φ — гомоморфизм $\mathfrak{g}$-модуля M в $\mathfrak{g}$-модуль N. Для любого $f \in C^p(\mathfrak{g}, M)$ имеем $\varphi \circ f \in C^p(\mathfrak{g}, N)$, так что φ продолжается до K-линейного отображения $\varphi'\colon C^*(\mathfrak{g}, M) \to C^*(\mathfrak{g}, N)$. Показать, что $\varphi' \circ d = d \circ \varphi'$. Вывести отсюда, что φ' определяет гомоморфизм $\tilde{\varphi}\colon H^*(\mathfrak{g}, M) \to H^*(\mathfrak{g}, N)$, который называется ассоциированным с φ.

е) Пусть L есть $\mathfrak{g}$-подмодуль модуля M и обозначим $\mathfrak{g}$-фактормодуль M/L через N. Канонические гомоморфизмы $L \xrightarrow{i} M \xrightarrow{p} N$ определяют гомоморфизмы

$$C^*(\mathfrak{g}, L) \xrightarrow{i'} C^*(\mathfrak{g}, M) \xrightarrow{p'} C^*(\mathfrak{g}, N),$$

$$H^n(\mathfrak{g}, L) \xrightarrow{i^n} H^n(\mathfrak{g}, M) \xrightarrow{p^n} H^n(\mathfrak{g}, N).$$

Показать, что i' инъективен и что его образом является ядро гомоморфизма p', причем p' сюръективен. Для любого $c \in H^n(\mathfrak{g}, N)$ пусть $z \in Z^n(\mathfrak{g}, N)$ — представитель c, а $a \in C^n(\mathfrak{g}, M)$ таков, что $p'(a) = z$; показать, что

$da \in Z^{n+1}(\mathfrak{g}, L)$ и что его класс в $H^{n+1}(\mathfrak{g}, L)$ не зависит от c; обозначим этот класс через $\delta^n c$. Показать, что последовательность гомоморфизмов

$$0 \to H^0(\mathfrak{g}, L) \xrightarrow{i^0} H^0(\mathfrak{g}, M) \xrightarrow{p^0} H^0(\mathfrak{g}, N) \xrightarrow{\delta^0}$$
$$\xrightarrow{\delta^0} H^1(\mathfrak{g}, L) \xrightarrow{i^1} H^1(\mathfrak{g}, M) \xrightarrow{p^1} H^1(\mathfrak{g}, N) \xrightarrow{\delta^1} \ldots$$

является точной.

ж) В обозначениях е) точная последовательность

$$0 \to \mathscr{L}(N, L) \to \mathscr{L}(N, M) \to \mathscr{L}(N, N) \to 0$$

определяет точную последовательность

$$H^0(\mathfrak{g}, \mathscr{L}(N, M)) \to H^0(\mathfrak{g}, \mathscr{L}(N, N)) \to H^1(\mathfrak{g}, \mathscr{L}(N, L)).$$

Тождественное отображение N является инвариантом $u \in \mathscr{L}(N, N)$, а значит, элементом из $H^0(\mathfrak{g}, \mathscr{L}(N, N))$; пусть c — его образ в $H^1(\mathfrak{g}, \mathscr{L}(N, L))$. Тогда для того, чтобы в M существовал $\mathfrak{g}$-подмодуль, дополнительный к L, необходимо и достаточно, чтобы $c = 0$. (Это условие означает, что u — образ элемента из $H^0(\mathfrak{g}, \mathscr{L}(N, M))$, т. е. гомоморфизма v $\mathfrak{g}$-модуля N в $\mathfrak{g}$-модуль M; тогда $v(N)$ — искомое дополнение.)

з) Показать, что $Z^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ (где $\mathfrak{g}$ рассматривается как $\mathfrak{g}$-модуль относительно присоединенного представления) совпадает с векторным подпространством дифференцирований $\mathfrak{g}$ и что $B^1(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ совпадает с подпространством внутренних дифференцирований $\mathfrak{g}$.

и) Пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — две K-алгебры Ли, причем $\mathfrak{b}$ коммутативна, и $\mathfrak{b} \xrightarrow{\lambda} \mathfrak{g} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{a}$ — расширение $\mathfrak{a}$ при помощи $\mathfrak{b}$. Для любого $x \in \mathfrak{g}$ ограничение $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ на $\mathfrak{b}$ зависит только от класса x по модулю $\mathfrak{b}$, т. е. от структуры $\mathfrak{a}$-модуля на $\mathfrak{b}$. Пусть ν есть K-линейное отображение $\mathfrak{a}$ в $\mathfrak{g}$, такое, что $\mu \circ \nu$ — тождественное отображение $\mathfrak{a}$. Для любых x, y из $\mathfrak{a}$ положим $f(x, y) = [\nu x, \nu y] - \nu([x, y])$. Показать, что $f \in Z^2(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ и что класс c элемента f в $H^2(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ не зависит от выбора ν. Для того чтобы два расширения $\mathfrak{a}$ при помощи $\mathfrak{b}$, определяющие одинаковую структуру $\mathfrak{a}$-модуля на $\mathfrak{b}$, были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы совпадали соответствующие им элементы $c \in H^2(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$. Для того чтобы расширение было расщепляемым (или несущественным), необходимо и достаточно, чтобы $c = 0$. Если B есть $\mathfrak{a}$-модуль и если $c \in H^2(\mathfrak{a}, B)$, то существует расширение $\mathfrak{a}$ при помощи B (рассматриваемого как коммутативная алгебра Ли), определяющее данную структуру $\mathfrak{a}$-модуля на B и данный элемент c из $H^2(\mathfrak{a}, B)$.

к) Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли над K, U — ее универсальная обертывающая алгебра, $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, β — билинейная инвариантная форма на $\mathfrak{g}$, ограничение которой на $\mathfrak{h}$ невырожденно, $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ и $(y'_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — два базиса в $\mathfrak{h}$, такие, что $\beta(y_i, y'_j) = \delta_{ij}$, $t = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i y'_i \in U$, M — произвольный $\mathfrak{g}$-модуль, ρ — эндоморфизм $C^*(\mathfrak{g}, M)$, который отображает каждое пространство $C^p(\mathfrak{g}, M)$ в $C^{p-1}(\mathfrak{g}, M)$ и который при $p > 0$ определен формулой

$$(\rho f)(x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}) = \sum_{k=1}^{n} (y_k)_M f(y'_k, x_1, \ldots, x_{p-1}).$$

Пусть, наконец, Γ — эндоморфизм $C^*(\mathfrak{g}, M)$, продолжающий t_M и отображающий каждую положительномерную коцепь в коцепь $t_M \circ f$. Показать,

что $\rho d + d\rho = \Gamma$. (Если для любого $x \in \mathfrak{g}$ положить

$$[x, y_k] = \sum_{l=1}^{n} a_{kl} y_l, \quad [x, y'_k] = \sum_{l=1}^{n} a'_{kl} y'_l,$$

то нужно сначала показать, что $a_{kl} = -a'_{lk}$.) Вывести отсюда, что $\Gamma d = d\Gamma$. Показать, что если M — конечномерный простой модуль, β — ассоциированная с ним билинейная форма и если $\dim \mathfrak{h}$ не делится на характеристику K, то $H^p(\mathfrak{g}, M) = \{0\}$ для любого p. (Используя предложение 12, показать, что Γ — автоморфизм пространства $C^*(\mathfrak{g}, M)$ и, значит, индуцирует автоморфизмы на $Z^p(\mathfrak{g}, M)$, $B^p(\mathfrak{g}, M)$. Для $f \in Z^p(\mathfrak{g}, M)$ имеем $\Gamma f = (d\rho + \rho d) f = d\rho f \in B^p(\mathfrak{g}, M)$, откуда $Z^p(\mathfrak{g}, M) = B^p(\mathfrak{g}, M)$.)

§ 4

Соглашения § 4 остаются в силе, если не оговорено противное.

1) Пусть $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли, p (соотв. q) — наименьшее целое число, такое, что $\mathscr{C}^p\mathfrak{g} = \{0\}$ (соотв. $\mathscr{C}_q\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$). Показать, что $p = q + 1$ и что $\mathscr{C}_i\mathfrak{g} \supset \mathscr{C}^{p-i}\mathfrak{g}$. (Использовать доказательство предложения 1.)

2) Пусть $\mathfrak{g}$ — полупрямое произведение одномерной алгебры $\mathfrak{h}$ и коммутативного идеала $\mathfrak{g}'$. Пусть $x \in \mathfrak{h}$, $x \neq 0$ и u — ограничение $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ на $\mathfrak{g}'$.

а) Для того чтобы $\mathfrak{g}$ была нильпотентной, необходимо и достаточно, чтобы u было нильпотентным.

б) Для того чтобы форма Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$ была нулевой, необходимо и достаточно, чтобы $\operatorname{Tr}(u^2) = 0$.

в) Вывести из а) и б), что существуют ненильпотентные алгебры Ли с нулевой формой Киллинга.

г) Вывести из а), что в нильпотентной алгебре Ли с $\mathscr{C}^{p-1}\mathfrak{g} \neq \{0\}$, $\mathscr{C}^p\mathfrak{g} = \{0\}$ возможно соотношение $\mathscr{C}_i\mathfrak{g} \neq \mathscr{C}^{p-i}\mathfrak{g}$.

3) а) Пусть $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли $\mathfrak{z}$ — ее центр, $\mathfrak{b}$ — ненулевой идеал в $\mathfrak{g}$. Показать, что $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{b} \neq \{0\}$. (Рассмотреть $\mathfrak{b}$ как $\mathfrak{g}$-модуль относительно присоединенного представления.)

б) Если в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ идеал $\mathfrak{b}$ содержится в $\mathscr{C}_{i+1}\mathfrak{g}$, но не содержится в $\mathscr{C}_i\mathfrak{g}$, то показать, что идеалы $\mathfrak{b} \cap \mathscr{C}_k\mathfrak{g}$ различны для любых различных $0 \leqslant k \leqslant i + 1$. (Применить а).)

4) Пусть $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли.

а) Любая подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$ субнормальна. (Использовать предложение 3.)

б) Пусть $\mathfrak{b}$ — векторное подпространство в $\mathfrak{g}$, такое, что $\mathfrak{b} + \mathscr{D}\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$. Показать, что подалгебра $\mathfrak{g}$, порожденная $\mathfrak{b}$, равна $\mathfrak{g}$. (Применить а) к этой подалгебре. Свести таким образом доказательство к случаю, когда $\mathfrak{b}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, и использовать предложение 4 из § 1.) Вывести отсюда, что минимальное число образующих алгебры $\mathfrak{g}$ равно $\dim \mathfrak{g}/\mathscr{D}\mathfrak{g}$.

5) а) Показать, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$, в которой любая подалгебра субнормальна, является нильпотентной. (Показать, что если $\dim \mathfrak{g} > 1$, то любой элемент $x \in \mathfrak{g}$ принадлежит некоторому идеалу $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$ алгебры $\mathfrak{g}$, обладающему тем же свойством, что и $\mathfrak{g}$, а следовательно, нильпотентному по предположению индукции (по размерности $\mathfrak{g}$); поэтому эндоморфизм $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ нильпотентен.)

б) Показать, что если в некоторой алгебре Ли $\mathfrak{g}$ любая подалгебра, отличная от $\mathfrak{g}$, отлична от своего нормализатора, то $\mathfrak{g}$ нильпотентна. (Свести к а).)

6) Пусть $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — коммутативный идеал $\mathfrak{g}$. Следующие условия эквивалентны: а) $\mathfrak{a}$ — максимальный коммутативный

идеал в $\mathfrak{g}$; б) $\mathfrak{a}$ — максимальная коммутативная подалгебра в $\mathfrak{g}$; в) $\mathfrak{a}$ совпадает со своим централизатором $\mathfrak{a}'$ в $\mathfrak{g}$. (Импликации не- а) $\Rightarrow$ не- б) $\Rightarrow$ не- в) очевидны. Если $\mathfrak{a}' \neq \mathfrak{a}$, то по предложению 1 существует идеал $\mathfrak{a}''$ алгебры $\mathfrak{g}$, такой, что $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}'' \subset \mathfrak{a}'$, $\dim \mathfrak{a}''/\mathfrak{a} = 1$. Тогда $\mathfrak{a}'' = \mathfrak{a} + Kx$, откуда $[\mathfrak{a}'', \mathfrak{a}''] \subset \subset [\mathfrak{a}, \mathfrak{a}] + [x, \mathfrak{a}] = \{0\}$, и, следовательно, а) не верно.)

7) а) Пусть V — конечномерное векторное пространство над K, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли нильпотентных эндоморфизмов V, $(V_r)_{0 \leqslant r \leqslant n}$ — убывающая цепочка подпространств в V, такая, что $V_0 = V$, $V_n = \{0\}$ и $\mathfrak{g}(V_r) \subset V_{r+1}$ для $0 \leqslant r < n$. Индукцией по i доказать, что $(\mathscr{D}^i\mathfrak{g})(V_r) \subset V_{r+2^i}$. Если $\dim V \geqslant 2^i$, то подпространство элементов из V, аннулируемых $\mathscr{D}^i\mathfrak{g}$, имеет размерность $\geqslant 2^i$. Если $\dim V \leqslant 2^i$, то $\mathscr{D}^i\mathfrak{g} = \{0\}$.

б) Пусть $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли, i — целое $\geqslant 0$. Если $\dim \mathscr{D}^i\mathfrak{g} > 2^i + 1$, то центр $\mathscr{D}^i\mathfrak{g}$ имеет размерность $\geqslant 2^i$. Если $\dim \mathscr{D}^i\mathfrak{g} \leqslant 2^i + 1$, то идеал $\mathscr{D}^i\mathfrak{g}$ коммутативен. (Применить а) к ограничениям на $\mathscr{D}^i\mathfrak{g}$ эндоморфизмов $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$, $x \in \mathfrak{g}$.)

в) Пусть $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли, i — целое число $\geqslant 0$. Если $\mathscr{D}^i\mathfrak{g}$ не коммутативна, то $\mathscr{D}^i\mathfrak{g}/\mathscr{D}^{i+1}\mathfrak{g}$ имеет размерность $\geqslant 2^i + 1$. (Факторизуя, если это нужно, свести задачу к случаю, когда $\dim \mathscr{D}^{i+1}\mathfrak{g} = 1$, и применить б).)

8) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{m}$ — идеал коразмерности 1, x — элемент из $\mathfrak{g}$, не принадлежащий $\mathfrak{m}$, и $z \in \mathfrak{g}$.

а) Показать, что линейное отображение D, равное нулю на $\mathfrak{m}$ и переводящее x в z, является дифференцированием тогда и только тогда, когда z принадлежит централизатору $\mathfrak{a}$ идеала $\mathfrak{m}$ в $\mathfrak{g}$.

б) Пусть q — наибольшее целое число, такое, что $\mathfrak{a} \subset \mathscr{C}^q\mathfrak{g}$. Показать что если, кроме того, $z \notin \mathscr{C}^{q+1}\mathfrak{g}$, то D не является внутренним дифференцированием алгебры $\mathfrak{g}$.

в) Вывести из а) и б), а также из упражнения 7 с), что если $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли размерности > 1, то векторное пространство внутренних дифференцирований алгебры $\mathfrak{g}$ имеет коразмерность $\geqslant 2$ в пространстве всех дифференцирований алгебры $\mathfrak{g}$.

9) а) Проверить, что следующие таблицы умножения определяют две нильпотентные алгебры Ли $\mathfrak{g}_3$, $\mathfrak{g}_4$ размерностей 3 и 4:

$$\mathfrak{g}_3\colon\ [x_1, x_2] = x_3, \quad [x_1, x_3] = [x_2, x_3] = 0;$$

$$\mathfrak{g}_4\colon\ [x_1, x_2] = x_3, \quad [x_1, x_3] = x_4, \quad [x_1 x_4] = [x_2, x_3] = [x_2, x_4] = [x_3, x_4] = 0.$$

б) Показать, что $\mathfrak{g}_3$ изоморфна $\mathfrak{n}(3, K)$, а также $\mathfrak{sl}(2, K)$, если характеристика K равна 2.

в) Пусть $\mathfrak{g}_1$ — единственная одномерная алгебра Ли. Показать, что нильпотентные алгебры Ли размерности $\leqslant 4$ исчерпываются следующей таблицей:

размерность 1: $\mathfrak{g}_1$; размерность 2: $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$;

размерность 3: $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_3$; размерность 4: $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_3 \times \mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_4$.

(Использовать упражнение 7 в). Если $\mathfrak{g}$ нильпотентна размерности 3 и $\dim \mathscr{D}\mathfrak{g} = 1$, то заметить, что $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ содержится в центре $\mathfrak{g}$ (упражнение 3 а)), откуда $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_3$. Если $\dim \mathfrak{g} = 4$, $\dim \mathscr{D}\mathfrak{g} = 1$, то заметить, что коммутатор в $\mathfrak{g}$ определяет билинейную знакопеременную форму на $\mathfrak{g}/\mathscr{D}\mathfrak{g}$, которая обязательно вырождена; вследствие этого существует подалгебра $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{g}$, содержащаяся в центре $\mathfrak{g}$, для которой $\dim \mathfrak{h} = 1$, $\mathfrak{h} \cap \mathscr{D}\mathfrak{g} = \{0\}$, т. е. $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \times \mathfrak{g}_3$. Если $\dim \mathfrak{g} = 4$, $\dim \mathscr{D}\mathfrak{g} = 2$, то $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ коммутативна; применяя теорему 1 к ограничениям на $\mathscr{Z}\mathfrak{g}$ эндоморфизмов $\operatorname{ad}_{\mathfrak{g}} x$ ($x \in \mathfrak{g}$), показать, что существует коммутативный идеал $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$, такой, что $\mathfrak{h} \supset \mathscr{D}\mathfrak{g}$, $\dim \mathfrak{h} = 3$; пусть

$x \in \mathfrak{g}$, $x \notin \mathfrak{h}$; выбрать базис в $\mathfrak{h}$, такой, что ограничение $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\, x$ на $\mathfrak{h}$ в этом базисе является жордановой матрицей; тогда $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_4$.)

10) Пусть $\mathfrak{D}$ — алгебра Ли дифференцирований алгебры $\mathfrak{g}_4$ (упражнение 9). Показать, что $\mathfrak{D}$ семимерна и что ее центр равен нулю; показать также, что идеал $\mathfrak{D}' \subset \mathfrak{D}$ внутренних дифференцирований не обладает дополнительной подалгеброй в $\mathfrak{D}$.

11) Пусть L — коммутативное кольцо, A — артинова слева алгебра над L, γ — отображение $A \times A$ в L. Определим в A закон внутренней композиции $(a, b) \mapsto a * b = ab + \gamma(a, b)\, ba$. Для любого подмножества E алгебры A обозначим через $\widetilde{E}$ подкольцо (*без единицы*) кольца A, порожденное множеством E. Показать, что если E состоит из нильпотентных элементов и, замкнуто относительно $*$, то $\widetilde{E}$ нильпотентно (т. е. существует $n > 0$, такое что $\widetilde{E}^n = \{0\}$). Доказательство можно вести следующим образом:

1° Предположить сначала, что A — простое кольцо, изоморфное, следовательно, $\mathscr{L}_D(T)$, где T — левое векторное пространство конечной размерности m над телом D. Доказывать индукцией по m. Пусть Φ — множество подмножеств $F \subset E$, замкнутых относительно $*$ и таких, что $\widetilde{F}$ нильпотентно. Показать, что Φ обладает максимальным элементом M (заметить, что $\widetilde{F}^m = \{0\}$ для любого $F \in \Phi$). Предположить, что $\widetilde{M} \neq \widetilde{E}$. Показать, что существует $a \in E$, такое, что $a \notin \widetilde{M}$ и $t * a \in \widetilde{M}$ для любого $t \in M$ (показать, что не может быть бесконечной последовательности (a_n), такой, что $a_n \in E$, $a_n \notin M$; $a_n = t_{n-1} * a_{n-1}$ при $t_{n-1} \in M$). Пусть S — подпространство в T, равное сумме $u(T)$ при $u \in \widetilde{M}$; показать, что $S \neq \{0\}$ и $S \neq T$ и что $a(S) \subset S$. Пусть N — множество $v \in E$, таких, что $v(S) \subset S$. Используя предположение индукции и рассматривая элементы из N как действующие на S и T/S, показать, что $N \in \Phi$, а это влечет за собой противоречие.

2° В общем случае использовать тот факт, что радикал A нильпотентен. Вывести из этого результата новое доказательство теоремы Энгеля.

12) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, а $\mathscr{C}^\infty\mathfrak{g}$ — пересечение всех $\mathscr{C}^p\mathfrak{g}$.

а) Алгебра Ли $\mathfrak{g}/\mathscr{C}^\infty\mathfrak{g}$ нильпотентна.

б) Показать, что существует нильпотентная подалгебра $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{g}$, такая, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + \mathscr{C}^\infty\mathfrak{g}$. (Доказывать индукцией по размерности $\mathfrak{g}$. Предположим, что $\mathfrak{g}$ ненильпотентна. Пусть x — элемент из $\mathfrak{g}$, для которого $I = \bigcap_k (\mathrm{ad}\, x)^k(\mathfrak{g}) \neq \{0\}$. Пусть $\mathfrak{n}$ — объединение ядер $(\mathrm{ad}\, x)^k$. Показать, что оно является подалгеброй в $\mathfrak{g}$ и что $\mathfrak{g}$ равно прямой сумме I и $\mathfrak{n}$. По предположению индукции $\mathfrak{n}$ равно сумме $\mathscr{C}^\infty\mathfrak{n}$ и нильпотентной подалгебры $\mathfrak{h}$. Наконец, $\mathscr{C}^\infty\mathfrak{n} \subset \mathscr{C}^\infty\mathfrak{g}$ и $I \subset \mathscr{C}^\infty\mathfrak{g}$.)

в) Проверить, что следующая таблица умножения определяет (разрешимую) алгебру Ли размерности 5:

$$[x_1, x_2] = x_5, \quad [x_1, x_3] = x_3, \quad [x_1, x_4] = -x_4, \quad [x_3, x_4] = x_5,$$

причем остальные $[x_i, x_j]$ равны нулю. Показать, что для этой алгебры Ли выполняется $\mathscr{C}^\infty\mathfrak{g} = Kx_3 + Kx_4 + Kx_5$, но не существует никакой подалгебры, дополняющей $\mathscr{C}^\infty\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}$.

¶ 13) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{z}$ — централизатор $\mathscr{C}^\infty\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}$. Если $\mathfrak{z} \not\subset \mathscr{C}^\infty\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g}$ обладает ненулевым центром. (Записать $\mathfrak{g} = \mathscr{C}^\infty\mathfrak{g} + \mathfrak{k}$, где $\mathfrak{k}$ — нильпотентная подалгебра $\mathfrak{g}$ (упражнение 12). Пусть $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{z} + \mathfrak{k}$. Пусть $\mathfrak{h}$ — нильпотентная подалгебра, такая, что $\mathfrak{g}_1 = \mathscr{C}^\infty\mathfrak{g}_1 + \mathfrak{h}$. Показать, что $\mathfrak{g} = \mathscr{C}^\infty\mathfrak{g} + \mathfrak{h}$ и что $\mathscr{C}^\infty\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{z} \cap \mathscr{C}^\infty\mathfrak{g}$. Пусть y — элемент из $\mathfrak{z}$, не принадлежащий $\mathscr{C}^\infty\mathfrak{g}$. Записать $y = x + x'$, где $x \in \mathfrak{h}$, $x' \in \mathscr{C}^\infty\mathfrak{g}_1$; имеем $x \in \mathfrak{z}$ и $x \neq 0$, следова-

тельно, $\mathfrak{z} \cap \mathfrak{h}$ — ненулевой идеал в $\mathfrak{h}$; используя упражнения 3 а), вывести отсюда, что существует ненулевой элемент в $\mathfrak{g}$, перестановочный с $\mathscr{C}^\infty\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}$.)

¶ 14) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{b}$ — субнормальная подалгебра в $\mathfrak{g}$, централизатор $\mathfrak{z}(\mathfrak{b})$ которой в $\mathfrak{b}$ равен 0.

а) Централизатор $\mathfrak{z}(\mathscr{C}^\infty\mathfrak{b})$ подалгебры $\mathscr{C}^\infty\mathfrak{b}$ в $\mathfrak{g}$ содержится в $\mathscr{C}^\infty\mathfrak{b}$. (Если $\mathfrak{z}(\mathscr{C}^\infty\mathfrak{b}) \not\subset \mathscr{C}^\infty\mathfrak{b}$, то $\mathfrak{z}(\mathscr{C}^\infty\mathfrak{b}) \not\subset \mathfrak{b}$ по упражнению 13; $\mathscr{C}^\infty\mathfrak{b}$ — идеал в $\mathfrak{g}$ (§ 1, упражнение 14); пусть $\mathfrak{c} = \mathfrak{b} + \mathfrak{z}(\mathscr{C}^\infty\mathfrak{b})$; $\mathfrak{c}$ — подалгебра, $\mathfrak{b}$ субнормальна в $\mathfrak{c}$; $\mathfrak{b}$ — идеал в $\mathfrak{b}_1 \subset \mathfrak{c}$, причем $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{b}_1$; пусть $y \in \mathfrak{b}_1$, $y \notin \mathfrak{b}$; $y = x + x'$ с $x \in \mathfrak{z}(\mathscr{C}^\infty\mathfrak{b})$, $x' \in \mathfrak{b}$; имеем $x \in \mathfrak{z}(\mathscr{C}^\infty\mathfrak{b}) \cap \mathfrak{b}_1$, $x \notin \mathfrak{b}$; $\mathfrak{d} = Kx + \mathfrak{b}$ — подалгебра; $\mathscr{C}^\infty\mathfrak{d} = \mathscr{C}^\infty\mathfrak{b}$, так как $\mathfrak{c} \cap \mathfrak{z}(\mathscr{C}^\infty\mathfrak{b}) \subset \mathscr{C}^\infty\mathfrak{b}$, откуда $\mathscr{C}^k\mathfrak{d} \subset \mathscr{C}^k\mathfrak{b}$ для любого k; $\mathfrak{z}(\mathscr{C}^\infty\mathfrak{b}) \cap \mathfrak{d} \not\subset \mathscr{C}^\infty\mathfrak{d}$, так что центр $\mathfrak{d}$ не равен 0 по упражнению 13; значит и $\mathfrak{z}(\mathfrak{b}) \neq \{0\}$, чего не может быть.)

б) Вывести из а), что если обозначить через $\mathfrak{D}$ алгебру дифференцирований $\mathscr{C}^\infty\mathfrak{b}$, а через $\mathfrak{a}$ — центр $\mathscr{C}^\infty\mathfrak{b}$, то $\dim \mathfrak{g} \leqslant \dim \mathfrak{D} + \dim \mathfrak{a}$ (рассмотреть действие $\mathfrak{g}$ на $\mathscr{C}^\infty\mathfrak{b}$ присоединенным представлением).

15) Пусть $\mathfrak{l}$ — алгебра Ли с нулевым центром, $\mathfrak{D}_1$ — алгебра Ли ее дифференцирований, $\mathfrak{D}_2$ — алгебра Ли дифференцирований $\mathfrak{D}_1, \ldots$. Тогда $\mathfrak{l}$ — идеал в $\mathfrak{D}_1$, $\mathfrak{D}_1$ — идеал в $\mathfrak{D}_2$, и т. д. (§ 1, упражнение 15в)). Пусть $\mathfrak{D}$ — алгебра Ли дифференцирований $\mathscr{C}^\infty\mathfrak{l}$, а $\mathfrak{a}$ — центр $\mathscr{C}^\infty\mathfrak{l}$.

а) Имеем $\dim \mathfrak{D}_i \leqslant \dim \mathfrak{D} + \dim \mathfrak{a}$. (Использовать предыдущее упражнение и упражнение 15 из § 1.)

б) Вывести из а), что для достаточно большого i все дифференцирования алгебры $\mathfrak{D}_i$ внутренние.

16) Пусть $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ — две K-алгебры Ли, а $\mathfrak{n}_1$ и $\mathfrak{n}_2$ — их наибольшие нильпотентные идеалы. Показать, что наибольший нильпотентный идеал в $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ равен $\mathfrak{n}_1 \times \mathfrak{n}_2$.

17) Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g}_3$ (упражнения 9а) и ее базис (x_1, x_2, x_3).

а) Пусть V — векторное пространство $K[X]$. Пусть D — оператор дифференцирования по X в V, а M — оператор умножения на X в V. Показать, что если K имеет характеристику 0, то отображение

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 \longmapsto \alpha D + \beta M + \gamma$$

является неприводимым бесконечномерным представлением ρ алгебры $\mathfrak{g}$ в V.

б) Если K — поле характеристики $p > 0$, то идеал (X^p) пространства $K[X]$ инвариантен относительно $\rho(\mathfrak{g})$. Для факторпредставления $\mathfrak{g}$ в $K[X]/(X^p)$ ни одна из прямых не является устойчивой.

18) Пусть $\mathfrak{g}$ — семимерное векторное пространство над K с базисом $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant 7}$. Определим знакопеременное коммутирование на $\mathfrak{g}$ формулами

$$[e_i, e_j] = \alpha_{ij} e_{i+j} \quad (1 \leqslant i < j \leqslant 7,\ i + j \leqslant 7), \tag{1}$$

причем все остальные коммутаторы $[e_i, e_j]$ равны нулю.

а) Для того чтобы выполнялось тождество Якоби, необходимо и достаточно, чтобы

$$-\alpha_{23}\alpha_{15} + \alpha_{13}\alpha_{24} = 0, \tag{2}$$

$$\alpha_{12}\alpha_{34} - \alpha_{24}\alpha_{16} + \alpha_{14}\alpha_{25} = 0. \tag{3}$$

б) Будем, далее, предполагать, что все α_{ij} отличны от 0. Показать, что идеалы $\mathscr{C}^2\mathfrak{g}$, $\mathscr{C}^3\mathfrak{g}$, $\mathscr{C}^4\mathfrak{g}$, $\mathscr{C}^5\mathfrak{g}$, $\mathscr{C}^6\mathfrak{g}$ обладают следующими базисами: $(e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$, (e_4, e_5, e_6, e_7), (e_5, e_6, e_7), (e_6, e_7), (e_7). Показать, что базисом централизатора $\mathfrak{h}$ идеала $\mathscr{C}^5\mathfrak{g}$ является $(e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7)$.

в) Пусть $(e'_i)_{1 \leqslant i \leqslant 7}$ — другой базис в $\mathfrak{g}$, такой, что базисом $\mathscr{C}^6\mathfrak{g}$ является (e'_7), базисом $\mathscr{C}^5\mathfrak{g}$ является $(e'_6, e'_7), \ldots$, а базисом $\mathfrak{h}$ является $(e'_2, e'_3, e'_4, e'_5, e'_6, e'_7)$. Показать, что

$$[e'_i, e'_j] = \alpha'_{ij}e_{i+j} + \beta e'_{i+j+1} + \gamma e'_{i+j+2} + \ldots + \lambda e'_7,$$

где

$$\alpha'_{14}\alpha'_{25}\alpha'^{-1}_{16}\alpha'^{-1}_{24} = \alpha_{14}\alpha_{25}\alpha^{-1}_{16}\alpha^{-1}_{24}.$$

г) Вывести отсюда, что если K бесконечно, то существует бесконечное множество попарно неизоморфных нильпотентных семимерных алгебр Ли над K, и что существуют комплексные нильпотентные алгебры Ли, которые не получаются из вещественных алгебр Ли расширением поля скаляров $\mathbf{R}$ до $\mathbf{C}$.

19) а) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{D}$ — ее алгебра Ли дифференцирований. Определим по индукции характеристические идеалы $\mathfrak{g}^{[k]}$ алгебры $\mathfrak{g}$ следующим образом: $\mathfrak{g}^{[0]} = \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^{[k+1]}$ — подпространство в $\mathfrak{g}$, порожденное элементами Dx $(D \in \mathfrak{D},\ x \in \mathfrak{g}^{[k]})$. Следующие условия эквивалентны: 1) любое дифференцирование алгебры $\mathfrak{g}$ нильпотентно; 2) $\mathfrak{g}^{[k]} = \{0\}$ для достаточно большого k; 3) голоморф $\mathfrak{g}$ нильпотентен. Если они выполнены, то алгебра $\mathfrak{g}$ называется *характеристически нильпотентной*. Такая алгебра обязательно нильпотентна.

б) Проверить, что следующая таблица умножения задает восьмимерную нильпотентную алгебру Ли:

$$[x_1, x_2] = x_3, \quad [x_1, x_3] = x_4, \quad [x_1, x_4] = x_5, \quad [x_1, x_5] = x_6,$$
$$[x_1, x_6] = x_8, \quad [x_1, x_7] = x_8, \quad [x_2, x_3] = x_5, \quad [x_2, x_4] = x_6,$$
$$[x_2, x_5] = x_7, \quad [x_2, x_6] = 2x_8, \quad [x_3, x_4] = -x_7 + x_8, \quad [x_3, x_5] = -x_8$$

и $[x_i, x_j] = 0$ для $i + j > 8$. Показать, что

$$\mathscr{C}^2\mathfrak{g} = \sum_{i=3}^{8} Kx_i, \quad \mathscr{C}^3\mathfrak{g} = \sum_{i=4}^{8} Kx_i, \quad \mathscr{C}^4\mathfrak{g} = \sum_{i=5}^{8} Kx_i, \quad \mathscr{C}^5\mathfrak{g} = \sum_{j=6}^{8} Kx_i,$$
$$\mathscr{C}^6\mathfrak{g} = Kx_8, \quad \mathscr{C}^7\mathfrak{g} = \{0\}, \ [\mathscr{C}^2\mathfrak{g}, \ \mathscr{C}^2\mathfrak{g}] = Kx_7 + Kx_8$$

и что аннулятор $\mathscr{C}^2\mathfrak{g}$ по модулю $\mathscr{C}^4\mathfrak{g}$ равен $\sum\limits_{i=2}^{8} Kx_i$. Вывести отсюда, что любое дифференцирование D алгебры $\mathfrak{g}$ определено формулами $Dx_i = \sum\limits_{j=i}^{8} u_{ij}x_j$. Показать далее, что $u_{ii} = 0$ для любого i, если характеристика поля K отлична от 2, так что $\mathfrak{g}$ — характеристически нильпотентная алгебра Ли.

в) Показать, что если характеристика K не равна 2, то алгебра Ли $\mathfrak{g}$ не является производной алгеброй никакой алгебры Ли. (Если $\mathfrak{g} = \mathscr{D}\mathfrak{h}$, то показать сначала, что $\mathfrak{h}$ нильпотентна. Заметить, что $\dim \mathfrak{g}/\mathscr{D}\mathfrak{g} = 2$, что вместе с упражнением 7 в) влечет за собой противоречие.)

¶ 20) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, U — ее универсальная обертывающая алгебра.

а) Пусть $\mathfrak{g}'$ — идеал в $\mathfrak{g}$, $U' \subset U$ — его универсальная обертывающая алгебра, $x \in \mathfrak{g}$ и $a_1, \ldots, a_n$ — элементы из U. Предположим, что $a_i = x$ для индексов $j_1, \ldots, j_p$ и $a_i \in U'$ для остальных индексов (пусть $k_1, \ldots, k_q$ — эти

индексы, причем $k_1 < k_2 < \ldots < k_q$). Тогда $a_1 a_2 \ldots a_n - x^p a_{k_1} a_{k_2} \ldots a_{k_q}$ является суммой членов вида $x^{p'} b$, где $b \in U'$ и $p' < p$. (Доказать индукцией по p.)

б) Будем предполагать далее, что $\mathfrak{g}$ нильпотентна и что характеристика поля K равна 0. Пусть $\mathfrak{g}'$ — идеал коразмерности 1 в $\mathfrak{g}$, U' — его универсальная обертывающая алгебра, x — элемент из $\mathfrak{g}$, не принадлежащий $\mathfrak{g}'$, U_0 (соотв. U'_0) — подалгебра U (соотв. U'), аннулируемая множеством $\mathfrak{d}$ дифференцирований $\mathfrak{g}$ (продолжающихся до дифференцирований U), переводящих $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}'$. Предположим, что U_0 содержится в центре U и что $U_0 \not\subset U'$. Показать, что существуют элементы $a_1 \in U'_0$, $a_2 \in U'$, такие, что $a_1 \neq 0$ и $a = xa_1 + a_2 \in U_0$. (Пусть $x^m b_m + x^{m-1} b_{m-1} + \ldots + b_0 \in U_0$, где $b_m, \ldots, b_0$ принадлежат U', $m > 0$, $b_m \neq 0$. Показать, используя а), что для любого дифференцирования $D \in \mathfrak{d}$ алгебры $\mathfrak{g}$ выполняется $Db_m = 0$, $m(Dx)b_m + Db_{m-1} = 0$, откуда $D(mxb_m + b_{m-1}) = 0$.) Показать, что U_0 содержится в алгебре $K[a, a_1^{-1}, U'_0]$, порожденной a, a_1^{-1}, U'_0 в поле частных U_0 (которое можно построить по следствию 7 теоремы 1 из § 2). Вывести отсюда, что поле частных U_0 является полем, порожденным a и U'_0. Показать, что a трансцендентно над $K[U'_0]$.

в) Пусть $\{0\} = \mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{g}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}$ — последовательность идеалов в $\mathfrak{g}$, имеющих размерности $0, 1, \ldots, n$. Пусть x_j — элемент $\mathfrak{g}_j$, не принадлежащий $\mathfrak{g}_{j-1}$. Пусть $j_1 < j_2 < \ldots < j_q$ — индексы j, такие, что в U^j (универсальной обертывающей алгебре для $\mathfrak{g}_j$) существует элемент центра U_0 алгебры U, не принадлежащий U^{j-1}. Согласно б), существуют $a_{j1} \in U_0 \cap U^j$ и $a_{j2} \in U^{j-1}$, такие, что, $a_{j1} \neq 0$ и $a_j = x_j a_{j1} + a_{j2} \in U_0 \cap U^j$. Индукцией по n показать, что $U_0 \subset K\left[a_{j_1}, \ldots, a_{j_q}, a_{j_1 1}^{-1}, \ldots, a_{j_q 1}^{-1}\right]$ и что поле частных алгебры U_0 порождено алгебраически независимыми элементами $a_{j_1}, \ldots, a_{j_q}$. В частности, поле частных центра алгебры U является чисто трансцендентным расширением K.

¶ 21) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, а σ — ее автоморфизм.

а) Предположим сначала, что K алгебраически замкнуто; для любого $\lambda \in K$ пусть L_λ — множество $x \in \mathfrak{g}$, аннулируемых некоторой степенью $\sigma - \lambda I$; $\mathfrak{g}$ равно прямой сумме L_λ. (Показать, что $[L_\lambda, L_\mu] \subset L_{\lambda\mu}$.) Заметить, что $(\sigma - \lambda\mu I)([x, y]) = [(\sigma - \lambda I)x, \sigma y] + [\lambda x, (\sigma - \mu I)y]$.

б) Для произвольного поля K предположим, что ни одно из собственных значений σ (в алгебраическом замыкании K) не является корнем из единицы. Показать, что $\mathfrak{g}$ нильпотентна. (Свести к случаю алгебраически замкнутого поля. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — различные собственные значения σ, то $\lambda_i \lambda_j$, $\lambda_i \lambda_j^2$, $\lambda_i \lambda_j^3, \ldots$ не все являются собственными значениями, поэтому эндоморфизм $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$ нильпотентен при $x \in L_{\lambda_i}$. Сделать отсюда нужный вывод при помощи упражнения 11, примененного к множеству $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$, где x пробегает объединение L_{λ_i}.)

в) При произвольном поле K предположим, что $\sigma^q = I$, где q — простое число, и что никакое собственное значение σ не равно 1. Показать, что $\mathfrak{g}$ нильпотентна. (Тем же методом, что и в б), замечая, что если $\mathfrak{g} \neq \{0\}$, то q не равно характеристике K, и что для любой пары λ_i, λ_j собственных значений σ существует целое число k, такое, что $\lambda_i \lambda_j^k = 1$.)

22) а) Пусть u, v — два эндоморфизма конечномерного векторного пространства E над алгебраически замкнутым полем K. Для любого собственного значения λ эндоморфизма u пусть E_λ — подпространство в E, состоящее из векторов, аннулируемых некоторой степенью эндоморфизма $u - \lambda I$. Показать, что если $(\operatorname{ad} u)^n v = 0$, то подпространства E_λ устойчивы относительно v.

б) Вывести из а), что если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли нильпотентных эндоморфизмов E, то E — прямая сумма подпространств F_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$, устойчивых относительно $\mathfrak{g}$ и таких, что ограничение любого элемента $u \in \mathfrak{g}$ на каждое F_j записывается в виде $\lambda_j(u) I + u_j$, где $\lambda_j(u) \in K$ и u_j нильпотентен.

в) Пусть K — поле характеристики 2, $E = K^2$ и $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра $\mathfrak{sl}(2, K)$; показать, что $m = 1$ и что для двух элементов u, v из $\mathfrak{g}$ может быть $\lambda(u + v) \neq \lambda(u) + \lambda(v)$. (Одно из следствий этого упражнения см. в § 5, упражнение 12.)

23) Пусть $\mathfrak{g}$ — некоторая p-алгебра Ли над совершенным полем K характеристики $p > 0$. Говорят, что $\mathfrak{g}$ *p-унипотентна*, если для любого $x \in \mathfrak{g}$ существует такое m, что $x^{p^m} = 0$.

а) Показать, что любая p-унипотентная p-алгебра Ли нильпотентна.

б) Предположим, что $\mathfrak{g}$ нильпотентна и через $\mathfrak{h}$ обозначим p-сердцевину центра $\mathfrak{g}$ (§ 1, упражнение 23а)). Показать, что $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ p-унипотентна.

в) Пусть $\mathfrak{g}$ — нильпотентная p-алгебра Ли, обладающая базисом из трех элементов e_1, e_2, e_3, таких, что $[e_1, e_2] = [e_1, e_3] = 0$, $[e_2, e_3] = e_1$, $e_1^p = e_1$, $e_2^p = e_3^p = 0$. Имеем $\mathfrak{h} = K e_1$, но $\mathfrak{g}$ не равна прямой сумме $\mathfrak{h}$ и p-унипотентной p-подалгебры.

г) Показать, что если $\mathfrak{g}$ p-унипотентна, то в ограниченной универсальной обертывающей алгебре для $\mathfrak{g}$ двусторонний идеал, порожденный $\mathfrak{g}$, нильпотентен. (Доказать индукцией по размерности $\mathfrak{g}$.)

24) Предположим, что поле K имеет характеристику 2. Показать, что в нильпотентной алгебре $\mathfrak{g}_4$ из упражнения 9 не существует 2-отображения.

25) Пусть $\mathfrak{g}$ — некоторая p-алгебра Ли. Показать, что наибольший нильпотентный идеал в $\mathfrak{g}$ является p-идеалом (см. § 1, упражнения 22).

26) Пусть G — группа, и пусть $(H_n)_{n \geqslant 1}$ — убывающая последовательность ее подгрупп; предположим, что $H_1 = G$ и что, если положить $(x, y) = xyx^{-1}y^{-1}$, то соотношения $x \in H_i$, $y \in H_j$ влекут за собой $(x, y) \in H_{i+j}$.

а) Пусть $G_i = H_i / H_{i+1}$; показать, что G_i коммутативна и что отображение $x, y \mapsto (x, y)$ определяет посредством факторизации $\mathbf{Z}$-билинейное отображение $G_i \times G_j$ в G_{i+j}.

б) Положим $\operatorname{gr}(G) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} G_i$ и продолжим по линейности отображения $G_i \times G_j \to G_{i+j}$, определенные в а), до $\mathbf{Z}$-билинейного отображения $\operatorname{gr}(G) \times \operatorname{gr}(G)$ в $\operatorname{gr}(G)$. Показать, что $\operatorname{gr}(G)$ — это $\mathbf{Z}$-алгебра Ли относительно данного отображения (для проверки тождества Якоби использовать следующую формулу:

$$((x, y), z^y) \cdot ((y, z), x^z) \cdot ((z, x), y^x) = e, \qquad x, y, z \text{ из } G,$$

где x^y обозначает yxy^{-1} и e — единица G).

в) Предположим, что существует такое n, что $H_n = \{e\}$. Показать, что $\operatorname{gr}(G)$ является нильпотентной $\mathbf{Z}$-алгеброй Ли.

27) Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей 1, и пусть $A_0 = A \supset A_1 \supset \ldots \supset A_n \ldots$ — убывающая последовательность двусторонних

идеалов в A, таких, что $A_i \cdot A_j \subset A_{i+j}$. Пусть G — группа с единицей e, и пусть f: $G \to A$ — отображение, такое, что $f(e) = 1$, $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$ и $1 - f(x) \in A_1$ для любого $x \in G$. Обозначим через H_n множество таких $x \in G$, что $1 - f(x) \in A_n$. Показать, что H_n удовлетворяет условиям упражнения 26. Показать, что отображение $x \longmapsto f(x) - 1$ индуцирует при факторизации инъективный гомоморфизм алгебры Ли $\mathrm{gr}(G)$ в алгебру Ли, ассоциированную с градуированным кольцом $\mathrm{gr}(A) = \sum A_n/A_{n+1}$ (ср. *Комм. алг.*, гл. III).

§ 5

Соглашения § 5, если не оговорено противное, остаются в силе.

1) Пусть $\mathfrak{g}$ — двумерная разрешимая неабелева алгебра Ли. Показать, что форма Киллинга алгебры $\mathfrak{g}$ является ненулевой, что любая инвариантная билинейная форма на $\mathfrak{g}$ вырождена и что любое дифференцирование $\mathfrak{g}$ является внутренним.

2) а) Показать, что в разрешимой трехмерной алгебре Ли над полем $\mathbf{R}$, определенной таблицей умножения $[x, y] = z$, $[x, z] = -y$, $[y, z] = 0$, не существует убывающей цепочки идеалов размерностей 3, 2, 1, 0.

б) Показать, что в двумерной разрешимой некоммутативной алгебре Ли существует цепочка идеалов размерностей 2, 1, 0, но эта алгебра не является нильпотентной.

3) Пусть $\mathfrak{g}$ — разрешимая алгебра Ли, такая, что условия $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{g}$, $[[x, y], y] = 0$ влекут за собой $[x, y] = 0$. Показать, что $\mathfrak{g}$ коммутативна. (Пусть k — наибольшее целое число, такое, что $\mathscr{D}^{k-1}\mathfrak{g} \neq \{0\}$, $\mathscr{D}^k\mathfrak{g} = \{0\}$. Считая $k \geqslant 2$, показать сначала, что $[\mathscr{D}^{k-2}\mathfrak{g}, \mathscr{D}^{k-1}\mathfrak{g}] = \{0\}$, а затем что $[\mathscr{D}^{k-2}\mathfrak{g}, \mathscr{D}^{k-2}\mathfrak{g}] = \{0\}$, а это приводит к противоречию.)

4) Показать, что центр $\mathfrak{st}(n, K)$ равен нулю и что центр $\mathfrak{n}(n, K)$ одномерен.

5) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $(\mathscr{D}^0\mathfrak{g}, \mathscr{D}^1\mathfrak{g}, \ldots, \mathscr{D}^n\mathfrak{g})$ — последовательность производных алгебр алгебры $\mathfrak{g}$ $(n \geqslant 0,\ \mathscr{D}^{n-1}\mathfrak{g} \neq \mathscr{D}^n\mathfrak{g})$. Имеем $\dim \mathscr{D}^i\mathfrak{g}/\mathscr{D}^{i+1}\mathfrak{g} \geqslant 2^{i-1} + 1$ для $1 \leqslant i \leqslant n-2$. (Факторизуя по $\mathscr{D}^n\mathfrak{g}$, свести к случаю, когда $\mathfrak{g}$ разрешима. Использовать в этом случае нильпотентность $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ и упражнение 7 в) из § 4.)

6) а) Проверить, что следующая таблица умножения определяет пятимерную разрешимую алгебру Ли $\mathfrak{g}$:

$$[x_1, x_2] = x_5, \quad [x_1, x_3] = x_3, \quad [x_2, x_4] = x_4,$$
$$[x_1, x_4] = [x_2, x_3] = [x_3, x_4] = [x_5, \mathfrak{g}] = 0.$$

б) Показать, что ортогональное дополнение к $\mathfrak{g}$ относительно формы Киллинга равно $\mathscr{D}\mathfrak{g} = Kx_3 + Kx_4 + Kx_5$. Вывести отсюда, что $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ — наибольший нильпотентный идеал в $\mathfrak{g}$.

в) Показать, что не существует подалгебры, дополняющей $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}$. Вывести отсюда, что $\mathfrak{g}$ не является полупрямым произведением коммутативной алгебры и нильпотентного идеала. (Показать, что такой нильпотентный идеал обязательно был бы равен $\mathscr{D}\mathfrak{g}$.)

7) Пусть $\mathfrak{g}$ — трехмерная разрешимая алгебра Ли с базисом (x, y, z), таким, что $[x, y] = z$, $[x, z] = y$, $[y, z] = 0$. Показать, что линейное отображение, переводящее x в $-x$, y в $-z$ и z в y, — автоморфизм порядка 4 алгебры $\mathfrak{g}$. Сравнить этот результат с упражнением 21 в) из § 4.

8) а) Пусть $\mathfrak{g}_0$ — вещественная трехмерная разрешимая алгебра Ли, такая, что $\mathscr{D}\mathfrak{g}_0$ — коммутативная алгебра размерности 2. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра, полу-

чающаяся из $\mathfrak{g}_0$ расширением поля скаляров $\mathbf{R}$ до $\mathbf{C}$. Для любого $x \in \mathfrak{g}$ пусть u_x — ограничение $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, x$ на $\mathscr{D}\mathfrak{g}$. Показать, что собственные значения u_x либо равны по абсолютной величине, либо линейно зависимы над $\mathbf{R}$. (Имеем $x = \lambda y + z$, где $z \in \mathscr{D}\mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{g}_0$, $\lambda \in \mathbf{C}$, откуда $u_x = \lambda u_y$. В то же время u_y есть $\mathbf{C}$-линейное расширение на $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ $\mathbf{R}$-линейного эндоморфизма $\mathscr{D}\mathfrak{g}_0$.)

б) Показать, что существует комплексная трехмерная разрешимая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ с коммутативной двумерной производной алгеброй $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ и элементом x, таким, что ограничение $\mathrm{ad}_\mathfrak{g}\, x$ на $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ обладает собственными значениями, не равными по абсолютной величине и линейно независимыми над $\mathbf{R}$. (Построить $\mathfrak{g}$ как полупрямое произведение одномерной алгебры и коммутативной двумерной алгебры.)

в) Показать, что алгебра, построенная в б), не может быть получена из вещественной алгебры Ли расширением поля скаляров $\mathbf{R}$ до $\mathbf{C}$.

9) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{r}$ — ее радикал, $\mathfrak{n}$ — наибольший нильпотентный идеал, а D — дифференцирование $\mathfrak{g}$. Показать, что $D(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{r} \subset \mathfrak{n}$. (Пусть $\mathfrak{d}$ — алгебра Ли дифференцирований $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{r}'$ — ее радикал. Если элемент $x \in \mathfrak{g}$ таков, что $Dx \in \mathfrak{r}$, то $\mathrm{ad}(Dx) = [D, \mathrm{ad}\, x] \in \mathscr{D}\mathfrak{d} \cap \mathfrak{r}'$ (следствие 2 предложения 5), поэтому $\mathrm{ad}(Dx)$ нильпотентен (теорема 1), так что $Dx \in \mathfrak{n}$.)

10) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{r}$ — ее радикал, $\mathfrak{a}$ — субнормальная подалгебра в $\mathfrak{g}$. Показать, что радикал $\mathfrak{a}$ равен $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{r}$. (Применить несколько раз следствие 3 предложения 5.)

11) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, ρ — ее конечномерное представление, E — ассоциативная алгебра эндоморфизмов, порожденная 1 и $\rho(\mathfrak{g})$. Показать, что наибольший идеал нильпотентности $\mathfrak{n}$ представления ρ равен множеству $\mathfrak{n}'$ элементов $x \in \mathfrak{g}$, таких, что $\mathrm{Tr}(\rho(x)\, u) = 0$ для любого $u \in E$. (Для доказательства включения $\mathfrak{n}' \subset \mathfrak{n}$ показать сначала, что $\mathfrak{n}'$ — идеал и что для любого $x \in \mathfrak{n}'$ полупростая составляющая $\rho(x)$ равна нулю; заметить с этой целью, что $\mathrm{Tr}((\rho(x))^n) = 0$ для любого целого $n > 0$.)

12) Предположим, что поле K алгебраически замкнуто. Пусть $\mathfrak{g}$—нильпотентная K-алгебра Ли. Пусть ρ — конечномерное представление $\mathfrak{g}$ в векторном пространстве V. Для любой линейной формы λ на $\mathfrak{g}$ пусть V^λ — векторное подпространство в V, состоящее из $\xi \in V$, таких, что для любого $x \in \mathfrak{g}$ имеем $(\rho(x) - \lambda(x) I)^n \xi = 0$ при достаточно большом n.

а) Подпространства V^λ устойчивы относительно $\rho(\mathfrak{g})$, и их сумма является прямой. (Использовать упражнение 22 из § 4.)

б) Имеем $V = \sum V^\lambda$. (Если каждое $\rho(x)$ имеет лишь одно собственное значение, то $V = V^{\lambda_0}$ согласно следствию 2 теоремы 1. Если $\rho(x_0)$ имеет по крайней мере два собственных значения, то V равно прямой сумме двух нетривиальных подпространств, устойчивых относительно $\rho(\mathfrak{g})$. Доказывать дальше индукцией по размерности V.)

13) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{D}$ — ее алгебра Ли дифференцирований. Для того чтобы $\mathfrak{g}$ была характеристически нильпотентной, необходимо и достаточно, чтобы $\mathfrak{D}$ была нильпотентной и чтобы $\dim \mathfrak{g} > 1$. (Чтобы убедиться в достаточности условия, записать $\mathfrak{g}$ как прямую сумму подпространств $\mathfrak{g}^\lambda$, применяя упражнение 12 к тождественному представлению $\mathfrak{D}$. Показать, что $[\mathfrak{g}^\lambda, \mathfrak{g}^\mu] \subset \mathfrak{g}^{\lambda+\mu}$ и что каждое $\mathfrak{g}^\lambda$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Вывести отсюда, что алгебра $\mathfrak{g}^\lambda$ коммутативна при $\lambda \neq 0$. Используя еще раз тот факт, что $\mathfrak{D}$ нильпотентна, показать, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0$, если $\dim \mathfrak{g} > 1$. В противном случае мы имели бы, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0 \times \mathfrak{h}$, где $\mathfrak{h}$ коммутативна. Показать сначала, что $\dim \mathfrak{h} \leqslant 1$. Если бы выполнялось $\dim \mathfrak{h} = 1$, то существовало бы дифференцирование D алгебры $\mathfrak{g}$, такое, что $D(\mathfrak{g}^0) = \{0\}$ и $D(\mathfrak{h})$ содержалось бы в центре $\mathfrak{g}^0$ (§ 4, упражнение 8а)).)

14) Пусть V — конечномерное векторное пространство над K, а z — его эндоморфизм. Примем обозначение z_q^p упражнения 3 из § 3. Говорят, что эндоморфизм z' пространства V является *репликой* z, если для любых p и q любой нуль z_q^p является нулем $z_q'^p$. Показать, что если $\operatorname{Tr}(zz') = 0$ для любой реплики z' эндоморфизма z, то z нильпотентен. (Использовать доказательство леммы 3. В обозначениях этого доказательства доказать, что именно t является репликой z.)

15) Пусть K — поле характеристики 2. Тождественное представление нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, K)$ в K^2 задает полупрямое произведение $\mathfrak{h}$ идеала K^2 и подалгебры $\mathfrak{sl}(2, K)$. Показать, что $\mathfrak{h}$ разрешима, но $\mathscr{D}\mathfrak{h}$ ненильпотентна. Вывести отсюда, что $\mathfrak{h}$ не обладает точным линейным представлением треугольными матрицами. Показать также, что не выполняются заключения упражнения 5.

16) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над произвольным полем K, A — ассоциативно-коммутативная алгебра над K и $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g} \otimes_K A$ — алгебра Ли над K.

а) Если D — дифференцирование A, то показать, что существует дифференцирование D' алгебры $\mathfrak{g}'$, и притом единственное, такое, что $D'(x \otimes a) = x \otimes Da$ для $x \in \mathfrak{g}$, $a \in A$.

б) Пусть p — простое число, G — циклическая группа порядка p, s — образующая G. Пусть K — поле характеристики p, и будем считать далее, что A — групповая алгебра группы G над K. Показать, что существует единственное дифференцирование D алгебры A, такое, что $D(s^k) = ks^{k-1}$ для любого $k \in \mathbf{Z}$. Показать, что K-линейные комбинации элементов $x \otimes (s-1)^k$ $(k = 1, 2, \ldots, p-1,\ x \in \mathfrak{g})$ образуют разрешимый идеал $\mathfrak{r}$ алгебры $\mathfrak{g}'$ и что $\mathfrak{g}'/\mathfrak{r}$ изоморфна $\mathfrak{g}$.

в) Пусть $\mathfrak{g}$ проста (см. § 6, n° 2, определение 2). Тогда $\mathfrak{r}$ — радикал $\mathfrak{g}'$, но не характеристический идеал. (Заметить, что $D(x \otimes (s-1)) = x \otimes 1$.)

17) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Предположим, что в любом неприводимом $\mathfrak{g}$-модуле M конечной размерности над K эндоморфизмы x_M попарно перестановочны. Показать, что $\mathfrak{g}$ разрешима. (Заметить, что производная алгебра $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ содержится в нильпотентном радикале и, следовательно, разрешима.)

§ 6

Соглашения § 6 остаются в силе, если не оговорено противное.

¶ 1) Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, ρ — конечномерное представление $\mathfrak{g}$ в M.

а) Если ρ — простое и ненулевое представление, то $H^p(\mathfrak{g}, M) = \{0\}$ для любого p. (Использовать предложение 1 и упражнение 12 к) из § 3.)

б) Для любого ρ имеем $H^1(\mathfrak{g}, M) = \{0\}$. (Если ρ просто и не является нулевым, то применить а). Если ρ нулевое, то использовать равенство $\mathfrak{g} = \mathscr{D}\mathfrak{g}$. В общем случае доказывать индукцией по размерности ρ: если N — некоторый $\mathfrak{g}$-подмодуль M, отличный от $\{0\}$ и M, то использовать точную последовательность:

$$H^1(\mathfrak{g}, N) \to H^1(\mathfrak{g}, M) \to H^1(\mathfrak{g}, M/N),$$

построенную в упражнении 12 е) из § 3). Получить новое доказательство замечания 2 из n° 2.

в) Вывести из б) доказательство теоремы 2. (Использовать упражнение 12 ж) из § 3.) Вывести также из б), что любое дифференцирование $\mathfrak{g}$ является внутренним. (Использовать упражнение 12 з) из § 3.)

г) Для любого ρ имеем $H^2(\mathfrak{g}, M) = \{0\}$. (Рассуждать, как и в б), причем достаточно рассмотреть случай, когда $\rho = 0$. Пусть $c \in H^2(\mathfrak{g}, M)$. Рассмот-

реть в соответствии с упражнением 12 и) из § 3 центральное расширение $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{g}$ при помощи M, определенное c. Присоединенное представление $\mathfrak{h}$ определяет представление $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{h}$. Согласно теореме 2, M обладает в $\mathfrak{h}$ дополнением, устойчивым относительно $\mathfrak{g}$, т. е. расширение является тривиальным. Поэтому $c=0$ согласно упражнению 12 и) из § 3.)

д) Вывести из б) и г) доказательство теоремы 5. (Как и в основном тексте, ограничиться случаем коммутативного радикала.)

2) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{r}$ — ее радикал, $(\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \ldots)$ — последовательность идеалов в $\mathfrak{g}$, определенная следующим образом: 1) $\mathfrak{a}_0 = \{0\}$; 2) $\mathfrak{a}_{i+1}/\mathfrak{a}_i$ — максимальный коммутативный идеал в $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}_i$. Пусть p — наименьшее целое число, для которого $\mathfrak{a}_p = \mathfrak{a}_{p+1} = \ldots$. Показать, что $\mathfrak{r} = \mathfrak{a}_p$. (Показать, что $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}_p$ полупроста).

3) Для того чтобы алгебра Ли $\mathfrak{g}$ была полупростой, необходимо и достаточно, чтобы она была редуктивной в любой алгебре Ли, содержащей $\mathfrak{g}$ в качестве подалгебры. (Если $\mathfrak{g}$ удовлетворяет этому условию, то пусть M — произвольный $\mathfrak{g}$-модуль конечной размерности над K. Рассматривая M как коммутативную алгебру, построить полупрямое произведение $\mathfrak{g}$ и M, в котором $\mathfrak{g}$ редуктивна. Вывести отсюда, что M полупроста.)

4) Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли, ρ — неприводимое ненулевое представление $\mathfrak{g}$ в конечномерном пространстве M. Пусть $\mathfrak{h}$ — соответствующее полупрямое произведение. Показать, что $\mathfrak{h} = \mathscr{D}\mathfrak{h}$, что центр $\mathfrak{h}$ равен нулю и что $\mathfrak{h}$ не является произведением полупростой и разрешимой алгебры.

5) Пусть $\mathfrak{a}$ — алгебра Ли и $\mathfrak{r}$ — ее радикал. Если $\mathfrak{r}$ обладает убывающей последовательностью характеристических идеалов $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 \supset \mathfrak{r}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{r}_n = \{0\}$, таких, что $\dim \mathfrak{r}_i/\mathfrak{r}_{i+1} = 1$ для $0 \leqslant i < n$, то $\mathfrak{g}$ равна произведению полупростой и разрешимой алгебр. (Пусть $\mathfrak{s}$ — подалгебра Леви в $\mathfrak{g}$. Для любого $x \in \mathfrak{s}$ пусть $\rho(x)$ — ограничение $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$ на $\mathfrak{r}$. Тогда ρ—прямая сумма представлений размерности 1, которые являются нулевыми, так как $\mathfrak{s} = \mathscr{D}\mathfrak{s}$.)

6) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathscr{D}^{\infty}\mathfrak{g}$ — пересечение $\mathscr{D}^{p}\mathfrak{g}$ $(p = 1, 2, \ldots)$. Показать, что $\mathfrak{g}/\mathscr{D}^{\infty}\mathfrak{g}$ разрешима и что $\mathscr{D}(\mathscr{D}^{\infty}\mathfrak{g}) = \mathscr{D}^{\infty}\mathfrak{g}$. Для того чтобы $\mathfrak{g}$ была изоморфна произведению полупростой и разрешимой алгебр, необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{D}^{\infty}\mathfrak{g}$ была полупростой.

7) а) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{h}$ — полупростой идеал в $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$ — централизатор $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$, так что $\mathfrak{g}$ совпадает с $\mathfrak{h} \times \mathfrak{a}$. Показать, что для любого идеала $\mathfrak{k}$ алгебры $\mathfrak{g}$ имеем $\mathfrak{k} = (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{h}) \times (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{a})$. (Пусть $\mathfrak{k}_1$ — каноническая проекция $\mathfrak{k}$ на $\mathfrak{h}$; это идеал в $\mathfrak{h}$, поэтому $\mathscr{D}\mathfrak{k}_1 = \mathfrak{k}_1$; вывести отсюда, что $\mathfrak{k}_1 \subset \mathfrak{k}$.)

б) Пусть β — инвариантная билинейная форма на $\mathfrak{g}$. Показать, что $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{a}$ ортогональны относительно β (использовать равенство $\mathfrak{h} = \mathscr{D}\mathfrak{h}$) и что $\beta = \beta_1 + \beta_2$, где β_1 (соотв. β_2) — билинейная инвариантная форма, ограничение которой на $\mathfrak{a}$ (соотв. на $\mathfrak{h}$) равно нулю.

в) Вывести из а), что в $\mathfrak{g}$ существует наибольший полупростой идеал. (Рассмотреть максимальный полупростой идеал $\mathfrak{g}$.)

8) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Идеал $\mathfrak{h}$ алгебры $\mathfrak{g}$ называется *минимальным*, если $\mathfrak{h} \neq \{0\}$ и если любой идеал в $\mathfrak{g}$, содержащийся в $\mathfrak{h}$, равен либо $\{0\}$, либо $\mathfrak{h}$.

а) Любой простой идеал в $\mathfrak{g}$ минимален.

б) Пусть $\mathfrak{h}$ — минимальный идеал в $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{r}$ — радикал $\mathfrak{g}$. Либо $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{r}$, и в этом случае $\mathfrak{h}$ абелев, либо $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{r} \subset \{0\}$, и в этом случае $\mathfrak{h}$ прост. (Использовать тот факт, что производная алгебра алгебры Ли и простые компоненты полупростой алгебры Ли характеристичны.)

9) Для того чтобы алгебра Ли $\mathfrak{g}$ была редуктивной, необходимо и достаточно, чтобы ее центр $\mathfrak{c}$ совпадал с наибольшим нильпотентным

идеалом. (Если это условие выполнено, то пусть $\mathfrak{r}$ — радикал $\mathfrak{g}$; $\mathscr{D}\mathfrak{r}$ содержится в центре $\mathfrak{r}$, поэтому $\mathfrak{r}$ нильпотентно и $\mathfrak{r}=\mathfrak{c}$.)

10) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, такая, что условия $x\in\mathfrak{g}$, $y\in\mathfrak{g}$, $[[x, y], y]=0$ влекут за собой $[x, y]=0$. Показать, что $\mathfrak{g}$ редуктивна. (Показать, что радикал $\mathfrak{r}$ алгебры $\mathfrak{g}$ коммутативен, и применить упражнение 3 из § 5. Показать затем, что $[\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]=0$.)

¶ 11) а) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{r}$ — ее радикал, $\mathfrak{s}$ — ее подалгебра Леви и $\mathfrak{m}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, содержащий $\mathfrak{r}$. Существует идеал $\mathfrak{h}$ подалгебры $\mathfrak{s}$, дополняющий $\mathfrak{m}$ в $\mathfrak{g}$, такой, что $[\mathfrak{m}, \mathfrak{h}]\subset\mathfrak{r}$.

б) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — субнормальная подалгебра в $\mathfrak{g}$. Тогда существует композиционный ряд $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\supset\mathfrak{g}_1\supset\ldots\supset\mathfrak{g}_k=\mathfrak{a}$, такой, что $\mathfrak{g}_i$ — прямая сумма $\mathfrak{g}_{i+1}$ и подалгебры $\mathfrak{h}_i$, которая либо одномерна и содержится в радикале $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}_i)$ алгебры $\mathfrak{g}_i$, либо проста и такова, что $[\mathfrak{h}_i, \mathfrak{g}_{i+1}]\subset\mathfrak{r}(\mathfrak{g}_{i+1})$. (Свести к случаю, когда $\mathfrak{a}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Пусть $\mathfrak{g}'=\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{r}'$ — радикал $\mathfrak{g}'$. Алгебра $\mathfrak{g}'/\mathfrak{r}'$ является произведением своих простых идеалов $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_c$. В качестве нормального ряда $\mathfrak{g}'$ выбрать нормальный ряд радикала $\mathfrak{r}'$, факторы которого одномерны, и полные прообразы идеалов $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_1\times\mathfrak{a}_2$, ..., $\mathfrak{a}_1\times\mathfrak{a}_2\times\ldots\times\mathfrak{a}_c$. Затем рассмотреть полный прообраз в $\mathfrak{g}$ этого композиционного ряда.)

12) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{r}$ — ее радикал и D — дифференцирование $\mathfrak{g}$.

а) Если $D(\mathfrak{r})=\{0\}$, то D — внутреннее дифференцирование. (Пусть $\mathfrak{c}$ — централизатор $\mathfrak{r}$ в $\mathfrak{g}$. Присоединенное представление $\mathfrak{g}$ индуцирует представление $x^*\mapsto\rho(x^*)$ алгебры $\mathfrak{g}^*=\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ в $\mathfrak{c}$. С другой стороны, $[D(\mathfrak{g}), \mathfrak{r}]\subset D([\mathfrak{g}, \mathfrak{r}])+[\mathfrak{g}, D(\mathfrak{r})]=\{0\}$, откуда $D(\mathfrak{g})\subset\mathfrak{c}$, так что D определяет линейное отображение $D^*: \mathfrak{g}^*\to\mathfrak{c}$. Показать, что $D^*([x^*, y^*])=\rho(x^*)D^*y^*-\rho(y^*)D^*x^*$ для любых x^*, y^* из $\mathfrak{g}^*$. Вывести отсюда, что существует элемент $a\in\mathfrak{c}$, такой, что $D^*x^*=\rho(x^*)a$ для любого $x^*\in\mathfrak{g}^*$ (ср. с n° 2, *замечание* 2), откуда $Dx=[x, a]$ для любого $x\in\mathfrak{g}$.)

б) Если D на радикале $\mathfrak{r}$ совпадает с некоторым внутренним дифференцированием $\mathfrak{g}$, то оно — внутреннее дифференцирование. (Применить а).)

13) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем, $\mathfrak{r}$ — ее радикал, а ρ — неприводимое конечномерное представление. Тогда $\rho(z)$ скалярен для любого $z\in\mathfrak{r}$. (Свести к случаю, когда $\mathfrak{g}$ редуктивна. В этом случае $\mathfrak{r}$ — центр $\mathfrak{g}$.)

14) Пусть X — нильпотентная матрица из $\mathfrak{gl}(n, K)$. Показать, что в $\mathfrak{gl}(n, K)$ найдутся две другие матрицы Y, H, такие, что $[\mathrm{H}, \mathrm{X}]=\mathrm{X}$, $[\mathrm{H}, \mathrm{Y}]=-\mathrm{Y}$, $[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]=\mathrm{H}$. (Доказывать индукцией по n, используя жорданову форму X; свести доказательство к случаю, когда $\mathrm{X}=\mathrm{E}_{12}+\mathrm{E}_{23}+\ldots+\mathrm{E}_{n-1, n}$; выбрать в качестве Y некоторую линейную комбинацию $\mathrm{E}_{k, k-1}$, а в качестве H — некоторую линейную комбинацию E_{jj}.)

¶ 15) а) Пусть X, Y — две матрицы из $\mathfrak{gl}(n, K)$. Показать, что если $[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]=\mathrm{X}$, то X нильпотентна. (Для любого $f\in K[T]$ заметить, что $[f(\mathrm{X}), \mathrm{Y}]=\mathrm{X}f'(\mathrm{X})$.)

б) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, h, x — два элемента из $\mathfrak{g}$, такие, что $[h, x]=x$, причем существует $z\in\mathfrak{g}$, для которого $[x, z]=h$. Показать, что существует $y\in\mathfrak{g}$, такое, что $[x, y]=h$ и $[h, y]=-y$. (Показать сначала, что $[z, h]+z$ принадлежит централизатору $\mathfrak{n}$ элемента x в $\mathfrak{g}$. Показать затем, что $\mathfrak{n}$ устойчив относительно $\operatorname{ad} h$ и что ограничение на $\mathfrak{n}$ эндоморфизма $\mathrm{I}-\operatorname{ad} h$ биективно; для доказательства этого заметить, что, согласно а), эндоморфизм $\operatorname{ad} x$ нильпотентен, и доказать, что если $\mathfrak{g}_i$ — образ $\mathfrak{g}$ при $(\operatorname{ad} x)^i$, то $\mathrm{I}-\operatorname{ad} h$ индуцирует при факторизации биекцию на $(\mathfrak{n}\cap\mathfrak{g}_{i-1})/(\mathfrak{n}\cap\mathfrak{g}_i)$; использовать соотношение $[\operatorname{ad} z.\ (\operatorname{ad} x)^k]=-k(\operatorname{ad} x)^{k-1}\left(\operatorname{ad} h+\frac{k-1}{2}\mathrm{I}\right)$.)

в) Пусть $\mathfrak{g}$ — подалгебра в $\mathfrak{gl}(n, K)$; предположим, что для любой нильпотентной матрицы $X \in \mathfrak{g}$ существуют две другие матрицы H, Y в $\mathfrak{g}$, такие, что $[H, X] = X$, $[H, Y] = -Y$, $[X, Y] = H$. Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$, такая, что существует дополнительное подпространство $\mathfrak{m}$ к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$, для которого $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$. Показать, что $\mathfrak{h}$ обладает тем же свойством, что и $\mathfrak{g}$, по отношению к своим нильпотентным матрицам (использовать б)).

16) Пусть $\mathfrak{g}$ — подалгебра $\mathfrak{gl}(n, K)$, такая, что тождественное представление $\mathfrak{g}$ полупросто. Показать, что любая нильпотентная матрица $X \in \mathfrak{g}$ содержится в простой трехмерной подалгебре $\mathfrak{g}$. (Показать, что $\mathfrak{g}$ редуктивна в $\mathfrak{gl}(n, K)$; использовать затем упражнения 14 и 15 в).)

17) Показать, что алгебра, получающаяся из простой вещественной алгебры Ли расширением поля скаляров **R** до **C**, не всегда проста. (Пусть $\mathfrak{g}$ — простая вещественная алгебра Ли. Если $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}_{(\mathbf{C})}$ — простая алгебра, то пусть $\mathfrak{h}$ — вещественная алгебра Ли, получающаяся из $\mathfrak{g}'$ сужением на **R** поля скаляров. Известно, что $\mathfrak{h}$ проста. Тогда $\mathfrak{h}_{(\mathbf{C})}$, согласно упражнению 4 из § 1, является произведением двух алгебр, изоморфных $\mathfrak{g}'$. Ср. также с упражнением 26 б).)

18 а) Пусть $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли. Любая билинейная инвариантная на $\mathfrak{g}$ форма либо равна нулю, либо невырожденна. Если K алгебраически замкнуто, то любая билинейная инвариантная форма β на $\mathfrak{g}$ пропорциональна форме Киллинга β_0. (Рассмотреть эндоморфизм σ векторного пространства $\mathfrak{g}$, определенный формулой $\beta(x, y) = \beta_0(\sigma x, y)$, и показать, что σ перестановочен с $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$ для любого x, а значит, скалярен.) Показать, что этот результат может не иметь места, если K не алгебраически замкнуто. (Использовать упражнение 17 и тот факт, что размерность пространства билинейных инвариантных форм не изменяется при расширении поля скаляров.)

б) Пусть $\mathfrak{g}$ — полупростая алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем. Вывести из а) и упражнения 7 б), что размерность пространства билинейных инвариантных форм на $\mathfrak{g}$ равна числу простых компонент $\mathfrak{g}$ и что все эти формы являются симметрическими.

в) Пусть $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли, M — пространство, дуальное к векторному пространству $\mathfrak{g}$, наделенному структурой модуля присоединенного представления $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ — полупрямое произведение $\mathfrak{g}$ и M, определенное $x \mapsto x_M$. Для любых y, z из $\mathfrak{g}$ и y', z' из M положим $\beta(y + y', z + z') = \langle y, z' \rangle + \langle z, y' \rangle$. Показать, что β является симметрической инвариантной билинейной формой на $\mathfrak{h}$, не ассоциированной ни с каким представлением $\mathfrak{h}$. (Заметить, что радикал и нильпотентный радикал алгебры $\mathfrak{h}$ равны M.)

19) Пусть $\mathfrak{g}$ — редуктивная алгебра Ли, U — ее универсальная обертывающая алгебра, Z — центр U и V — подпространство в U, порожденное элементами вида $uv - vu$ ($u \in U$, $v \in U$).

а) U равно прямой сумме Z и V. (Применить предложение 6 из § 3 к представлению $x \mapsto \mathrm{ad}_U x$ алгебры $\mathfrak{g}$ в U, замечая, что в разложении $U = \sum\limits_n U^n$ из § 2, n°7, следствие 4 теоремы 1, подпространства U^n устойчивы относительно этого представления.)

б) Пусть $u \mapsto u^\natural$ — проектирование U на Z параллельно V. Показать, что $(uv)^\natural = (vu)^\natural$, $(zu)^\natural = zu^\natural$ для любых $u \in U$, $v \in U$, $z \in Z$.

в) Пусть R — двусторонний идеал в U. Показать, что $R = (R \cap Z) + (R \cap V)$. (Доказательство того факта, что компонента в V элемента r из R принадлежит R, свести к случаю, когда K алгебраически замкнуто; заметить, что R устойчив относительно представления ρ алгебры U в U, продолжающего $x \mapsto \mathrm{ad}_U x$; разложить r относительно U^n; применить, наконец, к ограничению ρ на U^n следствие 2 теоремы 1 из *Алг.*, гл. VIII, § 4, n°2.)

г) Пусть R' — идеал в Z, а R_1 — двусторонний идеал в U, порожденный R'. Показать, что $R_1 \cap Z = R'$. (Использовать б).)

20) Предположим, что K алгебраически замкнуто. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и $\mathfrak{c}$ — ее центр.

а) Если $\mathfrak{g}$ обладает точным конечномерным неприводимым представлением, то $\mathfrak{g}$ редуктивна и $\dim \mathfrak{c} \leqslant 1$.

б) Обратно, если $\mathfrak{g}$ редуктивна и $\dim \mathfrak{c} \leqslant 1$, то $\mathfrak{g}$ обладает точным неприводимым конечномерным представлением. (Если $\mathfrak{g}$ — простая, то использовать присоединенное представление. Показать, что если $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ и $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ обладают точными неприводимыми конечномерными представлениями ρ_1, ρ_2 в пространствах M_1, M_2, то $(x_1, x_2) \longmapsto \rho_1(x_1) \otimes 1 + 1 \otimes \rho_2(x_2)$ — полупростое представление ρ алгебры $\mathfrak{g}$ и централизатор $\mathfrak{g}$-модуля $M_1 \otimes M_2$ состоит из одних скаляров, так что ρ на самом деле просто. В случае когда $\mathfrak{g}_1$ и $\mathfrak{g}_2$ полупросты или $\mathfrak{g}_1$ полупроста, а $\mathfrak{g}_2$ коммутативна, показать, что ρ точно, рассматривая ядро ρ, являющееся идеалом в $\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$.)

21) Пусть V — векторное пространство над K конечной размерности $n > 1$. Показать, что $\mathfrak{sl}(V)$ проста. (Свести к случаю, когда K алгебраически замкнуто. Предположим, что $\mathfrak{sl}(V) = \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$, причем $\dim \mathfrak{a} = a > 0$, $\dim \mathfrak{b} = b > 0$. Пусть A (соотв. B) — ассоциативная алгебра, порожденная 1 и $\mathfrak{a}$ (соотв. $\mathfrak{b}$). Тогда V можно рассматривать как простой $(A \otimes_K B)$-модуль. Следовательно, существуют A-модуль P конечной размерности p над K и B-модуль Q конечной размерности q над k, такие, что V будет $(A \otimes_K B)$-изоморфным $P \otimes_K Q$ (*Алг.*, гл. VIII, § 7, n° 7, предложение 8, и n° 4, теорема 2); P и Q точны, следовательно, $a \leqslant p^2$, $b \leqslant q^2$. С другой стороны, $a + b = n^2 - 1$, $pq = n$, откуда $(p^2 - 1)(q^2 - 1) \leqslant 2$ и тем самым получается противоречие.)

22) а) Пусть $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли над алгебраически замкнутым полем K произвольной характеристики. Пусть $\mathfrak{z}$ — ее центр, ρ — конечномерное представление $\mathfrak{g}$, β — ассоциированная билинейная форма. Показать, что $\mathfrak{z} \cap \mathscr{D}\mathfrak{g}$ ортогонально к $\mathfrak{g}$ относительно β. (Свести, используя последовательность Жордана — Гёльдера, к случаю, когда ρ неприводимо. Заметить в этом случае, что для любого $z \in \mathfrak{z} \cap \mathscr{D}\mathfrak{g}$ $\rho(z)$ — скалярная матрица с нулевым следом. Использовать, далее, упражнение 22 б) из § 4.) Вывести отсюда, что если β невырожденна, то $\mathfrak{g}$ коммутативна. (Использовать упражнение 3а) из § 4.)

б) Предположим, что K — поле характеристики 2. Показать, что для разрешимой алгебры Ли $\mathfrak{gl}(2, K) = \mathfrak{g}$ билинейная форма, ассоциированная с тождественным представлением, невырожденна, а центр $\mathfrak{z}$ содержится в $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ и отличен от $\{0\}$.

в) Пусть $\mathfrak{g}$ — шестимерная алгебра Ли над K, обладающая базисом (a, b, c, d, e, f) с таблицей умножения $[a, b] = -[b, a] = d$, $[a, c] = -[c, a] = e$, $[b, c] = -[c, b] = f$ (остальные коммутаторы равны нулю). Пусть β — билинейная форма на $\mathfrak{g}$, такая, что $\beta(c, d) = \beta(d, c) = 1$, $\beta(a, f) = \beta(f, a) = 1$, $\beta(b, e) = \beta(e, b) = -1$, причем остальные значения β на парах элементов из рассматриваемого базиса равны нулю. Показать, что β инвариантна, $\mathfrak{g}$ нильпотентна, $\mathfrak{z} = \mathscr{D}\mathfrak{g} \neq \{0\}$ и β невырожденна.

23) Пусть $\mathfrak{g}$ — некоммутативная трехмерная алгебра Ли над полем K произвольной характеристики.

а) Если $\mathfrak{g}$ обладает ненулевым центром $\mathfrak{z} \neq \{0\}$, то $\dim \mathfrak{z} = 1$ (§ 1, упражнение 2) и $\dim \mathscr{D}\mathfrak{g} = 1$. Если $\mathfrak{z} \neq \mathscr{D}\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g}$ — прямая сумма $\mathfrak{z}$ и некоммутативной двумерной алгебры. Если $\mathfrak{z} = \mathscr{D}\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g}$ — некоммутативная нильпотентная алгебра (§ 4, упражнение 9а)).

б) Если $\mathfrak{z} = \{0\}$, но в $\mathfrak{g}$ имеется двумерная коммутативная подалгебра, то эта подалгебра единственна и равна $\mathscr{D}\mathfrak{g}$; для любого $x \notin \mathscr{D}\mathfrak{g}$ ограниче-

ние u эндоморфизма $\operatorname{ad} x$ на $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ является биекцией этого векторного пространства, определенной с точностью до постоянного множителя. Обратно, любой автоморфизм u двумерного векторного пространства $Ka + Kb$ определяет структуру алгебры Ли на $\mathfrak{g} = Ka + Kb + Kc$ при помощи условий $[a, b] = 0$, $[c, a] = u(a)$, $[c, b] = u(b)$. Для того чтобы две алгебры Ли, определенные таким образом, были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы матрицы задающих их автоморфизмов отличались лишь скалярным множителем.

в) Предположим, что в $\mathfrak{g}$ нет более чем одномерной коммутативной подалгебры. Показать, что тогда существует элемент $a \in \mathfrak{g}$, такой, что $a \notin (\operatorname{ad} a)(\mathfrak{g})$ (предполагая, что некоторый элемент x не обладает этим свойством, показать, используя тождество Якоби, что некоторый другой элемент обладает желаемым свойством). Существует тогда базис (a, b, c) алгебры $\mathfrak{g}$, в котором $[a, b] = c$, $[a, c] = \beta b$, $[b, c] = \gamma a$, причем $\beta \neq 0$ и $\gamma \neq 0$, а $\mathfrak{g}$ простая. Пусть φ — канонический изоморфизм $\mathfrak{g}$ на внешнюю степень $\bigwedge^2 \mathfrak{g}^*$ пространства, дуального к $\mathfrak{g}$, определенный с точностью до обратимой константы (*Алг.*, гл. III, § 8, n° 5); пусть u — линейное отображение $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}^*$, определенное условием $\langle [x, y], u(z) \rangle = \langle x \wedge y, \varphi(z) \rangle$; билинейная форма $\Phi(x, y) = \langle x, u(y) \rangle$ на $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ симметрична и невырожденна и 2Φ — форма Киллинга $\mathfrak{g}$ с точностью до ненулевого множителя. Для того чтобы две простые алгебры размерности 3 над K были изоморфны, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие им билинейные формы были эквивалентны с точностью до постоянного множителя, отличного от нуля.

г) Если характеристика K не равна 2, то простая алгебра Ли $\mathfrak{g}$, определенная в в), изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{o}(\Phi)$ формальной ортогональной группы $\mathbf{G}(\Phi)$ (§ 1, упражнение 26 а)). Для того чтобы в $\mathfrak{g}$ были векторы x, такие, что эндоморфизм $\operatorname{ad} x$ обладает собственными векторами, не пропорциональными x, необходимо и достаточно, чтобы Φ была формой ненулевого индекса; $\mathfrak{g}$ обладает таким базисом (a, b, c), что $[a, b] = b$, $[a, c] = -c$, $[b, c] = a$.

д) Показать, что если K — поле характеристики 2, то в $\mathfrak{g}$ не существует 2-отображения и, следовательно, $\mathfrak{g}$ не является алгеброй Ли никакой формальной группы. Показать, что $\mathfrak{g}$ обладает дифференцированиями, не являющимися внутренними.

¶ 24) Пусть K — поле произвольной характеристики p. Примем также определение 1.

а) Показать, что, за исключением $p = n = 2$, единственными нетривиальными идеалами в $\mathfrak{gl}(n, K)$ являются центр $\mathfrak{z}$ размерности 1 с базисом $\sum_{i=1}^{n} E_{ii}$ и алгебра Ли $\mathfrak{sl}(n, K)$, состоящая из матриц со следом 0. (Заметим, что, за исключением отмеченного случая, если идеал $\mathfrak{a}$ содержит матрицу E_{ij}, то он обязательно содержит $\mathfrak{sl}(n, K)$. Если $\mathfrak{a}$ содержит элемент, не принадлежащий центру $\mathfrak{z}$, то, умножая этот элемент не более чем на четыре подходящим образом выбранных элемента E_{ij}, можно получить ненулевое кратное одного из E_{ij}.) Показать, что если n не кратно p, то $\mathfrak{gl}(n, K)$ является прямой суммой $\mathfrak{sl}(n, K)$ и $\mathfrak{z}$, причем $\mathfrak{sl}(n, K)$ проста. Если же n кратно p и $n > 2$, то показать, что $\mathfrak{sl}(n, K)/\mathfrak{z}$ проста (теми же методами).

б) Показать, что если n кратно p и $n > 2$, то $\mathfrak{gl}(n, K)/\mathfrak{z}$ имеет нулевой радикал, но обладает абелевой факторалгеброй $\mathfrak{gl}(n, K)/\mathfrak{sl}(n, K)$.

¶ 25) Пусть K — поле произвольной характеристики p. Обозначим через $\mathfrak{sp}(2n, K)$ алгебру Ли формальной симплектической группы от $2n$ переменных над K (§ 1, упражнение 26 в)). Показать, что эта алгебра Ли

являющаяся подалгеброй в $\mathfrak{gl}(2n, K)$, обладает базисом

$$\mathrm{H}_i = \mathrm{E}_{ii} - \mathrm{E}_{i+n,\, i+n} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$

$$\mathrm{F}_{ij} = \mathrm{E}_{ij} - \mathrm{E}_{j+n,\, i+n} \qquad (1 \leqslant i,\ j \leqslant n,\ i \neq j),$$

$$\mathrm{G}'_{ij} = \mathrm{E}_{i,\, j+n} + \mathrm{E}_{j,\, i+n},\quad \mathrm{G}''_{ij} = \mathrm{E}_{i+n,\, j} + \mathrm{E}_{j+n,\, i} \qquad (1 \leqslant i < j \leqslant n),$$

$$\mathrm{E}_{i,\, i+n} \text{ и } \mathrm{E}_{i+n,\, i} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

а) Показать, что если $p \neq 2$, $n \geqslant 1$, то алгебра $\mathfrak{sp}(2n, K)$ простая (при $n = 1$ $\mathfrak{sp}(2K) = \mathfrak{sl}(2, K)$). (Метод тот же, что и в упражнении 24.)

б) Если $p = 2$ и $n \geqslant 3$, то показать, что H_i, F_{ij}, G'_{ij} и G''_{ij} порождают идеал $\mathfrak{a}$ размерности $n(2n-1)$; его элементы вида

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i H_i + \sum_{i \neq j} \alpha_{ij} F_{ij} + \sum_{i<j} \beta_{ij} G'_{ij} + \sum_{i<j} \gamma_{ij} G''_{ij}$$

с $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$ образуют идеал $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$ размерности $n(2n-1)-1$, кратные $\sum\limits_{i=1}^{n} H_i$ порождают идеал $\mathfrak{c}$ — центр $\mathfrak{sp}(2n, K)$; $\mathfrak{b}$ и $\mathfrak{c}$ — единственные идеалы в $\mathfrak{a}$, причем $\mathfrak{b} = \mathscr{D}(\mathfrak{sp}(2n, K))$ и $\mathfrak{b}/\mathfrak{c}$ простая (тот же метод). Что собой представляют идеалы $\mathfrak{sp}(4, K)$, если K — поле характеристики 2?

¶ 26) Пусть K — поле характеристики $\neq 2$, Φ — билинейная симметрическая невырожденная форма на n-мерном пространстве над K.

а) Показать, что если $n \geqslant 5$, то алгебра Ли $\mathfrak{o}(\Phi)$ проста. (Расширяя, если нужно, поле скаляров, рассмотреть лишь случай, когда индекс Φ равен $m = [n/2]$. Если, например, $n = 2m$ четно, то в качестве базиса $\mathfrak{o}(\Phi)$ можно взять $\mathrm{H}_i = \mathrm{E}_{ii} - \mathrm{E}_{i+m,\, i+m}$, $\mathrm{F}_{ij} = \mathrm{E}_{ij} - \mathrm{E}_{j+m,\, i+m}$ $(1 \leqslant i,\ j \leqslant m,\ i \neq j)$, $\mathrm{G}'_{ij} = \mathrm{E}_{i,\, j+m} - \mathrm{E}_{j,\, i+m}$ и $\mathrm{G}''_{ij} = \mathrm{E}_{i+m,\, j} - \mathrm{E}_{j+m,\, i}$ $(1 \leqslant i < j \leqslant m)$; рассуждаем теперь так же, как и в упражнениях 24 и 25. Действовать аналогичным образом, когда $n = 2m + 1$ нечетно.)

б) Пусть Δ — дискриминант Φ в некотором базисе. Предположим, что $n \geqslant 4$. Показать, что если Δ не является квадратом в K, то $\mathfrak{o}(\Phi)$ проста. Если Δ — квадрат, то $\mathfrak{o}(\Phi)$ — прямая сумма двух изоморфных трехмерных алгебр Ли. (Использовать строение $\mathbf{G}(\Phi)$, описанное в *Алг.*, гл. IX, § 9, упражнение 16.) Вывести отсюда пример простой алгебры Ли, которая становится непростой при расширении поля скаляров.

27) а) Показать, что в конечномерной p-алгебре Ли радикал является p-идеалом. (Использовать упражнение 22 в) из § 1.)

б) Для того чтобы радикал p-алгебры Ли $\mathfrak{g}$ был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы в $\mathfrak{g}$ не содержалось ненулевых коммутативных p-идеалов. (Использовать упражнение 22 в) из § 1.)

§ 7

Соглашения § 7, если не оговорено противное, остаются в силе.

1) а) Для того чтобы K-алгебра Ли была нильпотентной, необходимо и достаточно, чтобы она была изоморфна подалгебре алгебры $\mathfrak{n}(n, K)$.

б) Предположим, что K алгебраически замкнуто. Для того чтобы K-алгебра Ли была разрешимой, необходимо и достаточно, чтобы она была изоморфна подалгебре алгебры $\mathfrak{t}(n, K)$.

2) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{n}$ — ее наибольший нильпотентный идеал. Существует конечномерное векторное пространство V и изоморфизм $\mathfrak{g}$ на

подалгебру в $\mathfrak{gl}(V)$, отображающий любой элемент из $\mathfrak{n}$ в нильпотентный эндоморфизм V. (Использовать теорему Адо и упражнение 5 из § 1.)

3) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, U — ее универсальная обертывающая алгебра.

а) Показать, что для любого $u \in U$ $(u \neq 0)$ существует конечномерное представление π алгебры U, такое, что $\pi(u) \neq 0$. (Использовать предыдущее упражнение и упражнение 5 б) из § 3.)

б) Вывести из а), что если $\mathfrak{g}$ полупроста, то существует бесконечное число попарно неэквивалентных конечномерных представлений $\mathfrak{g}$. (Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — неприводимые представления $\mathfrak{g}$ конечной размерности, $N_1, \ldots, N_n$ — аннуляторы соответствующих U-модулей, $N = \bigcap_{i=1}^{n} N_i$. Показать, что N имеет конечную коразмерность в U. Пусть $n \in N$, $n \neq 0$. Применить а) к n.)

¶ 4) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — ее субнормальная подалгебра, $\mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ — радикал алгебры $\mathfrak{a}$ и ρ — представление конечной размерности алгебры $\mathfrak{a}$. Для того чтобы ρ допускало конечномерное продолжение на $\mathfrak{g}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathscr{D}\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r}(\mathfrak{a})$ содержало наибольший идеал нильпотентности ρ. (Для доказательства достаточности действовать следующим образом: пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}_k = \mathfrak{a}$ — нормальный ряд $\mathfrak{g}$, обладающий свойствами из упражнения 11 б), § 6. Показать по индукции существование продолжения ρ_i представления ρ на $\mathfrak{g}_i$, наибольший идеал нильпотентности которого содержит $\mathscr{D}\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r}(\mathfrak{g}_i)$. В обозначениях упражнения 11 б) из § 6 переход от ρ_{i+1} к ρ_i следует из теоремы 1 в случае, когда $\mathfrak{h}_i$ проста или $\mathfrak{h}_i$ одномерна и $\mathscr{D}\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r}(\mathfrak{g}_{i+1}) = \mathscr{D}\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r}(\mathfrak{g}_i)$. Если $\mathscr{D}\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r}(\mathfrak{g}_{i+1}) \neq \mathscr{D}\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r}(\mathfrak{g}_i)$, можно предполагать, что $\mathfrak{h}_i \subset \mathscr{D}\mathfrak{g} \cap \mathfrak{r}(\mathfrak{g}_i)$. Имеем тогда $\mathfrak{r}(\mathfrak{g}_i) = \mathfrak{r}(\mathfrak{g}) \cap \mathfrak{g}_i$ (§ 5, упражнение 10) и можно еще раз применить теорему 1.)

¶ 5) Пусть K — поле характеристики $p > 0$, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли конечной размерности n над K, U — универсальная обертывающая алгебра для $\mathfrak{g}$.

а) Назовем *p-многочленом* от одной переменной (над K) любой многочлен из $K[X]$, в котором ненулевые члены имеют степень, равную степени числа p. Показать, что для любого многочлена $f(X) \neq 0$ из $K[X]$ существует $g(X) \in K[X]$, такой, что $f(X)\,g(X)$ является p-многочленом (рассмотреть остатки от деления по алгоритму Евклида многочленов X^{p^k} на $f(X)$).

б) Показать, что для любого элемента $z \in \mathfrak{g}$ существует ненулевой многочлен $f(X) \in K[X]$, такой, что $f(z)$ принадлежит центру C алгебры U. (Рассмотреть минимальный многочлен эндоморфизма $\operatorname{ad} z$ и применить а) к этому многочлену, используя формулу (1) из упражнения 19, § 1.)

в) Пусть $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ — базис $\mathfrak{g}$. Для любого i пусть $f_i \neq 0$ — многочлен из $K[X]$, такой, что $f_i(e_i) \in C$; пусть d_i — его степень, и пусть L — двусторонний идеал U, порожденный элементами $y_i = f_i(e_i)$. Показать, что классы $\operatorname{mod} L$ элементов $e_1^{\alpha_1} \ldots e_n^{\alpha_n}$, где $0 \leqslant \alpha_i < d_i$, образуют базис U/L.

г) Показать, что $\mathfrak{g}$ обладает точным конечномерным представлением (выбрать f_i так, что $d_i > 1$ для любого i).

д) Показать, что если $\mathfrak{g} \neq \{0\}$, то существует линейное конечномерное представление $\mathfrak{g}$, не являющееся вполне приводимым. (Предполагая, что степени d_i многочленов f_i больше 1, заменить f_i на f_i^2 в определении L и заметить, что тогда в центре U/L имеются ненулевые нильпотентные элементы, т. е. U/L не полупроста.)

ГЛАВА II

СВОБОДНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

В этой главе[1]) *буква K обозначает ненулевое коммутативное кольцо. Для единичного элемента в K используется символ* 1. *Если не оговорено противное, все коалгебры, алгебры и биалгебры, все модули и все тензорные произведения рассматриваются над K.*

Начиная с § 6, *предполагается, что K — поле характеристики нуль.*

§ 1. Обертывающая биалгебра алгебры Ли

В этом параграфе $\mathfrak{g}$ — *алгебра Ли над K*, $U(\mathfrak{g})$, *или просто U*, — *её универсальная обертывающая алгебра* (гл. I, § 2, n° 1), σ — *каноническое отображение* $\mathfrak{g}$ *в* $U(\mathfrak{g})$ (*там же*) *и* $(U_n)_{n \geqslant 0}$ — *каноническая фильтрация алгебры* U (*там же*, n° 6).

1. Примитивные элементы коалгебры

В этом пункте мы рассмотрим *коалгебру* E (*Alg.*, 3^e ed., chap. III, p. 138[2])) с копроизведением

$$c \colon E \to E \otimes E,$$

обладающую *коединицей* ε (*там же*, p. 146). Напомним, что ε является линейной формой на K-модуле E, для которой (после канонического отождествления $E \otimes K$ и $K \otimes E$ с E) имеет место

$$\mathrm{Id}_E = (\varepsilon \otimes \mathrm{Id}_E) \circ c = (\mathrm{Id}_E \otimes \varepsilon) \circ c.$$

---

[1]) Результаты глав II и III зависят от гл. I, а также от первых шести книг (Теория множеств, Алгебра, Общая топология, Теория функций действительного переменного, Топологические векторные пространства, Интегрирование), книг Коммутативная алгебра, Многообразия (Сводка результатов); n° 9 из § 6 гл. III, зависит, кроме того, от книги Спектральная теория, гл. I.

[2]) Для удобства читателя, не имеющего под рукой нового французского издания *Алгебры*, при переводе в конце этой книги помещено приложение, содержащее необходимые терминологические разъяснения. Многочисленные более мелкие ссылки на французский оригинал, сохраненные без изменений, большей частью понятны из контекста и никак не комментируются. — *Прим. ред.*

Обозначим через E^+ ядро ε и зафиксируем элемент u из E, такой, что

$$c(u) = u \otimes u \quad \text{и} \quad \varepsilon(u) = 1.$$

K-модуль E является прямой суммой E^+ и подмодуля $K \cdot u$, свободного с базисом u; обозначим через π_u: $E \to E^+$ и η_u: $E \to K \cdot u$ проектирования, определенные этим разложением. Имеем

$$\pi_u(x) = x - \varepsilon(x) \cdot u, \quad \eta_u(x) = \varepsilon(x) \cdot u. \tag{1}$$

Определение 1. *Говорят, что элемент x модуля E u-примитивен, если*

$$c(x) = x \otimes u + u \otimes x. \tag{2}$$

Все u-примитивные элементы из E образуют подмодуль модуля E, обозначаемый через $P_u(E)$.

Предложение 1. *Любой u-примитивный элемент из E принадлежит E^+.*

В самом деле, из (2) следует, что $x = \varepsilon(x) \cdot u + \varepsilon(u) \cdot x = \varepsilon(x) \cdot u + x$, откуда $\varepsilon(x) = 0$.

Замечание. Если $x \in E$ и если $c(x) = x' \otimes u + u \otimes x''$, где x', x'' принадлежат E^+, то $x = \varepsilon(x') \cdot u + \varepsilon(u) \cdot x'' = x''$; аналогично $x = x'$, т. е. x u-примитивен.

Для любого $x \in E^+$ положим

$$c_u^+(x) = c(x) - x \otimes u - u \otimes x. \tag{3}$$

Предложение 2. *Справедливо следующее соотношение:*

$$(\pi_u \otimes \pi_u) \circ c = c_u^+ \circ \pi_u. \tag{4}$$

В самом деле, пусть x принадлежит E; тогда

$$(\pi_u \otimes \pi_u)(c(x)) = ((1 - \eta_u) \otimes (1 - \eta_u))(c(x)) =$$
$$= c(x) - (1 \otimes \eta_u)(c(x)) - (\eta_u \otimes 1)(c(x)) + (\eta_u \otimes \eta_u)(c(x)).$$

Так как ε — коединица в E, то

$$(1 \otimes \eta_u)(c(x)) = x \otimes u, \quad (\eta_u \otimes 1)(c(x)) = u \otimes x,$$

откуда

$$(\eta_u \otimes \eta_u)(c(x)) = (\eta_u \otimes 1)((1 \otimes \eta_u)(c(x))) = \varepsilon(x) \cdot u \otimes u;$$

из всего этого получаем, что

$$(\pi_u \otimes \pi_u)(c(x)) = c(x) - x \otimes u - u \otimes x + \varepsilon(x) \cdot u \otimes u.$$

С другой стороны,

$$c_u^+\big(\pi_u(x)\big) = c(x) - x \otimes u - u \otimes x + \varepsilon(x) . u \otimes u,$$

откуда и следует формула (4).

Так как E^+ — прямое слагаемое в E, то можно отождествить $E^+ \otimes E^+$ с прямым слагаемым модуля $E \otimes E$. При таком отождествлении $\pi_u \otimes \pi_u$ является проектированием $E \otimes E$ на $E^+ \otimes E^+$. Согласно формуле (4), c_u^+ отображает E^+ в $E^+ \otimes E^+$ и π_u — *морфизм коалгебры* (E, c) *в коалгебру* $\big(E^+, c_u^+\big)$.

Предложение 3. *Если коалгебра* (E, c) *коассоциативна* (соотв. *кокоммутативна*) (*Alg.*, chap. III, p. 143—144), *то такова же и коалгебра* $\big(E^+, c_u^+\big)$.

Это вытекает из следующей леммы:

Лемма 1. *Пусть* π: $E \to E'$ — *сюръективный морфизм коалгебр. Если* E *коассоциативна* (соотв. *кокоммутативна*), *то такова же и* E'.

Пусть B — ассоциативная K-алгебра; тогда отображение $f \mapsto f \circ \pi$ является инъективным гомоморфизмом алгебры $\mathrm{Hom}_K(E', B)$ в алгебру $\mathrm{Hom}_K(E, B)$. Достаточно поэтому применить предложение 1 (соотв. предложение 2) из *Alg.*, chap. III, p. 143 (соотв. 144).

2. *Примитивные элементы биалгебры*

Пусть E — *биалгебра* (*Alg.*, chap., III, p. 148), c — ее копроизведение, ε — ее коединица, 1 — ее единичный элемент. Так как $\varepsilon(1) = 1$ и $c(1) = 1 \otimes 1$, то можно применить результаты предыдущего пункта при $u = 1$. Назовем просто *примитивными* (см. *Alg.*, chap. III, p. 164) 1-примитивные элементы из E (n° 1, определение 1), т. е. элементы x модуля E, такие, что

$$c(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x. \tag{5}$$

Будем вместо π_1, η_1, $P_1(E)$, c_1^+ писать просто π, η, $P(E)$, c^+.

Предложение 4. *Множество* $P(E)$ *примитивных элементов в* E *является подалгеброй Ли алгебры* E.

Если x, y — элементы $P(E)$, то

$$c(xy) = c(x)\,c(y) = (x \otimes 1 + 1 \otimes x)(y \otimes 1 + 1 \otimes y) =$$
$$= xy \otimes 1 + 1 \otimes xy + x \otimes y + y \otimes x,$$

откуда

$$c([x, y]) = [x, y] \otimes 1 + 1 \otimes [x, y].$$

Предложение 5. *Пусть* $f\colon E\to E'$ — *морфизм биалгебр. Если* x — *примитивный элемент в* E, *то* $f(x)$ — *примитивный элемент в* E' *и ограничение* f *на* $P(E)$ *является гомоморфизмом алгебр Ли* $P(f)\colon P(E)\to P(E')$.

Пусть c (соотв. c') — копроизведение в E (соотв. в E'). Так как f — морфизм коалгебр, то $c'\circ f=(f\otimes f)\circ c$, откуда

$$c'(f(x))=(f\otimes f)(c(x))=(f\otimes f)(x\otimes 1+1\otimes x)=$$
$$=f(x)\otimes 1+1\otimes f(x),$$

если x примитивен. Поэтому f отображает $P(E)$ в $P(E')$ и $f([x,y])=[f(x),f(y)]$, так как f — гомоморфизм алгебр.

Замечания. 1) Пусть p — простое число, такое, что $p\cdot 1=0$ в K. Биномиальная формула и сравнения $\binom{p}{i}\equiv 0 \pmod p$ для $1\leqslant i\leqslant p-1$ позволяют утверждать, что $P(E)$ устойчиво относительно отображения $x\mapsto x^p$.

2) По определению диаграмма

$$0\to P(E)\to E^+\xrightarrow{c^+}E^+\otimes E^+$$

является точной последовательностью. Если K' — коммутативное кольцо и $\rho\colon K\to K'$ — гомоморфизм колец, то $\rho^*(E)=E\otimes_K K'$ есть K'-биалгебра и вложение $P(E)\to E$ определяет гомоморфизм K'-алгебр Ли $\alpha\colon P(E)\otimes_K K'\to P(E\otimes_K K')$.

Если K' *плоско* над K (*Комм. алг.*, гл. I, § 2, n° 3, определение 2), то это влечет за собой (см. *там же*), что диаграмма

$$0\to P(E)\otimes_K K'\to E^+\otimes_K K'\xrightarrow{c^+\otimes_K \mathrm{Id}_{K'}}(E^+\otimes_K K')\otimes_{K'}(E^+\otimes_K K')$$

является точной последовательностью, т. е. α — *изоморфизм*.

3. Фильтрованные биалгебры

Определение 2. *Пусть* E — *биалгебра с копроизведением* c. *Фильтрацией, совместимой со структурой биалгебры* E, *называется возрастающая последовательность* $(E_n)_{n\geqslant 0}$ *подмодулей* E, *такая, что*

$$E_0=K\cdot 1,\quad E=\bigcup_{n\geqslant 0}E_n,$$
$$E_m\cdot E_n\subset E_{m+n}\quad \textit{для}\quad m\geqslant 0,\quad n\geqslant 0, \tag{6}$$
$$c(E_n)\subset\sum_{i+j=n}\mathrm{Im}(E_i\otimes E_j)\quad \textit{для}\quad n\geqslant 0\,[1].$$

[1]) Если A и B — подмодули в E, то через $\mathrm{Im}(A\otimes B)$ обозначается образ канонического отображения $A\otimes B\to E\otimes E$.

Фильтрованной биалгеброй называется биалгебра, обладающая некоторой фильтрацией, совместимой со структурой биалгебры.

Пример. Пусть E — градуированная биалгебра (*Alg.*, chap. III, p. 148, définition 3), $(E^n)_{n \geqslant 0}$ — ее градуировка. Положим $E_n = \sum_{i=0}^{n} E^i$. Последовательность (E_n) является фильтрацией, совместимой со структурой биалгебры на E.

Предложение 6. *Пусть E — фильтрованная биалгебра, $(E_n)_{n \geqslant 0}$ — ее фильтрация. Для любого целого $n \geqslant 0$ пусть $E_n^+ = E_n \cap E^+$. Тогда $E_0^+ = \{0\}$ и*

$$c^+(E_n^+) \subset \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{Im}(E_i^+ \otimes E_{n-i}^+) \quad \textit{при} \quad n \geqslant 0. \tag{7}$$

Так как $E_0 = K \cdot 1$, то $E_0^+ = 0$. Если $x \in E_n$, то $\pi(x) = x - \varepsilon(x) \cdot 1$ (формула (1)), поэтому $\pi(x) \in E_n^+$ и $\pi(E_n) \subset E_n^+$. Отсюда следует, что $\pi \otimes \pi$ отображает $\operatorname{Im}(E_i \otimes E_j)$ в $\operatorname{Im}(E_i^+ \otimes E_j^+)$ для любых $i \geqslant 0$, $j \geqslant 0$. Так как $c^+ = (\pi \otimes \pi) \circ c$ в E^+ (n° 1, предложение 2), то, согласно (6), имеем

$$c^+(E_n^+) \subset \sum_{i=0}^{n} \operatorname{Im}(E_i^+ \otimes E_{n-i}^+) = \sum_{i=1}^{n-1} \operatorname{Im}(E_i^+ \otimes E_{n-i}^+).$$

Следствие. *Элементы из E_1^+ примитивны.*

Если $x \in E_1^+$, то $c^+(x) = 0$ вследствие (7), откуда вытекает (5).

4. Обертывающая биалгебра алгебры Ли

Напомним, что $\mathfrak{g}$ обозначает алгебру Ли, U — ее универсальную обертывающую алгебру, наделенную канонической фильтрацией $(U_n)_{n \geqslant 0}$.

Предложение 7. *Существует единственное копроизведение c на алгебре U, превращающее ее в биалгебру, в которой элементы $\sigma(\mathfrak{g})$ примитивны. Биалгебра (U, c) кокоммутативна; ее коединица является линейной формой ε, такой, что постоянный член* (гл. I, § 2, n° 1) *любого элемента x алгебры U равен $\varepsilon(x) \cdot 1$. Каноническая фильтрация $(U_n)_{n \geqslant 0}$ алгебры U совместима с такой структурой биалгебры.*

a) Пусть $x \in \mathfrak{g}$; положим $c_0(x) = \sigma(x) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma(x) \in U \otimes U$. Если x, y — элементы из $\mathfrak{g}$, то $c_0(x) c_0(y) = (\sigma(x) \sigma(y)) \otimes 1 +$

$+ 1 \otimes (\sigma(x)\sigma(y)) + \sigma(x) \otimes \sigma(y) + \sigma(y) \otimes \sigma(x)$, откуда

$$[c_0(x), c_0(y)] = c_0([x, y]).$$

Согласно свойству универсальности алгебры U (гл. I, § 2, n° 2, предложение 1), существует гомоморфизм алгебр с единицей, и притом единственный, такой, что

$$c\colon U \to U \otimes U$$

и $c(\sigma(x)) = \sigma(x) \otimes 1 + 1 \otimes \sigma(x)$ для любого $x \in \mathfrak{g}$. Это доказывает утверждение о единственности в предложении 7.

б) *Покажем, что c коассоциативно.* В самом деле, линейные отображения c' и c'' модуля U в $U \otimes U \otimes U$, определенные формулами

$$c' = (c \otimes \mathrm{Id}_U) \circ c \quad \text{и} \quad c'' = (\mathrm{Id}_U \otimes c) \circ c,$$

являются гомоморфизмами алгебр с единицей, совпадающими на $\sigma(\mathfrak{g})$, ибо при $a \in \sigma(\mathfrak{g})$ имеем

$$c'(a) = a \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes a \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes a = c''(a),$$

откуда и следует требуемое.

в) *Покажем, что c кокоммутативно.* Пусть τ — автоморфизм $U \otimes U$, такой, что $\tau(a \otimes b) = b \otimes a$ для a, b из U. Отображения $\tau \circ c$ и c модуля U в $U \otimes U$ суть гомоморфизмы алгебр с единицей, совпадающие на $\sigma(\mathfrak{g})$, откуда и следует кокоммутативность.

г) *Покажем, что ε — коединица для c.* В самом деле, отображения $(\mathrm{Id}_U \otimes \varepsilon) \circ c$ и $(\varepsilon \otimes \mathrm{Id}_U) \circ c$ модуля U в U являются гомоморфизмами алгебр с единицей, совпадающими с Id_U на $\sigma(\mathfrak{g})$.

д) Мы знаем, что $U_0 = K . 1$, $U_n \subset U_{n+1}$, $U = \bigcup_{n \geqslant 0} U_n$ и $U_n . U_m \subset U_{n+m}$ (гл. I, § 2, n° 6). Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — элементы из $\sigma(\mathfrak{g})$. Имеем

$$c(a_1 \ldots a_n) = \prod_{i=1}^{n} c(a_i) = \prod_{i=1}^{n} (a_i \otimes 1 + 1 \otimes a_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \sum_{\alpha \in I(i)} (a_{\alpha(1)} \ldots a_{\alpha(i)}) \otimes (a_{\alpha(i+1)} \ldots a_{\alpha(n)}), \qquad (8)$$

где $I(i)$ обозначает множество перестановок на $(1, n)$, возрастающих в каждом из интервалов $(1, i)$ и $(i+1, n)$. Так как U_n есть K-модуль, порожденный произведениями не более чем n элементов из $\sigma(\mathfrak{g})$, формула (8) показывает, что фильтрация (U_n) является совместимой со структурой биалгебры на (U, c).

Определение 3. *Биалгебра (U, c) называется обертывающей биалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}$.*

Предложение 8. *Пусть E — биалгебра с копроизведением c_E, и пусть h — гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в* $P(E)$ (n° 2, предложение 4). *Гомоморфизм алгебр с единицей f: $U \to E$, такой, что $f(\sigma(x)) = h(x)$ для любого $x \in \mathfrak{g}$, является морфизмом биалгебр.*

Покажем, что $(f \otimes f) \circ c = c_E \circ f$. Обе части этого равенства являются гомоморфизмами алгебр с единицей, причем отображают алгебру U в $E \otimes E$, и для каждого $a \in \sigma(\mathfrak{g})$ имеем

$$(f \otimes f)(c(a)) = f(a) \otimes 1 + 1 \otimes f(a) = c_E(f(a)),$$

так как $f(a) \in P(E)$. Аналогично, если ε_E — коединица в E, то $\varepsilon_E \circ f$ — гомоморфизм алгебр с единицей $U \to K$, нулевой на $\sigma(\mathfrak{g})$ (n° 1, предложение 1) и, значит, совпадающий с ε.

Из предложений 5 и 8 следует, что отображение $f \longmapsto f \circ \sigma$ определяет взаимно однозначное соответствие между гомоморфизмами биалгебр $U(\mathfrak{g}) \to E$ и гомоморфизмами алгебр Ли $\mathfrak{g} \to P(E)$.

Следствие. *Пусть $\mathfrak{g}_i$ $(i = 1, 2)$ — алгебра Ли, $U(\mathfrak{g}_i)$ — ее обертывающая биалгебра, σ_i: $\mathfrak{g}_i \to U(\mathfrak{g}_i)$ — каноническое отображение. Для любого гомоморфизма алгебр Ли h: $\mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ гомоморфизм алгебр с единицей $U(h)$: $U(\mathfrak{g}_1) \to U(\mathfrak{g}_2)$, такой, что $U(h) \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ h$* (гл. I, § 2, n° 1), *является морфизмом биалгебр.*

5. Структура коалгебры $U(\mathfrak{g})$ в случае нулевой характеристики

В этом пункте K — *поле характеристики* 0.

Пусть $\mathsf{S}(\mathfrak{g})$ — симметрическая алгебра векторного пространства $\mathfrak{g}$, c_S — ее копроизведение (*Alg.*, chap. III, p. 139, *exemple* 6), η — канонический изоморфизм векторного пространства $\mathsf{S}(\mathfrak{g})$ на векторное пространство U (гл. I, § 2, n° 7). Напомним, что если $x_1, \ldots, x_n$ — элементы из $\mathfrak{g}$, то

$$\eta(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \sigma(x_{\tau(1)}) \ldots \sigma(x_{\tau(n)}). \tag{9}$$

В частности, для $x \in \mathfrak{g}$ и $n \geqslant 0$ имеем

$$\eta(x^n) = \sigma(x)^n. \tag{10}$$

Заметим, что, согласно *замечанию* 3 из *Alg.*, chap. III, p. 68, η — единственное линейное отображение $\mathsf{S}(\mathfrak{g})$ в U, удовлетворяющее условию (10).

Предложение 9. *Для любого целого числа $n \geqslant 0$ пусть U^n — подпространство в U, порожденное $(\sigma(x))^n$ для любых $x \in \mathfrak{g}$.*

а) *Ряд* $(U^n)_{n\geqslant 0}$ *является градуировкой векторного пространства* U, *совместимой со структурой коалгебры.*

Наделим U *градуировкой* (U^n).

б) *Каноническое отображение* η: $\mathsf{S}(\mathfrak{g})\to U$ *является изоморфизмом градуированных коалгебр.*

Пусть $x\in\mathfrak{g}$ и $n\in\mathbf{N}$. Тогда

$$c_S(x^n)=c_S(x)^n=(x\otimes 1+1\otimes x)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\otimes x^{n-i},\qquad (11)$$

так как c_S — гомоморфизм алгебр. Аналогично, согласно (10),

$$c(\eta(x^n))=c(\sigma(x)^n)=c(\sigma(x))^n=(\sigma(x)\otimes 1+1\otimes\sigma(x))^n=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\sigma(x)^i\otimes\sigma(x)^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\eta(x^i)\otimes\eta(x^{n-i}),\qquad (12)$$

откуда

$$(\eta\otimes\eta)(c_S(x^n))=c(\eta(x^n)).$$

Так как x^n при $x\in\mathfrak{g}$ и $n\in\mathbf{N}$ порождают векторное пространство $\mathsf{S}(\mathfrak{g})$, то $(\eta\otimes\eta)\circ c_S=c\circ\eta$, т. е. η — изоморфизм коалгебр.

Кроме того, формула (10) показывает, что $\eta(\mathsf{S}^n(\mathfrak{g}))=U^n$, что и завершает доказательство а) и б), если учесть, что градуировка алгебры $\mathsf{S}(\mathfrak{g})$ совместима со структурой коалгебры на ней.

Градуировка $(U^n)_{n\geqslant 0}$ алгебры U называется *канонической градуировкой.*

Следствие. *Каноническое отображение* σ *определяет изоморфизм алгебры* $\mathfrak{g}$ *на алгебру Ли* $P(U)$ *примитивных элементов в* U.

Так как c^+ — гомоморфизм градуированных алгебр степени 0, то

$$P(U)=\sum_{n\geqslant 1}(P(U)\cap U^n).$$

Достаточно доказать, что если $n>1$ и $a\in U^n$ примитивен, то $a=0$. Элемент a записывается в виде $\sum_i\lambda_i a_i^n$, где $\lambda_i\in K$, $a_i\in\sigma(\mathfrak{g})$. Согласно (12), член бистепени $(1, n-1)$ элемента $c^+(a)$ равен $n\sum_i\lambda_i a_i\otimes a_i^{n-1}$. Имеем поэтому $\sum_i\lambda_i a_i\otimes a_i^{n-1}=0$. Если μ: $U\otimes U\to U$ — линейное отображение, определенное умножением в U, то

$$a=\sum_i\lambda_i a_i^n=\mu\left(\sum_i\lambda_i a_i\otimes a_i^{n-1}\right)=0.$$

Замечания. 1) $U_n = \sum_{i=0}^{n} U^i$ (гл. I, § 2, n° 7, следствие 4 теоремы 1).

2) Отображение η — единственный морфизм градуированных коалгебр $\mathsf{S}(\mathfrak{g})$ в U, при котором $\eta(1) = 1$ и $\eta(x) = \sigma(x)$ для любого $x \in \mathfrak{g}$. В самом деле, если η' удовлетворяет этим условиям, то индукцией по n покажем, что $\eta'(x^n) = \eta(x^n)$ для $x \in \mathfrak{g}$ и $n > 1$. Так как, согласно (3) и (11), $c_S^+(x^n) = \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n}{i} x^i \otimes x^{n-i}$, то $(\eta \otimes \eta)(c_S^+(x^n)) = (\eta' \otimes \eta')(c_S^+(x^n))$ по предположению индукции. Отсюда следует тогда, что $c^+(\eta(x^n)) = c^+(\eta'(x^n))$; поэтому $\eta(x^n) - \eta'(x^n)$ — примитивный элемент степени n, а значит — нуль (следствие предложения 9).

3) Пусть ψ — канонический изоморфизм биалгебры $\mathsf{TS}(\mathfrak{g})$ на биалгебру $\mathsf{S}(\mathfrak{g})$ (*Alg.*, chap. IV, § 5, corollaire 1 de le proposition 12). Отображение

$$\eta \circ \psi \colon \mathsf{TS}(\mathfrak{g}) \to U$$

называется *каноническим.* Это единственный морфизм η' градуированных коалгебр $\mathsf{TS}(\mathfrak{g})$ в U, такой, что $\eta'(1) = 1$ и $\eta'(x) = \sigma(x)$ для любого $x \in \mathfrak{g}$.

4) Пусть V — векторное пространство. Примитивные элементы биалгебры $\mathsf{S}(V)$ являются элементами первой степени. Это вытекает из следствия предложения 9, примененного к коммутативной алгебре Ли V.

Пусть $(e_i)_{i \in I}$ — базис векторного пространства над K алгебры $\mathfrak{g}$, где множество индексов I вполне упорядочено. Для любого $\alpha \in \mathbf{N}^{(I)}$ положим

$$e_\alpha = \prod_{i \in I} \frac{\sigma(e_i)^{\alpha(i)}}{\alpha(i)!}. \tag{13}$$

Элементы e_α при $|\alpha| \leqslant n$ образуют базис векторного пространства U_n над K (гл. I, § 2, n° 7, следствие 3 теоремы 1). Имеем

$$e_0 = 1, \quad e_{\varepsilon_i} = \sigma(e_i) \quad \text{для любого} \quad i \in I.$$

Так как градуированная алгебра, ассоциированная с фильтрованной алгеброй U, коммутативна (*там же*, теорема 1), то для любых α, β из $\mathbf{N}^{(I)}$

$$e_\alpha \cdot e_\beta \equiv ((\alpha, \beta)) \cdot e_{\alpha+\beta} \bmod . U_{|\alpha|+|\beta|-1}, \tag{14}$$

где

$$(\alpha, \beta) = \prod_{i \in I} \frac{(\alpha(i) + \beta(i))!}{\alpha(i)!\, \beta(i)!}.$$

С другой стороны,

$$\varepsilon(e_0) = 1, \quad \varepsilon(e_\alpha) = 0 \quad \text{для} \quad |\alpha| \geqslant 1. \tag{15}$$

Наконец, согласно формуле (12), для любого $\alpha \in \mathbf{N}^{(I)}$ имеем

$$c(e_\alpha) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} e_\beta \otimes e_\gamma. \tag{16}$$

Эта формула позволяет определить алгебру $U' = \mathrm{Hom}(U, K)$, *дуальную* к коалгебре U (*Alg.*, chap. III, p. 143). Пусть $K[[X_i]]_{i \in I}$ — алгебра формальных степенных рядов от переменных $(X_i)_{i \in I}$ (см. *Alg.*, chap. III, p. 28); если $\lambda \in U'$, то обозначим через f_λ формальный ряд

$$f_\lambda = \sum_\alpha \langle \lambda, e_\alpha \rangle X^\alpha, \quad \text{где} \quad X^\alpha = \prod_{i \in I} X_i^{\alpha(i)},$$

а индекс суммирования α пробегает множество $\mathbf{N}^{(I)}$.

Предложение 10. *Отображение $\lambda \mapsto f_\lambda$ является изоморфизмом алгебры U' на алгебру формальных степенных рядов $K[[X_i]]_{i \in I}$.*

Так как (e_α) — базис U, отображение $\lambda \mapsto f_\lambda$ является K-линейным и биективным. С другой стороны, для любых λ, μ из U' имеем

$$\begin{aligned} f_{\lambda\mu} &= \sum_\alpha \langle \lambda\mu, e_\alpha \rangle X^\alpha = \sum_\alpha \langle \lambda \otimes \mu, c(e_\alpha) \rangle X^\alpha = \\ &= \sum_\alpha \left\langle \lambda \otimes \mu, \sum_{\beta+\gamma=\alpha} e_\beta \otimes e_\gamma \right\rangle X^\alpha \quad (\text{по формуле (16)}) = \\ &= \sum_{\beta, \gamma} \langle \lambda, e_\beta \rangle \langle \mu, e_\gamma \rangle X^{\beta+\gamma} = f_\lambda f_\mu, \end{aligned}$$

т. е. $\lambda \mapsto f_\lambda$ — изоморфизм *алгебр*, что и требовалось доказать.

6. *Структура фильтрованных биалгебр в случае характеристики* 0

В этом пункте мы продолжаем предполагать, что K — *поле характеристики* 0.

Если E — биалгебра, то каноническое вложение $P(E) \to E$ продолжается до морфизма биалгебр f_E: $U(P(E)) \to E$ (n° 4, предложение 8).

Теорема 1. *Пусть E — кокоммутативная биалгебра.*

а) *Морфизм биалгебр f_E: $U(P(E)) \to E$ инъективен.*

б) *Если на E существует фильтрация, совместимая со структурой биалгебры* (n° 2, определение 2), *то морфизм f_E — изоморфизм.*

(В случае б) биалгебра E отождествляется, следовательно, с обертывающей биалгеброй алгебры Ли своих примитивных элементов.)

Пусть c_E (соотв. ε_E) — копроизведение (соотв. коединица) биалгебры E. Положим $\mathfrak{g} = P(E)$; пусть $(e_i)_{i \in I}$ — базис векторного пространства $\mathfrak{g}$ над полем K, где множество индексов I совершенно упорядочено, и пусть $(e_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{N}^{(I)}}$ — базис в $U(\mathfrak{g})$, введенный в предшествующем пункте. Положим $X_\alpha = f_E(e_\alpha)$ для любого $\alpha \in \mathbf{N}^{(I)}$. По формулам (15) и (16) имеем

$$\varepsilon_E(X_0) = 1, \quad \varepsilon_E(X_\alpha) = 0 \text{ для } |\alpha| \geqslant 1, \tag{17}$$

$$c_E(X_\alpha) = \sum_{\beta + \gamma = \alpha} X_\beta \otimes X_\gamma \text{ для } \alpha \in \mathbf{N}^{(I)}, \tag{18}$$

так как f_E — морфизм коалгебр.

Покажем, что f_E инъективен. Это вытекает из следующей леммы:

Лемма 2. Пусть V — векторное пространство, E — коалгебра, $f\colon \mathsf{S}(V) \to E$ — морфизм коалгебр. Если ограничение f на $\mathsf{S}^0(V) + \mathsf{S}^1(V)$ инъективно, то инъективен и морфизм f.

Пусть $n \geqslant 0$; положим $\mathsf{S}_n = \sum_{i \leqslant n} \mathsf{S}^i(V)$, c_S — копроизведение в $\mathsf{S}(V)$, и покажем индукцией по n, что $f \mid \mathsf{S}_n$ инъективно. Так как утверждение тривиально для $n = 0$ и $n = 1$, то предположим, что $n \geqslant 2$ и что $u \in \mathsf{S}_n$ — элемент, для которого $f(u) = 0$. Имеем

$$0 = c_E(f(u)) = (f \otimes f)(c_S(u)) =$$
$$= f(u) \otimes 1 + 1 \otimes f(u) + (f \otimes f)(c_S^+(u)) = (f \otimes f)(c_S^+(u)).$$

Так как $c_S^+(u) \in \mathsf{S}_{n-1} \otimes \mathsf{S}_{n-1}$, то по формуле (11) и предположению индукции u — примитивный элемент в $\mathsf{S}(V)$, т. е. элемент степени 1 (n° 5, *замечание* 4), а значит, — нуль, ибо $f \mid \mathsf{S}^1(V)$ инъективно.

Отсюда следует, в частности, что семейство (X_α) *свободно*.

Покажем, что морфизм f_E сюръективен, если E обладает фильтрацией, совместимой со структурой биалгебры. Пусть $(E_n)_{n \geqslant 0}$ — такая фильтрация; положим $E_n^+ = E_n \cap \operatorname{Ker}(\varepsilon_E)$. Индукцией по n покажем, что E_n^+ содержится в образе f_E. Так как $E = K \cdot 1 + \bigcup_{n \geqslant 0} E_n^+$, то из этого будет следовать сюръективность f_E. Утверждение тривиально при $n = 0$ и вытекает из следствия предложения 6 из n° 3 при $n = 1$; будем предполагать теперь, что $n \geqslant 2$ и что $x \in E_n^+$. Согласно предложению 6 из n° 3,

$$c_E^+(x) \in \sum_{i=1}^{n-1} E_i^+ \otimes E_{n-i}^+.$$

По предположению индукции существуют скаляры $\lambda_{\alpha,\beta}$ для α, β из $\mathbf{N}^{(I)}$, равные нулю почти для всех номеров и такие, что

$$c_E^+(x) = \sum_{\alpha,\,\beta\neq 0} \lambda_{\alpha,\beta} X_\alpha \otimes X_\beta. \tag{19}$$

По формуле (18) имеем:

$$\left(c_E^+ \otimes \mathrm{Id}_E\right)\left(c_E^+(x)\right) = \sum_{\alpha,\,\beta,\,\gamma\neq 0} \lambda_{\alpha+\beta,\gamma} X_\alpha \otimes X_\beta \otimes X_\gamma,$$

$$\left(\mathrm{Id}_E \otimes c_E^+\right)\left(c_E^+(x)\right) = \sum_{\alpha,\,\beta,\,\gamma\neq 0} \lambda_{\alpha,\beta+\gamma} X_\alpha \otimes X_\beta \otimes X_\gamma.$$

По предложению 3 n° 1 и вследствие линейной независимости X_α имеем

$$\lambda_{\alpha+\beta,\gamma} = \lambda_{\alpha,\beta+\gamma} \text{ для любых } \alpha,\ \beta,\ \gamma \text{ из } \mathbf{N}^{(I)} - \{0\}. \tag{20}$$

Кроме того, копроизведение c_E кокоммутативно; рассуждение, аналогичное приведенному выше, влечет за собой равенство

$$\lambda_{\alpha,\beta} = \lambda_{\beta,\alpha} \text{ для любых } \alpha,\ \beta \text{ из } \mathbf{N}^{(I)} - \{0\}. \tag{21}$$

Предположим, что существует семейство скаляров (μ_α) *при* $|\alpha| \geqslant 2$, *такое, что*

$$\mu_{\alpha+\beta} = \lambda_{\alpha,\beta} \text{ для любых } \alpha,\ \beta \text{ из } \mathbf{N}^{(I)} - \{0\}. \tag{22}$$

Тогда вследствие формулы (18) имеем

$$c_E^+(x) = \sum_{\alpha,\,\beta\neq 0} \mu_{\alpha+\beta} X_\alpha \otimes X_\beta = \sum_{|\gamma|\geqslant 2} \mu_\gamma c_E^+(X_\gamma),$$

поэтому $y = x - \sum_{|\gamma|\geqslant 2} \mu_\gamma X_\gamma$ примитивен, а значит, принадлежит $P(E) \subset \mathrm{Im}\, f_E$. Отсюда

$$x = y + \sum_{|\gamma|\geqslant 2} \mu_\gamma f_E(e_\gamma) \in \mathrm{Im}\, f_E.$$

Доказательство будет, таким образом, завершено, если мы докажем следующую лемму:

Лемма 3. *Если семейство скаляров* $(\lambda_{\alpha,\beta})$ *с конечным носителем* (α, β *из* $\mathbf{N}^{(I)} - \{0\}$) *удовлетворяет условиям* (20) *и* (21), *то существует семейство* $(\mu_\alpha)_{|\alpha|\geqslant 2}$ *скаляров с конечным носителем, такое, что* $\mu_{\alpha+\beta} = \lambda_{\alpha,\beta}$ *при* α, β, *не равных нулю.*

Достаточно доказать, что

$$\alpha + \beta = \gamma + \delta \tag{23}$$

влечет за собой $\lambda_{\alpha,\beta}=\lambda_{\gamma,\delta}$ при α, β, γ, δ, отличных от нуля. По лемме Рисса о разложении (*Алг.*, гл. IV, n° 10, теорема 1) существуют π, ρ, σ и τ из $\mathbf{N}^{(I)}$, такие, что

$$\alpha=\pi+\sigma,\quad \beta=\rho+\tau,\quad \gamma=\pi+\rho,\quad \delta=\sigma+\tau.$$

Предположим, что $\pi\neq 0$; так как $\sigma+\beta=\rho+\delta$, то соотношение (20) влечет за собой

$$\lambda_{\alpha,\beta}=\lambda_{\pi+\sigma,\beta}=\lambda_{\pi,\sigma+\beta}=\lambda_{\pi,\rho+\delta}=\lambda_{\pi+\rho,\delta}=\lambda_{\gamma,\delta}.$$

Если же $\pi=0$, то $\beta=\gamma+\tau$ и $\delta=\alpha+\tau$, откуда

$$\lambda_{\alpha,\beta}=\lambda_{\alpha,\gamma+\tau}=\lambda_{\alpha+\tau,\gamma}=\lambda_{\delta,\gamma},$$

согласно (20), но так как $\lambda_{\delta,\gamma}=\lambda_{\gamma,\delta}$ по формуле (21), то $\lambda_{\alpha,\beta}=\lambda_{\gamma,\delta}$.

§ 2. Свободные алгебры Ли

1. Напоминание о свободных алгебрах

Пусть X — множество. Напомним конструкцию свободного группоида $M(X)$ над X (*Alg.*, chap. I, p. 77). Индукцией по $n\geqslant 1$ определим множества X_n, полагая $X_1=X$ и беря в качестве X_n объединение множеств $X_p\times X_{n-p}$ для $p=1, 2, \ldots, n-1$; если X конечно, то конечно и X_n для любого n. Объединение семейства $(X_n)_{n\geqslant 1}$ обозначается через $M(X)$; каждое из множеств X_n (и, в частности, X) отождествляется с подмножеством в $M(X)$. Пусть w и w' — элементы из $M(X)$; обозначим через p и q целые числа, такие, что $w\in X_p$ и $w'\in X_q$, и положим $n=p+q$; образ пары (w, w') при каноническом вложении $X_p\times X_{n-p}$ в X_n обозначается через $w.w'$ и называется произведением w и w'. Любое отображение X в группоид M продолжается единственным способом до гомоморфизма группоидов $M(X)$ в M.

Пусть w — элемент из $M(X)$; единственное целое число n, такое, что $w\in X_n$, называется *длиной* w и обозначается через $l(w)$. Имеем $l(w.w')=l(w)+l(w')$ для любых w, w' из $M(X)$. Множество X является подмножеством в $M(X)$, состоящим из элементов длины 1. Любой элемент w длины $\geqslant 2$ единственным образом записывается в виде $w=w'.w''$.

Алгебра группоида $M(X)$ с коэффициентами в кольце K обозначается через $\mathrm{Lib}(X)$, или $\mathrm{Lib}_K(X)$, если есть необходимость уточнить кольцо K. Множество $M(X)$ является базисом K-модуля $\mathrm{Lib}(X)$, и X, таким образом, отождествляется с подмножеством в $\mathrm{Lib}(X)$. Если A — алгебра, то любое отображение X в A продолжается единственным способом до гомоморфизма $\mathrm{Lib}(X)$ в A (*Alg.*, chap. III, p. 22, proposition 7).

2. Построение свободной алгебры Ли

Определение 1. *Назовем свободной алгеброй Ли над множеством X факторалгебру $L(X) = \mathrm{Lib}(X)/\mathfrak{a}$, где $\mathfrak{a}$ — двусторонний идеал в $\mathrm{Lib}(X)$, порожденный элементами вида*

$$Q(a) = a \,.\, a \text{ для любого } a \text{ из } \mathrm{Lib}(X), \tag{1}$$

$$J(a, b, c) = a \,.\, (b \,.\, c) + b \,.\, (c \,.\, a) + c \,.\, (a \,.\, b) \tag{2}$$

для любых a, b, c, из $\mathrm{Lib}(X)$.

Ясно, что $L(X)$ есть K-алгебра Ли; произведение двух элементов u, v из $L(X)$ будет обозначаться через $[u, v]$. Если есть необходимость подчеркнуть основное кольцо K, то пишут $L_K(X)$ вместо $L(X)$.

Следующее предложение оправдывает название „свободная алгебра Ли“, присвоенное алгебре $L(X)$.

Предложение 1. *Пусть ψ — каноническое отображение $\mathrm{Lib}(X)$ на $L(X)$ и φ — ограничение ψ на X. Для любого отображения f множества X в алгебру Ли $\mathfrak{g}$ существует единственный гомоморфизм $F\colon L(X) \to \mathfrak{g}$, такой, что $f = F \circ \varphi$.*

а) *Существование F.* Пусть h — гомоморфизм $\mathrm{Lib}(X)$ в $\mathfrak{g}$, продолжающий f (n° 1). Для любого a из $\mathrm{Lib}(X)$ имеем $h(Q(a)) = h(a \,.\, a) = [h(a), h(a)] = 0$; аналогично выполнение тождества Якоби в $\mathfrak{g}$ влечет за собой $h(J(a, b, c)) = 0$ для a, b, c из $\mathrm{Lib}(X)$. Отсюда следует, что $h(\mathfrak{a}) = 0$, а это позволяет определить гомоморфизм F алгебры $L(X)$ в $\mathfrak{g}$, для которого $h = F \circ \psi$. Беря ограничение на X, получаем $f = F \circ \varphi$.

б) *Единственность F.* Пусть $F'\colon L(X) \to \mathfrak{g}$ — гомоморфизм, такой, что $f = F' \circ \varphi$. Гомоморфизмы $F \circ \psi$ и $F' \circ \psi$ алгебры $\mathrm{Lib}(X)$ в $\mathfrak{g}$ совпадают на X, а значит, равны; так как ψ сюръективен, то $F = F'$.

Следствие 1. *Семейство $(\varphi(x))_{x \in X}$ свободно над K в $L(X)$.*

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — различные элементы из X и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ из K таковы, что

$$\lambda_1 \cdot \varphi(x_1) + \ldots + \lambda_n \cdot \varphi(x_n) = 0. \tag{3}$$

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, порожденная модулем K. Для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ существует гомоморфизм F_i алгебры $L(X)$ в $\mathfrak{g}$, такой, что $F_i(\varphi(x_i)) = 1$ и $F_i(\varphi(x)) = 0$ для $x \neq x_i$ (предложение 1); применяя F_i к соотношению (3), получаем $\lambda_i = 0$.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{a}$ — алгебра Ли. Любое расширение $L(X)$ при помощи $\mathfrak{a}$ расщепляется (является несущественным).*

Пусть $\mathfrak{a} \xrightarrow{\lambda} \mathfrak{g} \xrightarrow{\mu} L(X)$ — некоторое такое расширение (гл. I, § 1, n° 7). Так как μ сюръективно, то существует отображение f множества X в $\mathfrak{g}$, такое, что $\varphi = \mu \circ f$. Пусть F — гомоморфизм $L(X)$ в $\mathfrak{g}$, такой, что $f = F \circ \varphi$ (предложение 1). Имеем $(\mu \circ F) \circ \varphi = \mu \circ f = \varphi$, и предложение 1 доказывает, что $\mu \circ F$ — тождественный автоморфизм $L(X)$. Заданное расширение, таким образом, расщепляется (гл. I, § 1, n° 7, предложение 6 и определение 6).

Так как кольцо K не является нулевым, то следствие 1 предложения 1 показывает, что φ *инъективно. Можно, таким образом, отождествить при помощи* φ *множество* X *и множество* $\varphi(X)$ *из* $L(x)$; в этом случае X порождает $L(X)$ и любое отображение X в некоторую алгебру Ли $\mathfrak{g}$ *продолжается* до гомоморфизма алгебр Ли $L(X)$ в $\mathfrak{g}$.

Замечание. Если X пусто, то $M(X)$ пусто, следовательно, $L(X) = \{0\}$. Если X состоит из одного элемента x, то подмодуль $K \cdot x$ алгебры $L(X)$ является в ней подалгеброй; так как X порождает $L(X)$, то следствие 1 предложения 1 показывает, что $L(X)$ — свободный модуль с базисом $\{x\}$.

3. *Задания алгебры Ли образующими и определяющими соотношениями*

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i \in I}$ — некоторое семейство элементов из $\mathfrak{g}$. Обозначим через $f_{\boldsymbol{a}}$ гомоморфизм $L(I)$ в $\mathfrak{g}$, отображающий любое $i \in I$ в a_i. Образ этого гомоморфизма является подалгеброй в $\mathfrak{g}$, порожденной семейством $\boldsymbol{a}$; элементы ядра $f_{\boldsymbol{a}}$ называются *определяющими соотношениями* семейства $\boldsymbol{a}$. Говорят, что семейство $\boldsymbol{a}$ — система образующих (соотв. свободных, базисных образующих), если $f_{\boldsymbol{a}}$ сюръективен (соотв. инъективен, биективен).

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. *Заданием* $\mathfrak{g}$ *образующими и определяющими соотношениями* называется пара $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r})$, образованная системой образующих $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i \in I}$ и системой $\boldsymbol{r} = (r_j)_{j \in J}$ ее определяющих соотношений, порождающих как идеал в $L(I)$ ядро отображения $f_{\boldsymbol{a}}$. Говорят также, что $\mathfrak{g}$ задана образующими $\boldsymbol{a}$, связанными определяющими соотношениями r_j $(j \in J)$.

Пусть I — множество и $\boldsymbol{r} = (r_i)_{i \in I}$ — семейство элементов свободной алгебры Ли $L(I)$; пусть $\mathfrak{a}_{\boldsymbol{r}}$ — идеал в $L(I)$, порожденный $\boldsymbol{r}$. Факторалгебра $L(I, \boldsymbol{r}) = L(I)/\mathfrak{a}_{\boldsymbol{r}}$ называется алгеброй Ли, определенной I и семейством определяющих соотношений $(r_j)_{j \in J}$; говорят также, что $L(I, \boldsymbol{r})$ определена заданием $(I, \boldsymbol{r})$, или также $\big(I; (r_j = 0)_{j \in J}\big)$. Если семейство $\boldsymbol{r}$ пусто, то $L(I, \boldsymbol{r}) = L(I)$.

Пусть I и $\boldsymbol{r}$ имеют тот же смысл, что и прежде; обозначим через ξ_i образ i в $L(I, \boldsymbol{r})$. Семейство образующих $\xi = (\xi_i)_{i \in I}$ и семейство определяющих соотношений $\boldsymbol{r}$ составляют задание алгебры $L(I, \boldsymbol{r})$. Обратно, если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r})$ при $\boldsymbol{a} = (a_i)_{i \in I}$ — задание $\mathfrak{g}$ образующими и определяющими соотношениями, то существует единственный изоморфизм $u\colon L(I, \boldsymbol{r}) \to \mathfrak{g}$, такой, что $u(\xi_i) = a_i$ для любого $i \in I$.

4. *Многочлены Ли и подстановки*

Пусть I — множество. Обозначим через T_i канонический образ элемента i множества I в алгебре $L(I)$ (которую мы будем иногда обозначать также через $L((T_i)_{i \in I})$); элементы из $L(I)$ называются *лиевыми многочленами* от переменных $(T_i)_{i \in I}$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли. Если $\boldsymbol{t} = (t_i)_{i \in I}$ — семейство элементов из $\mathfrak{g}$, то через $f_{\boldsymbol{t}}$ мы будем обозначать гомоморфизм $L(I)$ в $\mathfrak{g}$, такой, что $f_{\boldsymbol{t}}(T_i) = t_i$ для любого $i \in I$ (n° 2, предложение 1). Образ элемента P алгебры $L(I)$ при гомоморфизме $f_{\boldsymbol{t}}$ мы будем обозначать через $P((t_i)_{i \in I})$. В частности, $P((T_i)_{i \in I}) = P$. Иногда говорят, что элемент $P((t_i)_{i \in I})$ является элементом алгебры $\mathfrak{g}$, полученным подстановкой t_i вместо T_i в лиев многочлен $P((T_i)_{i \in I})$.

Пусть $\sigma\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ — гомоморфизм алгебр Ли. Для любого семейства $\boldsymbol{t} = (t_i)_{i \in I}$ элементов алгебры $\mathfrak{g}$ и любого $P \in L(I)$ имеем

$$\sigma(P((t_i)_{i \in I})) = P((\sigma(t_i))_{i \in I}), \tag{4}$$

ибо $\sigma \circ f_{\boldsymbol{t}}$ отображает T_i на $\sigma(t_i)$ для любого $i \in I$.

Пусть $(Q_j)_{j \in J}$ — семейство элементов из $L(I)$, и пусть $P \in L(J)$. Подставляя Q_j вместо T_j в P, мы получим многочлен Ли $R = P((Q_j)_{j \in J}) \in L(I)$. Имеем

$$R((t_i)_{i \in I}) = P((Q_j((t_i)_{i \in I}))_{j \in J}) \tag{5}$$

для любого семейства $\boldsymbol{t} = (t_i)_{i \in I}$ элементов алгебры Ли $\mathfrak{g}$, что легко увидеть, преобразуя при помощи гомоморфизма $f_{\boldsymbol{t}}$ равенство $R = P((Q_j)_{j \in J})$ и используя (4).

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, I — конечное множество и $P \in L(I)$ Предположим, что $\mathfrak{g}$ — свободный K-модуль. Отображение

$$\widetilde{P}\colon \mathfrak{g}^I \to \mathfrak{g},$$

определенное формулой $\widetilde{P}((t_i)_{i\in I}) = P((t_i)_{i\in I})$, является, таким образом, *полиномиальным* [1]). В самом деле, множество F отображений $\mathfrak{g}^I$ в $\mathfrak{g}$ является алгеброй Ли относительно операции коммутирования, определенной формулой

$$[\varphi, \psi](t) = [\varphi(t), \psi(t)]; \tag{6}$$

подмножество F' полиномиальных отображений $\mathfrak{g}^I$ в $\mathfrak{g}$ является ее подалгеброй Ли вследствие билинейности коммутирования. Наше утверждение следует, таким образом, из того, что отображение $P \mapsto \widetilde{P}$ — гомоморфизм алгебр Ли и $\widetilde{T}_i = \mathrm{pr}_i \in F'$ для любого i.

5. Функториальные свойства

Предложение 2. *Пусть X и Y — два множества. Любое отображение $u\colon X \to Y$ продолжается единственным способом до гомоморфизма алгебр Ли $L(u)\colon L(X) \to L(Y)$. Для любого отображения $v\colon Y \to Z$ имеем $L(v \circ u) = L(v) \circ L(u)$.*

Существование и единственность $L(u)$ следуют из предложения 1, n° 2. Гомоморфизмы $L(v \circ u)$ и $L(v) \circ L(u)$ имеют одинаковое ограничение на X, а значит, равны по предложению 1.

Следствие. *Если u инъективно* (соотв. *сюръективно*, *биективно*), *то таково же и $L(u)$.*

Так как утверждение тривиально при $X = \varnothing$, то предположим, что $X \neq \varnothing$. Если u инъективно, то существует отображение v множества Y в X, такое, что $v \circ u$ — тождественное отображение X; в силу предложения 2 $L(v) \circ L(u)$ — тождественный автоморфизм $L(X)$, так что $L(u)$ инъективно. Так как u сюръективно, существует отображение w множества Y в множество X, такое, что $u \circ w$ — тождественное отображение Y; поэтому $L(u) \circ L(w)$ — тождественное отображение $L(Y)$, что и доказывает сюръективность $L(u)$.

Пусть X — множество и S — его подмножество. Предыдущее следствие показывает, что каноническое вложение S в X продолжается до изоморфизма α алгебры $L(S)$ на подалгебру $L'(S)$

---

[1]) Напомним (*Alg.*, chap. IV, § 5, n° 10, n$^{\text{elle}}$ éd.) определение полиномиального отображения свободного модуля M в модуль N: если q — целое число $\geqslant 0$, то отображение $f\colon M \to N$ называется *однородным полиномиальным отображением степени q*, если существует полилинейное отображение u модуля M^q в N, такое, что

$$f(x) = u(x, \ldots, x) \quad \text{для любого} \quad x \in M.$$

Отображение M в N называется *полиномиальным*, если оно является конечной суммой однородных полиномиальных отображений подходящих степеней.

алгебры $L(X)$, порожденную S; мы будем *отождествлять* $L(S)$ и $L'(S)$ при помощи α.

Пусть $(S_\alpha)_{\alpha\in I}$ — *возрастающее фильтрующееся семейство* подмножеств множества X с объединением S. Соотношение $S_\alpha\subset S_\beta$ влечет за собой включение $L(S_\alpha)\subset L(S_\beta)$, так что семейство подалгебр $L(S_\alpha)$ алгебры $L(X)$ является возрастающим фильтрующимся семейством. Следовательно, $\mathfrak{g}=\bigcup_{\alpha\in I} L(S_\alpha)$ — подалгебра Ли алгебры $L(X)$; имеем $S\subset\mathfrak{g}$, откуда $L(S)\subset\mathfrak{g}$, и так как $L(S_\alpha)\subset L(S)$ для любого $\alpha\in I$, то $\mathfrak{g}\subset L(S)$. Поэтому

$$L\Big(\bigcup_{\alpha\ni I} S_\alpha\Big)=\bigcup_{\alpha\in I} L(S_\alpha) \tag{7}$$

для любого *возрастающего фильтрующегося* семейства $(S_\alpha)_{\alpha\in I}$ подмножеств из X.

Применяя предыдущее к семейству конечных подмножеств из X,можно убедиться в том, что каждый элемент из $L(X)$ имеет вид $P(x_1, \ldots, x_n)$, где P — многочлен Ли от n переменных и $x_1, \ldots, x_n$ — элементы из X.

Предложение 3. *Пусть K' — ненулевое коммутативное кольцо и u: $K\to K'$ — гомоморфизм колец. Для любого множества X существует единственный гомоморфизм K'-алгебр Ли*

$$v\colon\ L_K(X)\otimes K'\to L_{K'}(X),$$

такой, что $v(x\otimes 1)=x$ для любого $x\in X$. Более того, v — изоморфизм.

Применяя предложение 1 к алгебре $\mathfrak{g}=L_{K'}(X)$, рассматриваемой как K-алгебра Ли, и к отображению $x\mapsto x$ множества X в $\mathfrak{g}$, получим K-гомоморфизм $L_K(X)\to L_{K'}(X)$, индуцирующий K'-гомоморфизм v: $L_K(X)\otimes K'\to L_{K'}(X)$. Единственность v и то, что v — изоморфизм, следует из того, что пара $(L_K(X)\otimes K',\ x\mapsto x\otimes 1)$ является решением той же универсальной задачи, что и пара $(L_{K'}(X),\ x\mapsto x)$.

Замечание. Пусть $\mathfrak{h}'$ — некоторая K'-алгебра Ли и $\mathfrak{h}$ — K-алгебра Ли, получающаяся из нее сужением кольца скаляров. Если $P\in L_K(X)$, то можно определить $\widetilde{P}$: $\mathfrak{h}^X\to\mathfrak{h}$ (n° 4). Очевидно тогда, что

$$\widetilde{P}=(v(P\otimes 1))^{\sim}.$$

6. Градуировки

Пусть Δ — коммутативный моноид, записываемый аддитивно. Обозначим через φ_0 отображение X в Δ и через φ — гомоморфизм свободного группоида $M(X)$ в Δ, продолжающий φ_0. Для

любого $\delta \in \Delta$ пусть $\mathrm{Lib}^{\delta}(X)$ — подмодуль в $\mathrm{Lib}(X)$, базисом которого является подмножество $\varphi^{-1}(\delta)$ группоида $M(X)$. Семейство $(\mathrm{Lib}^{\delta}(X))_{\delta \in \Delta}$ является градуировкой алгебры $\mathrm{Lib}(X)$, т. е.

$$\mathrm{Lib}(X) = \bigoplus_{\delta \in \Delta} \mathrm{Lib}^{\delta}(X), \tag{8}$$

$$\mathrm{Lib}^{\delta}(X) \cdot \mathrm{Lib}^{\delta'}(X) \subset \mathrm{Lib}^{\delta+\delta'}(X) \quad \text{для} \quad \delta,\ \delta' \text{ из } \Delta. \tag{9}$$

(*Alg.*, chap. III, p. 31, *exemple* 3).

Лемма 1. *Идеал* $\mathfrak{a}$ *из определения* 1 *градуирован.*

Для любых a, b из $\mathrm{Lib}(X)$ положим $B(a, b) = a \cdot b + b \cdot a$. Формулы

$$B(a, b) = Q(a + b) - Q(a) - Q(b), \tag{10}$$

$$Q(\lambda_1 \cdot w_1 + \ldots + \lambda_n \cdot w_n) = \sum_i \lambda_i^2 Q(w_i) + \sum_{i<j} \lambda_i \lambda_j B(w_i, w_j) \tag{11}$$

для любых $w_1, \ldots, w_n$ из $M(X)$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ из K показывают, что семейства $(Q(a))_{a \in \mathrm{Lib}(X)}$ и $(Q(w), B(w, w'))_{w, w' \in M(X)}$ порождают один и тот же подмодуль модуля $\mathrm{Lib}(X)$. Так как J трилинейно, то идеал $\mathfrak{a}$ порожден однородными элементами $Q(w)$, $B(w, w')$ и $J(w, w', w'')$, где w, w', w'' — элементы из $M(X)$, а значит, градуирован (*Alg.*, chap. III, p. 32, proposition 1).

Ч. Т. Д.

Наделим алгебру Ли $L(X) = \mathrm{Lib}(X)/\mathfrak{a}$ факторградуировкой. Однородная компонента степени δ алгебры $L(X)$ обозначается через $L^{\delta}(X)$; это подмодуль в $L(X)$, порожденный образами элементов $w \in M(X)$, таких, что $\varphi(w) = \delta$.

Мы будем использовать обычно два следующих частных случая:

а) *Моноградуировка.* Положим $\Delta = \mathbf{N}$ и $\varphi_0(x) = 1$ для любого $x \in X$, откуда $\varphi(w) = l(w)$, если w лежит в $M(X)$. Пусть K-модуль $L^n(X)$ порожден образами элементов длины n в $M(X)$, которые мы будем называть *одночленами* (или *коммутаторами*, или *альтернантами*) *степени* n. Мы увидим позднее, что модуль $L^n(X)$ свободен и обладает свободным базисом, состоящим из одночленов степени n (n° 11, теорема 1). Имеем $L(X) = \bigoplus_{n \geqslant 1} L^n(X)$ и $L^1(X)$ обладает базисом X (n° 2, следствие 1 предложения 1). По построению $M(X)$ имеет место равенство

$$L^n(X) = \sum_{p=1}^{n-1} [L^p(X), L^{n-p}(X)] \tag{12}$$

и, в частности,

$$[L^m(X), L^n(X)] \subset L^{m+n}(X). \tag{13}$$

б) *Полиградуировка.* Выберем в качестве Δ свободный коммутативный моноид $\mathbf{N}^{(X)}$ с множеством свободных образующих X. Отображение φ_0 множества X в Δ определяется формулой $(\varphi_0(x))(x') = \delta_{xx'}$, где $\delta_{xx'}$ — символ Кронекера. Для любого $w \in M(X)$ и любого $x \in X$ целое число $(\varphi(w))(x)$ является „числом вхождений буквы x в w“. Для любого α из $\mathbf{N}^{(X)}$ положим $|\alpha| = \sum_{x \in X} \alpha(x)$, откуда $|\varphi(w)| = l(w)$, если w принадлежит $M(X)$. Выводим отсюда, что

$$L^n(X) = \bigoplus_{|\alpha|=n} L^\alpha(X); \tag{14}$$

очевидно также, что

$$[L^\alpha(X), L^\beta(X)] \subset L^{\alpha+\beta}(X) \quad \text{для любых} \quad \alpha, \beta \text{ из } \mathbf{N}^{(X)}. \tag{15}$$

Предложение 4. *Пусть S — подмножество в X. Если отождествить $\mathbf{N}^{(S)}$ с его каноническим образом в $\mathbf{N}^{(X)}$* (*Alg.*, chap. I, p. 89), *то $L(S) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^{(S)}} L^\alpha(X)$. Более того, для любого $\alpha \in \mathbf{N}^{(S)}$ однородная компонента степени α по отношению к полиградуировке $L(S)$ равна $L^\alpha(X)$.*

Пусть $\alpha \in \mathbf{N}^{(S)}$. Модуль $L^\alpha(S)$ порожден образами в $L(X)$ элементов w из $M(S)$, таких, что $\varphi(w) = \alpha$, т. е. (*Alg.*, chap. I, p. 91, formules (23) et (24)) множеством элементов w из $M(X)$, таких, что $\varphi(w) = \alpha$. Следовательно, $L^\alpha(S) = L^\alpha(X)$. Отсюда и из соотношения $L(S) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^{(S)}} L^\alpha(S)$ вытекает наше предложение.

Следствие. *Для любого семейства подмножеств $(S_i)_{i \in I}$ множества X выполняется соотношение*

$$L\Big(\bigcap_{i \in I} S_i\Big) = \bigcap_{i \in I} L(S_i). \tag{16}$$

Это вытекает из предложения 4 и очевидной формулы

$$\mathbf{N}^{(S)} = \bigcap_{i \in I} \mathbf{N}^{(S_i)}, \tag{17}$$

в которой нужно положить

$$S = \bigcap S_i.$$

7. Нижний центральный ряд

Предложение 5. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *алгебра Ли и* P — *подмодуль в* $\mathfrak{g}$. *Определим подмодули* P_n *модуля* $\mathfrak{g}$ *формулами* $P_1 = P$ *и* $P_{n+1} = [P, P_n]$ *при* $n \geqslant 1$. *Тогда*

$$[P_m, P_n] \subset P_{m+n}, \tag{18}$$

$$P_n = \sum_{p=1}^{n-1} [P_p, P_{n-p}] \quad \text{при} \quad n \geqslant 2. \tag{19}$$

Докажем (18) индукцией по m. Случай $m = 1$ очевиден. Согласно тождеству Якоби, имеем

$$[[P, P_m], P_n] \subset [P_m, [P, P_n]] + [P, [P_m, P_n]],$$

т. е.

$$[P_{m+1}, P_n] \subset [P_m, P_{n+1}] + [P, [P_m, P_n]].$$

По предположению индукции $[P_m, P_{n+1}] \subset P_{m+n+1}$ и $[P_m, P_n] \subset P_{m+n}$, откуда

$$[P_{m+1}, P_n] \subset P_{m+n+1} + [P, P_{m+n}] = P_{m+n+1}.$$

По формуле (18) имеем $P_n \supset \sum_{p=1}^{n-1} [P_p, P_{n-p}] \supset [P_1, P_{n-1}] = P_n$, т. е. верно (19).

В случае когда $P = \mathfrak{g}$, последовательность (P_n) является *нижним центральным рядом* $(\mathscr{C}^n\mathfrak{g})$ алгебры $\mathfrak{g}$ (гл. I, § 1, n° 5). Поэтому имеет место

Предложение 6. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *алгебра Ли и* $(\mathscr{C}^n\mathfrak{g})_{n\geqslant 1}$ — *ее нижний центральный ряд. Тогда*

$$[\mathscr{C}^m\mathfrak{g}, \mathscr{C}^n\mathfrak{g}] \subset \mathscr{C}^{m+n}\mathfrak{g} \quad \text{для} \quad m \geqslant 1 \text{ и } n \geqslant 1.$$

Обобщая определение 1 гл. I, § 4, n° 1, назовем алгебру Ли $\mathfrak{g}$ *нильпотентной*, если $\mathscr{C}^n\mathfrak{g} = \{0\}$ для достаточно большого n. Назовем *классом нильпотентности* нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ наименьшее целое n, такое, что $\mathscr{C}^{n+1}\mathfrak{g} = \{0\}$.

Предложение 7. *Пусть* X — *множество, и пусть* n — *целое число* $\geqslant 1$.

а) $L^{n+1}(X) = [L^1(X), L^n(X)]$.

б) *Модуль* $L^n(X)$ *порожден элементами* $[x_1, [x_2, \ldots, [x_{n-1}, x_n] \ldots]]$, *где* $(x_1, \ldots, x_n)$ *пробегает множество последовательностей из* n *элементов множества* X.

в) *Нижний центральный ряд алгебры* $L(X)$ *задается формулами* $\mathscr{C}^n(L(X)) = \sum_{p\geqslant n} L^p(X)$.

а) Будем применять предложение 5 с $\mathfrak{g} = L(X)$ и $P = L^1(X)$. Индукцией по n выводим из (12) (n°6) и (19) равенство $P_n = L^n(X)$. Искомое соотношение эквивалентно тогда определению $[P, P_n] = P_{n+1}$.

б) Это следует из а) индукцией по n.

в) Положим $\mathfrak{g} = L(X)$ и $\mathfrak{g}_n = \sum_{p \geqslant n} L^p(X)$. Имеем $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1$ и формула (13) из n°6 влечет за собой включение $[\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_m] \subset \mathfrak{g}_{n+m}$; в частности, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_n] \subset \mathfrak{g}_{n+1}$. Индукцией по n получаем, что $\mathscr{C}^n\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_n$. Кроме того, из а) индукцией по n выводим, что $L^n(X) \subset \mathscr{C}^n\mathfrak{g}$. Так как $\mathscr{C}^n\mathfrak{g}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, то вследствие а) соотношение $L^p(X) \subset \mathscr{C}^n\mathfrak{g}$ влечет за собой равенство

$$L^{p+1}(X) = [L^1(X), L^p(X)] \subset \mathscr{C}^n\mathfrak{g}.$$

Имеем, следовательно, $L^p(X) \subset \mathscr{C}^n\mathfrak{g}$ для $p \geqslant n$, так что $\mathfrak{g}_n \subset \mathscr{C}^n\mathfrak{g}$.

Следствие. *Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и $(x_i)_{i \in I}$ — ее система образующих. В качестве системы образующих n-го члена $\mathscr{C}^n\mathfrak{g}$ ее нижнего центрального ряда как модуля можно выбрать систему коммутаторов вида $[x_{i_1}, [x_{i_2}, \ldots, [x_{i_{p-1}}, x_{i_p}] \ldots]]$, где $p \geqslant n$ и $i_1, \ldots, i_p$ — индексы из I.*

Пусть f — гомоморфизм $L(I)$ в $\mathfrak{g}$, такой, что $f(i) = x_i$ для любого $i \in I$. Так как $(x_i)_{i \in I}$ порождают $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g} = f(L(I))$, откуда $\mathscr{C}^n\mathfrak{g} = f(\mathscr{C}^n(L(I)))$ в силу предложения 4 гл. I, § 1, n°5. Следствие вытекает, таким образом, из утверждений б) и в) предложения 7.

8. Дифференцирования свободных алгебр Ли

Предложение 8. *Пусть X — множество, M — произвольный $L(X)$-модуль и d — отображение X в M. Существует единственное линейное отображение D алгебры $L(X)$ в M, продолжающее d и удовлетворяющее соотношению*

$$D([a, a']) = a . D(a') - a' . D(a) \text{ для любых } a, a' \text{ из } L(X). \tag{20}$$

Определим структуру алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на модуле $M \times L(X)$ введением коммутатора по формуле

$$[(m, a), (m', a')] = (a . m' - a' . m, [a, a']), \tag{21}$$

где a, a' из $L(X)$ и m, m' из M (гл. I, § 1, n°8). Пусть f — гомоморфизм $L(X)$ в $\mathfrak{g}$, такой, что $f(x) = (d(x), x)$ для любого x из X; положим $f(a) = (D(a), u(a))$ для любого a из $L(X)$. По формуле (21) u является гомоморфизмом $L(X)$ в себя; так как $u(x) = x$ для x из X, то $u(a) = a$ для любого a из $L(x)$, откуда

$$f(a) = (D(a), a). \tag{22}$$

Согласно формулам (21) и (22), соотношение (20) вытекает из того, что $f([a, a']) = [f(a), f(a')]$.

Обратно, пусть D' — отображение $L(X)$ в M, удовлетворяющее соотношению (20'), аналогичному (20), и продолжающее d. Положим $f'(a) = (D'(a), a)$ для любого $a \in L(X)$; по формулам (20') и (21) f' — гомоморфизм $L(X)$ в $\mathfrak{g}$, совпадающий с f на X, откуда $f = f'$ и $D' = D$.

Следствие. *Любое отображение X в $L(X)$ продолжается единственным образом до дифференцирования алгебры $L(X)$.*

В случае, когда M совпадает с модулем $L(X)$ относительно присоединенного представления, соотношение (20) означает, что D — дифференцирование.

9. Теорема об исключении

Предложение 9. *Пусть S_1 и S_2 — два непересекающихся подмножества и d — отображение $S_1 \times S_2$ в $L(S_2)$. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, являющаяся факторалгеброй алгебры $L(S_1 \cup S_2)$ по идеалу, порожденному элементами $[s_1, s_2] - d(s_1, s_2)$, где $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$; пусть ψ — каноническое отображение $L(S_1 \cup S_2)$ на $\mathfrak{g}$.*

а) *При $i = 1, 2$ ограничение φ_i отображения ψ на S_i продолжается до изоморфизма алгебры $L(S_i)$ на подалгебру $\mathfrak{a}_i$ алгебры $\mathfrak{g}$.*

б) $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 = \{0\}$ *и $\mathfrak{a}_2$ — идеал в $\mathfrak{g}$.*

При $i = 1, 2$ обозначим через ψ_i гомоморфизм алгебры $L(S_i)$ в $\mathfrak{g}$, продолжающий φ_i, и через $\mathfrak{a}_i$ — его образ. Ясно, что $\varphi_i(S_i)$ порождают $\mathfrak{a}_i$.

Пусть $s_1 \in S_1$; положим $D = \operatorname{ad} \varphi_1(s_1)$. Вследствие соотношения

$$[\varphi_1(s_1), \varphi_2(s_2)] = \psi_2(d(s_1, s_2)) \text{ для любого } s_2 \in S_2$$

дифференцирование D алгебры $\mathfrak{g}$ отображает $\varphi_2(S_2)$ в $\mathfrak{a}_2$; так как подалгебра $\mathfrak{a}_2$ алгебры $\mathfrak{g}$ порождена $\varphi_2(S_2)$, то $D(\mathfrak{a}_2) \subset \mathfrak{a}_2$. Множество $x \in \mathfrak{g}$, обладающих тем свойством, что $\mathfrak{a}_2$ устойчива относительно $\operatorname{ad} x$, является подалгеброй в $\mathfrak{g}$, содержащей по предыдущему $\varphi_1(S_1)$, а значит, и $\mathfrak{a}_1$. Таким образом,

$$[\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2] \subset \mathfrak{a}_2. \tag{23}$$

Поэтому $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2$ — подалгебра в $\mathfrak{g}$, и так как она содержит множество образующих $\varphi_1(S_1) \cup \varphi_2(S_2)$, то

$$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{g}. \tag{24}$$

Для любого $s_1 \in S_1$ существует дифференцирование D_{s_1} алгебры $L(S_2)$, такое, что $D_{s_1}(s_2) = d(s_1, s_2)$ для любого s_2 из S_2 (n° 8, следствие предложения 8). Отображение $s_1 \longmapsto D_{s_1}$ продол-

жается до гомоморфизма D алгебры $L(S_1)$ в алгебру Ли дифференцирований алгебры $L(S_2)$. Пусть $\mathfrak{h}$ — полупрямое произведение $L(S_1)$ и $L(S_2)$, соответствующее D (гл. I, § 1, n°8). Как модуль $\mathfrak{h}$ равен $L(S_1)\oplus L(S_2)$ и, в частности,

$$[(s_1, 0), (0, s_2)] = (0, d(s_1, s_2)) \tag{25}$$

для любых $s_1 \in S_1$ и $s_2 \in S_2$.

Из (25) следует существование гомоморфизма f алгебры $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{h}$, такого, что $f(\varphi_1(s_1)) = (s_1, 0)$ и $f(\varphi_2(s_2)) = (0, s_2)$ для любых $s_1 \in S_1$ и $s_2 \in S_2$. Отсюда немедленно выводится соотношение

$$f(\psi_1(a_1) + \psi_2(a_2)) = (a_1, a_2) \tag{26}$$

для любого $a_1 \in L(S_1)$ и любого $a_2 \in L(S_2)$.

Соотношение (26) показывает, что ψ_1 и ψ_2 инъективны и что $\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 = \{0\}$. Наше предложение следует тогда из формул (23) и (24).

Предложение 10 (теорема об исключении). *Пусть X — множество, S — подмножество в X и T — множество последовательностей $(s_1, \ldots, s_n, x)$, где $n \geqslant 0$, $s_1, \ldots, s_n$ — элементы из S, а x — элемент из $X - S$* [1]).

а) *Модуль $L(X)$ является прямой суммой подалгебры $L(S)$ алгебры $L(X)$ и идеала $\mathfrak{a}$ алгебры $L(X)$, порожденного множеством $X - S$.*

б) *Существует изоморфное отображение φ алгебры Ли $L(T)$ на $\mathfrak{a}$, переводящее $(s_1, \ldots, s_n, x)$ в $(\operatorname{ad} s_1 \circ \ldots \circ \operatorname{ad} s_n)(x)$.*

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, построенная так же, как и в предложении 9, причем

$$S_1 = S, \quad S_2 = T, \quad d(s, t) = (s, s_1, \ldots, s_n, x) \in T \subset L(T)$$

для любого $t = (s_1, \ldots, s_n, x)$ из T и $s \in S_1$. Отождествим $L(S)$ и $L(T)$ с их каноническими образами в $\mathfrak{g}$ (предложение 9, а)).

Пусть ψ — отображение $(s_1, \ldots, s_n, x) \mapsto (\operatorname{ad} s_1 \circ \ldots \circ \operatorname{ad} s_n)(x)$ множества T в $L(X)$. Очевидно, что $\psi(d(s, t)) = [s, \psi(t)]$ для любых $s \in S$, $t \in T$, так что существует гомоморфизм $\alpha\colon \mathfrak{g} \to L(X)$, ограничение которого на S тождественно, а на T равно ψ. Имеем $X - S \subset T$, откуда следует существование гомоморфизма $\beta\colon L(X) \to \mathfrak{g}$, ограничение которого на $X = S \cup (X - S)$ тождественно.

Покажем, что α — изоморфизм и что β — обратный к нему. Так как $\psi(x) = x$ для любого x из $X - S$, то понятно, что $\alpha \circ \beta$ совпадает с тождественным отображением на X, откуда $\alpha \circ \beta = \mathrm{Id}_{L(X)}$. Имеем, кроме того, $[s, t] = d(s, t)$ в $\mathfrak{g}$ для $s \in S$,

---

[1]) При $n = 0$ получаем элементы из $X - S$, откуда $X - S \subset T$.

$t \in T$ по построению; выводим отсюда, что $t = (s_1, \ldots, s_n, x)$ равно в $\mathfrak{g}$ элементу $(\operatorname{ad} s_1 \circ \ldots \circ \operatorname{ad} s_n)(x)$, откуда $t = \beta(\alpha(t))$. Так как $\beta(\alpha(s)) = s$ для любого $s \in S$ и так как $S \cup T$ порождает $\mathfrak{g}$, то $\beta \circ \alpha = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$.

Так как α — изоморфизм алгебры $\mathfrak{g}$ на $L(X)$, то предложение 9 показывает, что ограничение α на $L(T)$ — изоморфизм φ алгебры $L(T)$ на идеал $\mathfrak{b}$ алгебры $L(X)$, такой, что модуль $L(X)$ равен прямой сумме $L(S)$ и $\mathfrak{b}$. Ясно также, что

$$\varphi(s_1, \ldots, s_n, x) = (\operatorname{ad} s_1 \circ \ldots \circ \operatorname{ad} s_n)(x)$$

для любых $(s_1, \ldots, s_n, x)$ из T.

Таким образом, $\varphi(T) \subset \mathfrak{a}$, откуда $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$, так как $\varphi(T)$ порождает подалгебру $\mathfrak{b}$ алгебры $L(X)$. Однако $\mathfrak{b}$ — идеал и $X - S \subset \varphi(T) \subset \mathfrak{b}$, откуда $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$.

Следствие. *Пусть $y \in X$. Свободная алгебра Ли $L(X)$ является прямой суммой свободного подмодуля $K \cdot y$ и подалгебры Ли, системой свободных образующих которой является семейство элементов $((\operatorname{ad} y)^n \cdot z)$, где $n \geqslant 0$ и $z \in X - \{y\}$.*

Достаточно положить $S = \{y\}$ в предложении 10.

10. Семейства Холла в свободном группоиде

Пусть X — множество, $M(X)$ — свободный группоид над X и $M^n(X)$ для любого $n \in \mathbf{N}^*$ — множество элементов из $M(X)$ длины n (n° 1). Если $w \in M(X)$ и $l(w) \geqslant 2$, то через $\alpha(w)$ и $\beta(w)$ обозначим элементы из $M(X)$, определенные равенством $w = \alpha(w)\beta(w)$; имеем $l(\alpha(w)) < l(w)$, $l(\beta(w)) < l(w)$. Наконец, обозначим через $u^m v$ элемент, определенный по индукции для любого целого $m \geqslant 0$ равенствами $u^0 v = v$ и $u^{m+1} v = u(u^m v)$, $u, v \in M(X)$.

Определение 2. *Семейством Холла над множеством X назовем любое подмножество H группоида $M(X)$, наделенное некоторым отношением совершенного порядка, удовлетворяющее следующим условиям:*

(А) *Если $u \in H$, $v \in H$ и $l(u) < l(v)$, то $u < v$.*

(Б) *$X \subset H$ и $H \cap M^2(X)$ состоит из произведений xy, где x, y — элементы X и $x < y$.*

(В) *Элемент w группоида $M(X)$ длины $\geqslant 3$ принадлежит H тогда и только тогда, когда он имеет вид $a(bc)$, где a, b, c — элементы из H, $bc \in H$, $b \leqslant a < bc$ и $b < c$.*

Предложение 11. *Семейство Холла над X существует.*

Будем индукцией по целому $n \geqslant 1$ строить множества $H_n \subset M^n(X)$ и отношение совершенного порядка на каждом из этих множеств.

а) Положим $H_1 = X$ и наделим его любым отношением совершенного порядка.

б) Множество H_2 состоит из произведений xy, где x, y из X и $x < y$. Наделим его структурой совершенного порядка.

в) Пусть $n \geqslant 3$, так что совершенно упорядоченные множества $H_1, \ldots, H_{n-1}$ уже определены. Тогда на $H'_{n-1} = H_1 \cup \ldots \cup H_{n-1}$ имеется отношение совершенного порядка, совпадающее на $H_1, \ldots$ $\ldots, H_{n-1}$ с заданными на них порядками и такое, что $w < w'$, если $l(w) < l(w')$. Определим H_n как множество произведений $a(bc) \in M^n(X)$, где a, b, c — элементы из H'_{n-1}, удовлетворяющие условиям $bc \in H'_{n-1}$, $b \leqslant a < bc$, $b < c$, и зададим на H_n структуру совершенного порядка.

Положим $H = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} H_n$; зададим на H структуру совершенного порядка следующим образом: положим $w \leqslant w'$ тогда и только тогда, когда либо $l(w) < l(w')$, либо $l(w) = l(w') = n$ и $w \leqslant w'$ в множестве H_n. Очевидно, что H — семейство Холла над X.

Для каждого подмножества S множества X отождествим свободный группоид $M(S)$ с его каноническим образом в $M(X)$.

Предложение 12. *Пусть H — семейство Холла над X и x, y — элементы из X.*

а) $H \cap M(\{x\}) = \{x\}$.

б) *Пусть $x < y$ и d_y — гомоморфизм $M(X)$ в $\mathbf{N}$, такой, что $d_y(y) = 1$ и $d_y(z) = 0$ для любых $z \in X$, $z \neq y$. Множество элементов $w \in H \cap M(\{x, y\})$, таких, что $d_y(w) = 1$, состоит из элементов $x^n y$, где n — целое число $\geqslant 0$.*

Согласно определению 2 (Б), имеем $x \in H$ и $H \cap M^2(\{x\}) = \varnothing$. Если $w \in H \cap M(\{x\})$, причем $n = l(w) \geqslant 3$, то элементы $\alpha(w)$ и $\beta(w)$ также принадлежат $H \cap M(\{x\})$, согласно определению 2 (В). Отсюда индукцией по n немедленно получаем, что $H \cap M^n(\{x\}) = \varnothing$ при любом $n \geqslant 2$, что и доказывает а).

Докажем теперь б). Согласно определению 2 (Б), $y \in H$ и $xy \in H$. Покажем индукцией по n, что $x^n y \in H$ для любого целого $n \geqslant 2$. Имеем $x^n y = x(x(x^{n-2}y))$ и по предположению индукции $x^{n-2}y \in H$. Далее, $l(x) < l(x^{n-2}y)$ при $n > 2$ и $x < y$, откуда $x < x^{n-2}y$ во всех случаях; условие (В) определения 2 показывает поэтому, что $x^n y \in H$. Кроме того, понятно, что $d_y(x^n y) = 1$. Обратно, пусть $w \in H \cap M(\{x, y\})$, причем $d_y(w) = 1$. Если $l(w) = 1$, то $w = y$; если $l(w) = 2$, то $w = xy$ по определению 2 (Б). Если $l(w) \geqslant 3$, то $w = a(bc)$, где a, b, c, bc — элементы из $H \cap M(\{x, y\})$ (определение 2 (В)). Невозможно, чтобы $d_y(bc) = 0$, так как тогда $bc \in M(\{x\})$, чего не может быть в силу а). Поэтому $d_y(bc) = 1$ и $d_y(a) = 0$, откуда $a = x$,

согласно а). Отсюда индукцией по $n = l(w)$ немедленно получаем, что $w = x^{n-1}y$, а это и доказывает б).

Следствие. *Если* $\operatorname{Card} X \geqslant 2$, *то* $H \cap M^n(X) \neq \varnothing$ *при любом целом* $n \geqslant 1$.

Предложение 13. *Пусть* X — *конечное множество, состоящее не менее чем из двух элементов. Обозначим через* H *семейство Холла над* X. *Тогда существует строго возрастающая биекция* $p \longmapsto w_p$ *множества* $\mathbf{N}$ *на* H *и последовательность* $(P_p)_{p \in \mathbf{N}}$ *подмножеств в* H *со следующими свойствами*:

а) $P_0 = X$.

б) *Для любого целого* $p \geqslant 0$ *имеет место включение* $w_p \in P_p$.

в) *Для любого целого* $n \geqslant 1$ *существует целое число* $p(n)$, *такое, что любой элемент из* P_p *имеет длину* $> n$, *как только* $p \geqslant p(n)$.

г) *Для любого целого* $p \geqslant 0$ *множество* P_{p+1} *состоит из элементов вида* $\overset{i}{w_p}w$, *где* $w \in P_p$, $i \geqslant 0$ *и* $w \neq w_p$.

Так как X конечно, то конечно и каждое из множеств $M^n(X)$. Положим $H_n = H \cap M^n(X)$ при любом $n \geqslant 1$. Следствие предложения 12 показывает, что множество H_n не пусто. Пусть u_n — число элементов в H_n; положим $v_0 = 0$ и $v_n = u_1 + \ldots + u_n$ при $n \geqslant 1$. Так как H_n — конечное совершенно упорядоченное множество, существует строго возрастающая биекция $p \longmapsto w_p$ интервала $[v_{n-1}, v_n - 1]$ множества $\mathbf{N}$ на H_n. Отсюда сразу же следует, что $p \longmapsto w_p$ — строго возрастающая биекция $\mathbf{N}$ на H.

Положим $P_0 = X$, и для любого целого $p \geqslant 1$ пусть P_p — множество элементов w из H, таких, что $w \geqslant w_p$ и либо $w \in X$, либо $\alpha(w) < w_p$ (заметим, что если w — элемент длины $\geqslant 2$, то из того, что $w \in H$, следует, что $\alpha(w) \in H$ по условию (В) определения 2). Имеем $w_p \in P_p$, это очевидно, если $w_p \in X$, и следует из неравенства $l(\alpha(w_p)) < l(w_p)$ и условия (А) определения 2 в случае, когда $w_p \notin X$.

Условия а) и б), таким образом, выполняются.

Пусть n — целое число $\geqslant 1$, и пусть $p \geqslant v_n$. Для любого $w \in P_p$ имеет место неравенство $l(w) \geqslant l(w_p) > n$ по самому определению отображения $p \longmapsto w_p$. Это доказывает в).

Покажем, что любой элемент вида $u = \overset{i}{w_p}w$ при $i \geqslant 0$, $w \in P_p$ и $w \neq w_p$ принадлежит P_{p+1}. Если $i \neq 0$, то $l(u) > l(w_p)$, откуда $u > w_p$ и $u \geqslant w_{p+1}$; имеем $u \notin X$ и $\alpha(u) = w_p < w_{p+1}$, так что $u \in P_{p+1}$. Если $i = 0$, то $u \in P_p$ и $u \neq w_p$; поэтому $u > w_p$, откуда $u \geqslant w_{p+1}$; если u не принадлежит X, то $\alpha(w) < w_p$, так что $\alpha(w) < w_{p+1}$; снова $u \in P_{p+1}$.

Обратно, пусть $u \in P_{p+1}$. Будем различать два случая:

α) Не существует элемента v из $M(X)$, такого, что $u = w_p v$. По определению P_{p+1} имеем $u > w_p$. Более того, если $u \notin X$, то $\alpha(u) \neq w_p$ по сделанному предположению, и $\alpha(u) < w_{p+1}$, так как $u \in P_{p+1}$; поэтому $\alpha(u) < w_p$. Следовательно, $u \in P_p$ и $u \neq w_p$.

β) Существует элемент v в $M(X)$, такой, что $u = w_p v$. Согласно определению 2, необходимо, чтобы или $w_p \in X$, $v \in X$ и $w_p < v$, или $v \notin X$ и $\alpha(v) \leqslant w_p < v$. В обоих случаях $v \in P_{p+1}$.

Итак, существуют целое число $i \geqslant 0$ и элемент w из $M(X)$, такие, что $u = w_p^i w$ и либо $w \in X$, либо $w \notin X$ и $\alpha(w) \neq w_p$. Если $i = 0$, то мы находимся в условиях случая α), откуда $w \in P_p$ и $w \neq w_p$. Если $i > 0$, то доказательство β), проведенное выше, показывает индукцией по i, что $w \in P_{p+1}$ и $w \neq w_p$. Предположим, что $w \notin X$; поскольку $w \in P_{p+1}$, то $\alpha(w) \leqslant w_p$, а так как $\alpha(w) \neq w_p$, то можно заключить, что $w \in P_p$. Таким образом, мы доказали г).

Пример. Пусть X состоит из двух элементов x, y; упорядочим X так, чтобы $x < y$. Построение, проведенное в доказательстве предложения 11, дает множество H, 14 элементов длины $\leqslant 5$ которого выписаны в следующей таблице:

H_1	$w_1 = x$	$w_2 = y$	
H_2	$w_3 = (xy)$		
H_3	$w_4 = (x(xy))$	$w_5 = (y(xy))$	
H_4	$w_6 = (x(x(xy)))$	$w_7 = (y(x(xy)))$	$w_8 = (y(y(xy)))$
H_5	$w_9 = (x(x(x(xy))))$	$w_{10} = (y(x(x(xy))))$	$w_{11} = (y(y(x(xy))))$
	$w_{12} = (y(y(y(xy))))$	$w_{13} = ((xy)(x(xy)))$	$w_{14} = ((xy)(y(xy)))$.

(Элементы из H занумерованы в соответствии с отношением совершенной упорядоченности в каждом H_n.)

11. Базис Холла свободной алгебры Ли

Сохраним обозначения предыдущего пункта.

Теорема 1. *Пусть H — семейство Холла над X и Ψ — каноническое отображение $M(X)$ в свободную алгебру Ли $L(X)$. Ограничение Ψ на H является базисом модуля $L(X)$.*

Для любого элемента w из H положим $\bar{w} = \Psi(w)$.

A) *Случай конечного X.*

Если X пусто, то пусто и $M(X)$, а значит, и H, так что $L(X)$ — нулевая алгебра. Если X состоит из одного элемента, то $H \cap M^n(X)$ пусто при любом $n \geqslant 2$ (предложение 12а)). Следовательно, $H = \{x\}$; известно также, что $L(X)$ — свободный модуль с базисом $\{\bar{x}\}$ (*замечание*, n° 2). Теорема верна, таким образом, если X состоит не более чем из одного элемента.

Будем предполагать поэтому, что X содержит не менее двух элементов; выберем последовательности (w_p) и (P_p), обладающие свойствами, описанными в формулировке предложения 13. Для любого целого $p \geqslant 0$ обозначим через L_p подмодуль модуля $L(X)$, порожденный элементами $\bar{w}_i$ при $0 \leqslant i < p$, и через $\mathfrak{g}_p$ — подалгебру Ли алгебры $L(X)$, порожденную семейством $(\bar{u})_{u \in P_p}$.

Лемма 2. *Для любого целого $p \geqslant 0$ модуль L_p является свободным модулем с базисом $(\bar{w}_i)_{0 \leqslant i < p}$, алгебра Ли $\mathfrak{g}_p$ свободна с системой свободных образующих $(\bar{u})_{u \in P_p}$ и модуль $L(X)$ является прямой суммой L_p и $\mathfrak{g}_p$.*

Имеем $L_0 = \{0\}$ и $\mathfrak{g}_0 = L(X)$, так что лемма верна при $p = 0$. Будем вести доказательство индукцией по p. Предположим поэтому, что лемма верна при некотором $p \geqslant 0$. Положим $u_{i,w} = (\operatorname{ad} \bar{w}_p)^i \cdot \bar{w} = \Psi(w_p^i w)$ для $i \geqslant 0$, $w \in P_p$, $w \neq w_p$. По следствию предложения 10 из n° 9 свободная алгебра Ли $\mathfrak{g}_p$ является прямой суммой модуля T_p с базисом $\{\bar{w}_p\}$ и подалгебры Ли $\mathfrak{h}_p$, системой свободных образующих которой является $\mathscr{F} = (u_{i,w})_{i \geqslant 0,\, w \in P_p,\, w \neq w_p}$. Согласно предложению 13 г), семейство $(\bar{u})_{u \in P_{p+1}}$ равно $\mathscr{F}$, а значит, совпадает с системой свободных образующих для $\mathfrak{h}_p = \mathfrak{g}_{p+1}$. Поэтому $L(X) = L_p \oplus T_p \oplus \mathfrak{g}_{p+1}$, и так как $L_{p+1} = L_p + T_p$, то $L(X) = L_{p+1} \oplus \mathfrak{g}_{p+1}$, а $(\bar{w}_0, \bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_{p-1}, \bar{w}_p)$ — базис модуля L_{p+1}. Ч. Т. Д.

Пусть n — положительное целое число. Согласно предложению 13 в), существует целое $p(n)$, такое, что длина всех элементов, входящих в P_p, строго больше n, как только $p \geqslant p(n)$. При $p \geqslant p(n)$ подалгебра $\mathfrak{g}_p$ алгебры $L(X)$ порождена элементами степени $> n$, поэтому $L^n(X) \cap \mathfrak{g}_p = \{0\}$. Кроме того, элементы $\bar{w}_i$ из $L(X)$ однородны и семейство $(\bar{w}_i)_{0 \leqslant i < p}$ — базис модуля, дополнительного к $\mathfrak{g}_p$. Отсюда немедленно следует, что семейство элементов $\bar{w}_i$ степени n является базисом модуля $L^n(X)$, а последовательность $(\bar{w}_i)_{i \geqslant 0}$ — базисом модуля $L(X)$.

Б) *Общий случай*

Напомним, что если S — подмножество в X, то $M(S)$ отождествляется с подгруппоидом группоида $M(X)$, порожденным S, а $L(S)$ отождествляется с подалгеброй алгебры Ли $L(X)$, порожденной S; мы видели, что если $w \in M(S)$ имеет длину $\geqslant 2$, то $\alpha(w) \in M(S)$ и $\beta(w) \in M(S)$. Отсюда немедленно следует, что $H \cap M(S)$ — семейство Холла над S.

Для любого конечного подмножества Φ множества H существует конечное подмножество $S \subset X$, такое, что $\Phi \subset M(S)$. Случай А) показывает тогда, что элементы $\bar{w}$ при $w \in \Phi$ линейно независимы в $L(S)$, а значит, и в $L(X)$. Следовательно, семейство $(\bar{w})_{w \in H}$ свободно.

Для любого элемента a из $L(X)$ существует конечное подмножество S множества X, такое, что $a \in L(S)$. Согласно случаю А), подмножество $\Psi(H \cap M(S))$ множества $\Psi(H)$ порождает модуль $L(S)$, следовательно, a является линейной комбинацией элементов из $\Psi(H)$. Поэтому $\Psi(H)$ порождает модуль $L(X)$, что и требовалось доказать.

Следствие. *Модуль $L(X)$, так же, как и каждый из подмодулей $L^{\alpha}(X)$ при $\alpha \in \mathbf{N}^{(X)}$ и $L^n(X)$ при $n \in \mathbf{N}$, свободен. Модули $L^{\alpha}(X)$ имеют конечный ранг и таковы же модули $L^n(X)$, если X конечно.*

Над X существует семейство Холла H (предложение 11). Для любого $w \in H$ элемент $\Psi(w)$ алгебры $L(X)$ принадлежит одному из подмодулей $L^{\alpha}(X)$ $\left(\text{где } \alpha \in \mathbf{N}^{(X)}\right)$ и модуль $L(X)$ равен прямой сумме подмодулей $L^{\alpha}(X)$. Более того, для любого $\alpha \in \mathbf{N}^{(X)}$ множество элементов из $M(X)$, канонический образ которых в $\mathbf{N}^{(X)}$ равен α, конечно; это доказывает, что каждый из модулей $L^{\alpha}(X)$ свободен и имеет конечный ранг и что $L(X)$ свободен. Имеем $L^n(X) = \sum\limits_{|\alpha|=n} L^{\alpha}(X)$, поэтому $L^n(X)$ свободен; если X конечно, то множество $\alpha \in \mathbf{N}^{(X)}$, таких, что $|\alpha| = n$, конечно; поэтому и $L^n(X)$ имеет конечный ранг.

Определение 3. *Назовем базисом Холла свободной алгебры Ли $L(X)$ любой базис этой алгебры, являющийся каноническим образом семейства Холла над X.*

Замечание. Предположим, что X состоит из двух различных элементов x и y. Пусть $L^{(\cdot,1)}$ — подмодуль в $L(X)$, равный сумме тех $L^{\alpha}(X)$, у которых $\alpha \in \mathbf{N}^{(X)}$ с $\alpha(y) = 1$. Из теоремы 1 и предложения 12 n° 10 нетрудно вывести, что элементы $(\operatorname{ad} x)^n \cdot y$ при целом $n \geqslant 0$ образуют *базис* подмодуля $L^{(\cdot,1)}$. Отсюда следует, что *ограничение на $L^{(\cdot,1)}$ отображения* $\operatorname{ad} x$ *инъективно*.

§ 3. Универсальная обертывающая алгебра свободной алгебры Ли

В этом параграфе символом $A(X) = A_K(X)$ *будем обозначать свободную ассоциативную алгебру* Libas (X) *с системой свободных образующих* X *над кольцом* K (*Alg.*, chap. III, p. 21, défintion 2). Отождествим X с его каноническим образом в $A(X)$; напомним, что в качестве базиса в $A(X)$ можно выбрать свободный моноид $\mathrm{Mo}(X)$ на X; обозначим через $A^+(X)$ подмодуль в $A(X)$, порожденный непустыми словами.

1. Универсальная обертывающая алгебра алгебры $L(X)$

Теорема 1. *Пусть* α: $L(X) \to A(X)$ — *единственный гомоморфизм алгебр Ли, продолжающий каноническое вложение* X *в* $A(X)$ (§ 2, n° 2, предложение 1). *Пусть* σ: $L(X) \to U(L(X))$ — *каноническое отображение* $L(X)$ *в ее универсальную обертывающую алгебру и* β: $U(L(X)) \to A(X)$ — *единственный гомоморфизм ассоциативных алгебр с единицей, такой, что* $\beta \circ \sigma = \alpha$ (гл. I, § 2, n° 1, предложение 1). *Тогда*:

а) *гомоморфизм* α *инъективен и* $\alpha(L(X))$ — *прямое слагаемое в* $A(X)$;

б) *гомоморфизм* β *биективен.*

Пусть B — произвольная K-алгебра с 1 и φ — отображение X в B; согласно предложению 1 из § 2, n° 2, существует гомоморфизм алгебр Ли ψ: $L(X) \to B$, такой, что $\psi | X = \varphi$; согласно предложению 1 гл. I, § 2, n° 1, существует гомоморфизм алгебр с единицей θ: $U(L(X)) \to B$, такой, что $\theta \circ \sigma = \psi$, и, следовательно, $(\theta \circ \sigma) | X = \varphi$. Так как $\sigma(X)$ порождает алгебру с единицей $U(L(X))$, то гомоморфизм θ является единственным гомоморфизмом алгебр с единицей, удовлетворяющим этому последнему условию. Это показывает, что пара $(U(L(X)), \sigma | X)$ является решением универсальной проблемы точно так же, как алгебра $A(X)$; беря в качестве φ каноническое вложение X в $A(X)$, легко вывести, что β — изоморфизм, а это и доказывает б).

Наконец, так как $L(X)$ — свободный K-модуль (§ 2, n° 11, следствие теоремы 1), то σ инъективно и $\sigma(L(X))$ — прямое слагаемое в $U(L(X))$ (гл. I, § 2, n° 7, следствие 3 теоремы 1). В силу б) это доказывает а).

Следствие 1. *На алгебре* $A(X)$ *существует единственное копроизведение, наделяющее* $A(X)$ *структурой биалгебры и такое, что элементы из* X *примитивны. Более того,* β — *изоморфизм биалгебры* $U(L(X))$ *на* $A(X)$, *наделенную этой структурой биалгебры.*

Это следует из утверждения б) теоремы и из того, что X порождает $A(X)$ как алгебру с единицей.

Будем теперь считать $A(X)$ наделенной этой структурой биалгебры и будем *отождествлять* $L(X)$ с ее образом при α, т. е. *с подалгеброй Ли алгебры* $A(X)$, *порожденной множеством* X.

Следствие 2. *Если* K — *поле характеристики* 0, *то* $L(X)$ — *алгебра Ли примитивных элементов в* $A(X)$.

Это следует из следствия 1 и следствия предложения 9, § 1, n° 5.

Замечания. 1) Пусть K' — коммутативное кольцо, содержащее K. Если отождествить $A(X)$, $L(X)$ и $L_{K'}(X)$ с подмножествами в $A_{K'}(X)$, то из части а) теоремы 1 следует соотношение

$$L(X) = L_{K'}(X) \cap A(X). \tag{1}$$

2) Следствие 2 теоремы 1 остается верным, если предполагать, что аддитивная группа кольца K — группа без кручения. В самом деле, предположим сначала, что $K = \mathbf{Z}$; любой примитивный элемент из $A(X)$ является примитивным элементом в $A_{\mathbf{Q}}(X)$, а значит, лежит в $L_{\mathbf{Q}}(X) \cap A(X) = L(X)$ (следствие 2 и формула (1)). В общем случае K плоско над $\mathbf{Z}$ и можно применить замечание 2 из § 1, n° 2, и предложение 3 из § 2, n° 5.

3) Пусть Δ — коммутативный моноид, φ_0 — отображение X в Δ, φ: $\mathrm{Mo}(X) \to \Delta$ — ассоциированный с ним гомоморфизм моноидов; если наделить $A(X)$ градуировкой $\left(A^{\delta}(X)\right)_{\delta \in \Delta}$, определенной в *Alg.*, chap. III, p. 31, *exemple* 3, а $L(X)$ — градуировкой $\left(L^{\delta}(X)\right)_{\delta \in \Delta}$, определенной в § 2, n° 6, то очевидно, что для любого $\delta \in \Delta$ будет выполняться $L^{\delta}(X) \subset L(X) \cap A^{\delta}(X)$. Так как L является прямой суммой $L^{\delta}(X)$ при $\delta \in \Delta$ и так как сумма подмодулей $L(X) \cap A^{\delta}(X)$ при $\delta \in \Delta$ является прямой, то

$$L^{\delta}(X) = L(X) \cap A^{\delta}(X). \tag{2}$$

4) Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей и $\boldsymbol{t} = (t_i)_{i \in I}$ — семейство элементов из A. Имеет место диаграмма

$$\begin{tikzcd} L(I) \arrow[rr, "f_t"] \arrow[dr, "i"'] & & A \\ & A(I) \arrow[ur, "g_t"'] & \end{tikzcd}$$

где i — каноническое вложение, f_t — гомоморфизм алгебры Ли, определенный при помощи $\boldsymbol{t}$, и g_t — гомоморфизм алгебр с

единицей, такой, что $g_t(i) = t_i$ для любого $i \in I$. Диаграмма коммутативна, так как $g_t \circ i$ и f_t совпадают на I. Отсюда следует, что если $P \in L(I)$, то элемент $P\big((t_i)_{i \in I}\big)$, определенный в § 2, n° 4, совпадает с элементом $P\big((t_i)_{i \in I}\big)$, определенным в *Alg.*, chap. III, p. 24, *exemple* 2.

2. *Проектирование* $A^+(X)$ *на* $L(X)$

Пусть π — линейное отображение $A^+(X)$ в $L(X)$, определенное равенством

$$\pi(x_1 \ldots x_n) = (\mathrm{ad}(x_1) \circ \ldots \circ \mathrm{ad}(x_{n-1}))(x_n) \tag{3}$$

для любых $n > 0$, $x_1, \ldots, x_n$ из X.

Предложение 1. а) *Ограничение* π_0 *отображения* π *на алгебру* $L(X)$ *является ее дифференцированием.*

б) *Для любого целого* $n \geqslant 1$ *и любого* u *из* $L^n(X)$ *выполняется соотношение* $\pi(u) = n \,.\, u$.

а) Пусть E — алгебра эндоморфизмов модуля $L(X)$ и θ — гомоморфизм алгебры $A(X)$ в E, такой, что $\theta(x) = \mathrm{ad}\, x$ для любого $x \in X$. Ограничение θ на $L(X)$ является гомоморфизмом алгебр Ли $L(X)$ в E, совпадающим на X с присоединенным представлением алгебры $L(X)$, так что

$$\theta(u) \,.\, v = [u, v] \text{ для любых } u, v \text{ из } L(X). \tag{4}$$

Пусть a — элемент из $A(X)$ и b — элемент из $A^+(X)$; тогда

$$\pi(a \,.\, b) = \theta(a) \,.\, \pi(b). \tag{5}$$

В самом деле, достаточно рассмотреть случай, когда $a = x_1 \ldots x_p$, $b = x_{p+1} \ldots x_{p+q}$, где $p \geqslant 0$, $q \geqslant 1$, и $x_1, \ldots, x_{p+q}$ — элементы из X; но тогда (5) сразу же следует из (3), так как $\theta(x) = \mathrm{ad}\, x$ для любого $x \in X$.

Пусть u и v — элементы из $L(X)$; вследствие (4) и (5)

$$\pi_0([u, v]) = \pi(uv - vu) = \theta(u) \,.\, \pi(v) - \theta(v) \,.\, \pi(u) =$$
$$= [u, \pi(v)] - [v, \pi(u)] = [u, \pi_0(v)] + [\pi_0(u), v],$$

так что π_0 — дифференцирование $L(X)$.

б) Пусть π_1 — эндоморфизм модуля $L(X)$, совпадающий на $L^n(X)$ с умножением на целое число $n \geqslant 1$. Формула $[L^n(X), L^m(X)] \subset L^{n+m}(X)$ показывает, что π_1 — дифференцирование (*Alg.*, chap. III, p. 119. *exemple* 6). Дифференцирование $\pi_1 - \pi_0$ алгебры $L(X)$ обращается в нуль на X, и так как X порождает $L(X)$, то $\pi_0 = \pi_1$, откуда и вытекает б).

Следствие. *Предположим, что K является* $\mathbf{Q}$*-алгеброй. Пусть P — линейное отображение $A^+(X)$ в себя, такое, что*

$$P(x_1 \dots x_n) = \frac{1}{n}(\operatorname{ad} x_1 \circ \dots \circ \operatorname{ad} x_{n-1})(x_n) \tag{6}$$

для любых $n \geqslant 1$, $x_1, \dots, x_n$ из X. Тогда P — проектирование $A^+(X)$ на $L(X)$.

Образ P содержится в $L(X)$. Более того, для любого $n \geqslant 1$ и любого u из $L^n(X)$ имеем $P(u) = \frac{1}{n}\pi(u)$, откуда $P(u) = u$ вследствие предложения 1. Так как $L(X) = \sum_{n \geqslant 1} L^n(X)$, то понятно, что ограничение P на $L(X)$ — тождественное отображение.

Замечание. Предположим, что K — поле характеристики 0, и пусть Q — проектирование алгебры $A(X) = U(L(X))$ на $L(X)$, ассоциированное с канонической фильтрацией на $U(L(X))$ (см. § 1, n° 5). Тогда *для любого* $\alpha \in \mathbf{N}^{(X)}$ *имеем* $Q(A^\alpha(X)) \subset L^\alpha(X)$. В самом деле, достаточно проверить, что ядро и образ Q являются градуированными подмодулями в $A(X)$ относительно градуировки типа $\mathbf{N}^{(X)}$. Это очевидно для образа, который равен $L(X)$. С другой стороны, пусть n — целое число $\geqslant 1$. Векторное подпространство в $A(X)$, порожденное элементом y^n, где $y \in L(X)$, равно векторному подпространству в $A(X)$, порожденному элементом $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} y_{\sigma(1)} y_{\sigma(2)} \dots y_{\sigma(n)}$, где $y_1, y_2, \dots, y_n$ — однородные элементы из $L(X)$; поэтому оно и является градуированным подмодулем в $A(X)$.

(Заметим, что если $\operatorname{Card}(X) \geqslant 2$, то проектирования P и Q *не совпадают* на $A^+(X)$. В самом деле, если x, y — элементы из X, такие, что $x \neq y$, то положим

$$z = x[x, y] + [x, y]x = x^2y - yx^2.$$

Тогда $Q(z) = 0$, а $P(z) = \frac{1}{3}[x, [x, y]] \neq 0$; см. § 2, n° 10, *пример*, и n° 11, теорема 1.)

3. Размерность однородных компонент алгебры Ли $L(X)$

Пусть X — множество, α — элемент из $\mathbf{N}^{(X)}$ и d — целое число > 0. Будем писать $d \mid \alpha$, если существует элемент $\beta \in \mathbf{N}^{(X)}$, такой, что $\alpha = d\beta$. Элемент β, являющийся единственным, обозначим через α/d.

Лемма 1. *Пусть* n — *целое число* > 0, $T_1, \ldots, T_n$ — *переменные и* $u_1, \ldots, u_n$ — *элементы из* $\mathbf{Z}$. *Пусть* $(c(\alpha))_{\alpha \in \mathbf{N}^n - \{0\}}$ — *семейство элементов из* $\mathbf{Z}$, *таких, что*

$$1 - \sum_{i=1}^{n} u_i T_i = \prod_{\alpha \neq 0} \left(1 - T^{\alpha}\right)^{c(\alpha)}. \tag{7}$$

Тогда для любого $\alpha \in \mathbf{N}^n - \{0\}$ *верно следующее равенство*:

$$c(\alpha) = \frac{1}{|\alpha|} \sum_{d \mid \alpha} \mu(d) \frac{(|\alpha|/d)!}{(\alpha/d)!} u^{\alpha/d}, \tag{8}$$

где μ — *функция Мёбиуса* (дополнение).

Логарифмируя обе части равенства (7), получим эквивалентное ему равенство (*Alg.*, chap. IV, n° 9, n$^{\text{lle}}$ éd.]:

$$\log\left(1 - \sum_{i=1}^{n} u_i T_i\right) = \sum_{\alpha \neq 0} c(\alpha) \log\left(1 - T^{\alpha}\right). \tag{9}$$

В то же время

$$-\log\left(1 - \sum_{i=1}^{n} u_i T_i\right) = \sum_{j \geqslant 1} \frac{1}{j}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i T_i\right)^{j} =$$

$$= \sum_{j \geqslant 1} \frac{1}{j} \sum_{|\beta| = j} \frac{|\beta|!}{\beta!} u^{\beta} T^{\beta} = \sum_{|\beta| > 0} \frac{1}{|\beta|} \frac{|\beta|!}{\beta!} u^{\beta} T^{\beta}. \tag{10}$$

С другой стороны,

$$-\sum_{\alpha \neq 0} c(\alpha) \log\left(1 - T^{\alpha}\right) = \sum_{|\alpha| > 0,\ k \geqslant 1} \frac{1}{k} c(\alpha) T^{k\alpha} =$$

$$= \sum_{|\beta| > 0,\ k \mid \beta} \frac{1}{k} c\left(\frac{\beta}{k}\right) T^{\beta}. \tag{11}$$

Поэтому (7) эквивалентно

$$\sum_{k \mid \beta} \left|\frac{\beta}{k}\right| c\left(\frac{\beta}{k}\right) = \frac{|\beta|!}{\beta!} u^{\beta} \quad \text{для любого } \beta \in \mathbf{N}^n - \{0\}. \tag{12}$$

Пусть Λ — множество наборов $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{N}^n - \{0\}$, таких, что наибольший общий делитель чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ равен 1. Любой элемент $\mathbf{N}^n - \{0\}$ единственным образом записывается в виде $m\lambda$, где m — целое $\geqslant 1$ и $\lambda \in \Lambda$. Условие (12) эквивалентно равенству

$$\sum_{k \mid m} \left|\frac{m\lambda}{k}\right| c\left(\frac{m\lambda}{k}\right) = \frac{(m|\lambda|)!}{(m\lambda)!} u^{m\lambda} \quad \text{для любых } \lambda \in \Lambda \text{ и } m \geqslant 1. \tag{13}$$

По формуле обращения Мёбиуса (см. дополнение) условие (13) эквивалентно

$$|m\lambda|\,c(m\lambda)=\sum_{d\mid m}\mu(d)\frac{\left|\frac{m\lambda}{d}\right|!}{\left(\frac{m\lambda}{d}\right)!}u^{\frac{m\lambda}{d}} \tag{14}$$

для любого $\lambda\in\Lambda$ и любого $m\geqslant 1$. Ч. Т. Д.

Теорема 2. *Пусть X — конечное множество и $n=\mathrm{Card}(X)$.*

а) *Для любого целого $r\geqslant 1$ K-модуль $L^r(X)$ — свободный модуль ранга*

$$c(r)=\frac{1}{r}\sum_{d\mid r}\mu(d)\,n^{r/d}, \tag{15}$$

где μ — функция Мёбиуса.

б) *Для любого $\alpha\in\mathbf{N}^{(X)}-\{0\}$ K-модуль $L^\alpha(X)$ (§ 2, n° 6) — свободный модуль ранга*

$$c(\alpha)=\frac{1}{|\alpha|}\sum_{d\mid\alpha}\mu(d)\frac{(|\alpha|/d)!}{(\alpha/d)!}. \tag{16}$$

Мы уже знаем, что модули $L^r(X)$ для любого $r\in\mathbf{N}$ и модули $L^\alpha(X)$ для любого $\alpha\in\mathbf{N}^{(X)}$ свободны (§ 2, n° 11, следствие теоремы 1). Рассмотрим полиградуировку $\left(A^\alpha(X)\right)_{\alpha\in\mathbf{N}^{(X)}}$ алгебры $A(X)$, определенную каноническим гомоморфизмом φ моноида $\mathrm{Mo}(X)$ в $\mathbf{N}^{(X)}$ (*Alg.*, chap. III, p. 31, *exemple* 3); имеем $A^\alpha(X)\cap\cap L(X)=L^\alpha(X)$ согласно *замечанию* 3 после теоремы 1 из n° 1. Для любого $\alpha\in\mathbf{N}^{(X)}$ базисом K-модуля $A^\alpha(X)$ является множество слов, в которых буква x из X встречается $\alpha(x)$ раз. Пусть $d(\alpha)$ — количество этих слов, т. е. ранг $A^\alpha(X)$; мы вычислим двумя способами формальный ряд $P\left((T_x)_{x\in X}\right)\in\mathbf{Z}[[(T_x)_{x\in X}]]$, определенный формулой

$$P(T)=\sum_{\alpha\in\mathbf{N}^{(X)}}d(\alpha)\,T^\alpha. \tag{17}$$

1) $P(T)=\sum\limits_{m\in\mathrm{Mo}(X)}T^{\varphi(m)}=\sum\limits_{r=0}^{\infty}\sum\limits_{x_1,\ldots,x_r}T_{x_1}\ldots T_{x_r}=\sum\limits_{r=0}^{\infty}\Big(\sum\limits_{x\in X}T_x\Big)^r,$

откуда

$$P(T)=\Big(1-\sum_{x\in X}T_x\Big)^{-1}. \tag{18}$$

2) Пусть для любого $\alpha\in\mathbf{N}^{(X)}-\{0\}$ семейство $(e_{\alpha,j})_{1\leqslant j\leqslant c(\alpha)}$ является базисом в $L^\alpha(X)$, и пусть множество I пар (α, j), в которых $\alpha\in\mathbf{N}^{(X)}-\{0\}$ и $1\leqslant j\leqslant c(\alpha)$, некоторым образом совершенно упорядочено. По теореме 1 из n° 1 и по теореме

Пуанкаре — Биркгофа — Витта (гл. I, § 2, n° 7, следствие 3 теоремы 1) элементы

$$y_m = \prod_{(\alpha, j) \in I} (e_{\alpha, j})^{m(\alpha, j)}$$

при индексе $\boldsymbol{m}$, пробегающем $\mathbf{N}^{(I)}$, образуют базис в $A(X)$. Каждый элемент y_m имеет полистепень, равную $\sum_{(\alpha, j) \in I} \boldsymbol{m}(\alpha, j)\alpha$. Обозначим эту полистепень через $u(\boldsymbol{m})$. Тогда

$$P(T) = \sum_{m \in \mathbf{N}^{(I)}} T^{u(m)} = \sum_{m \in \mathbf{N}^{(I)}} \prod_{(\alpha, j) \in I} T^{m(\alpha, j)\alpha} =$$

$$= \prod_{(\alpha, j) \in I} \sum_{r=0}^{\infty} T^{r\alpha} = \prod_{(\alpha, j) \in I} \left(1 - T^{\alpha}\right)^{-1},$$

откуда окончательно получаем, что

$$P(T) = \prod_{\alpha \in \mathbf{N}^{(X)} - \{0\}} \left(1 - T^{\alpha}\right)^{-c(\alpha)}. \tag{19}$$

Сравнивая (18) и (19), получаем

$$1 - \sum_{x \in X} T_x = \prod_{\alpha \in \mathbf{N}^{(X)} - \{0\}} \left(1 - T^{\alpha}\right)^{c(\alpha)}. \tag{20}$$

Применяя лемму 1, получаем утверждение б).

Подставляя одну и ту же переменную U вместо T_x для всех $x \in X$ в формулу (20), получаем

$$1 - nU = \prod_{\alpha \in \mathbf{N}^{(X)} - \{0\}} (1 - U^{|\alpha|})^{c(\alpha)} = \prod_{r > 0} (1 - U^r)^{c(r)}.$$

Снова применяя лемму 1, получаем также утверждение а).

Примеры. При $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ имеем

$$c(1) = n, \qquad c(2) = \frac{1}{2}(n^2 - n), \quad c(3) = \frac{1}{3}(n^3 - n),$$

$$c(4) = \frac{1}{4}(n^4 - n^2), \quad c(5) = \frac{1}{5}(n^5 - n), \quad c(6) = \frac{1}{6}(n^6 - n^3 - n^2 + n).$$

Замечание. Пусть X — множество и $\alpha \in \mathbf{N}^{(X)}$; ранг свободного K-модуля $L^{\alpha}(X)$ задается формулой (16). Это очевидным образом следует из теоремы 2 б) и предложения 4 из § 2, n° 6.

§ 4. Центральные фильтрации

1. *Вещественные фильтрации*

Определение 1. *Пусть G — группа. Вещественной фильтрацией на G называется семейство $(G_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ подгрупп в G, таких, что*

$$G_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} G_\beta \quad \textit{для любых} \quad \alpha \in \mathbf{R}. \tag{1}$$

Из формулы (1) следует, что $G_\alpha \subset G_\beta$, как только $\beta < \alpha$, так что семейство (G_α) является *убывающим*. Фильтрация (G_α) называется *отделимой*, если $\bigcap_\alpha G_\alpha$ равно единичной подгруппе, и *исчерпывающей*, если $G = \bigcup_\alpha G_\alpha$.

Замечание. Пусть $(G_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ — убывающее семейство подгрупп в G. Оно является убывающей фильтрацией в смысле определения 1 из *Комм. алг.*, гл. III, § 2, n° 1. Для любого целого n и любого α из интервала $]n-1, n]$ множества $\mathbf{R}$ положим $H_\alpha = G_n$, откуда, в частности, $H_n = G_n$. Понятно, что таким образом мы получаем вещественную фильтрацию $(H_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ на G; будем называть такую фильтрацию *целочисленной*. Можно, таким образом, отождествить убывающие фильтрации в смысле *Комм. алг.*, гл. III, § 2, с целочисленными фильтрациями.

Пусть A — алгебра; вещественная фильтрация (A_α) на аддитивной группе A называется совместимой со структурой алгебры, если $A_\alpha \cdot A_\beta \subset A_{\alpha+\beta}$ для любых α, β из $\mathbf{R}$ и $K \cdot A_\alpha \subset A_\alpha$ для любого $\alpha \in \mathbf{R}$. Если фильтрация является исчерпывающей, то (A_α) — фундаментальная система окрестностей 0 в некоторой топологии A, совместимой со структурой алгебры. Пусть B — алгебра с единицей; вещественная фильтрация (B_α) на аддитивной группе B называется совместимой со структурой алгебры с единицей, если она совместима со структурой алгебры и если $1 \in B_0$.

2. Функция порядка

Пусть G — группа с единичным элементом e. Пусть $(G)_\alpha$ — вещественная фильтрация на G. Для любого x из G обозначим через I_x множество вещественных чисел α, таких, что $x \in G_\alpha$. Если $\alpha \in I_x$ и $\beta < \alpha$, то $\beta \in I_x$, так что I_x — интервал (*Общ. топ.*, 1969, гл. IV, § 2, n° 4, предложение 1). Используя соотношение (1), нетрудно убедиться в том, что I_x содержит свою точную верхнюю грань, если последняя конечна. Следовательно, I_x имеет вид $]-\infty, v(x)] \cap \mathbf{R}$, где $v(x) \in \overline{\mathbf{R}}$; здесь $v(x) = \sup\{\alpha \mid x \in G_\alpha\}$.

Отображение v группы G в $\overline{\mathbf{R}}$ называется *функцией порядка*, связанной с вещественной фильтрацией (G_α), а $v(x)$ — *порядком* элемента x. Это отображение обладает следующими свойствами:

а) *Для любых $x \in G$ и $\alpha \in \mathbf{R}$ соотношения $x \in G_\alpha$ и $v(x) \geqslant \alpha$ эквивалентны.*

б) *Для любых x, y из G имеют место соотношения*

$$v(x^{-1}) = v(x), \quad v(e) = +\infty, \tag{2}$$

$$v(xy) \geqslant \inf(v(x), v(y)). \tag{3}$$

Более того, в (3) выполняется равенство, если $v(x) > v(y)$.

в) *Для любого $\alpha \in \mathbf{R}$ обозначим через G_α^+ множество $x \in G$, таких, что $v(x) > \alpha$. Тогда $G_\alpha^+ = \bigcup_{\beta > \alpha} G_\beta$ и, в частности, G_α^+ — подгруппа в G.*

Обратно, пусть v — отображение группы G в $\overline{\mathbf{R}}$, удовлетворяющее соотношениям (2) и (3). Для любого $\alpha \in \mathbf{R}$ пусть G_α — множество $x \in G$, таких, что $v(x) \geqslant \alpha$. Тогда $(G_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ — вещественная фильтрация на G и v — функция порядка, связанная с этой фильтрацией. Для того чтобы фильтрация (G_α) была целочисленной, необходимо и достаточно, чтобы v отображала G в $\mathbf{Z} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Для того чтобы она была исчерпывающей (соотв. отделимой), необходимо и достаточно, чтобы $v^{-1}(-\infty) = \varnothing$ (соотв. $v^{-1}(+\infty) = \{e\}$).

Пусть A — произвольная K-алгебра (соотв. K-алгебра с единицей). Согласно предыдущему, соотношение

$$„x \in A_\alpha \Leftrightarrow v(x) \geqslant \alpha \text{ для любых } x \in A \text{ и } \alpha \in \mathbf{R}“$$

определяет биекцию множества исчерпывающих вещественных фильтраций $(A_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$, совместимых со структурой алгебры (соотв. алгебры с единицей) на A, на множество отображений $v: A \to \overline{\mathbf{R}}$, не принимающих значения $-\infty$ и удовлетворяющих аксиомам (4) — (7) (соотв. (4) — (8)), выписанным ниже:

$$v(x+y) \geqslant \inf(v(x), v(y)) \quad (x, y \text{ из } A), \tag{4}$$

$$v(-x) = v(x) \quad (x \in A), \tag{5}$$

$$v(\lambda x) \geqslant v(x) \quad (\lambda \in K,\ x \in A), \tag{6}$$

$$v(xy) \geqslant v(x) + v(y) \quad (x, y \text{ из } A), \tag{7}$$

$$v(1) \geqslant 0. \tag{8}$$

Замечание. Если $v(x)$ не равно тождественно $+\infty$, то условия (7) и (8) влекут за собой $v(1) = 0$.

3. *Градуированная алгебра, ассоциированная с фильтрованной алгеброй*

Пусть G — *коммутативная* группа, наделенная вещественной фильтрацией $(G_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$. Положим, как и прежде,

$$G_\alpha^+ = \bigcup_{\beta > \alpha} G_\beta. \tag{9}$$

Ясно, что G_α^+ — подгруппа в G_α. Положим $\operatorname{gr}_\alpha(G) = G_\alpha / G_\alpha^+$ и $\operatorname{gr}(G) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbf{R}} \operatorname{gr}_\alpha(G)$. Назовем *градуированной группой, ассоциированной с фильтрованной группой* G, группу $\operatorname{gr}(G)$, наделенную естественной градуировкой типа $\mathbf{R}$.

Замечание. Если фильтрация (G_α) целочисленна, то $\operatorname{gr}_\alpha(G) = \{0\}$ для нецелых α и $\operatorname{gr}_n(G) = G_n / G_{n-1}$ для любого целого числа n. Определение градуированной группы, ассоциированной с фильтрованной, совпадает поэтому с определением, данным в *Комм. алг.*, гл. III, § 2, n° 3.

Пусть A — алгебра (соотв. алгебра с единицей) и $(A_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ — вещественная фильтрация, совместимая со структурой алгебры (соотв. алгебры с единицей) (n° 1). Тогда

$$A_\alpha \,.\, A_\beta \subset A_{\alpha+\beta}, \qquad A_\alpha^+ \,.\, A_\beta + A_\alpha \,.\, A_\beta^+ \subset A_{\alpha+\beta}^+,$$

и билинейное отображение $A_\alpha \times A_\beta \to A_{\alpha+\beta}$, являющееся ограничением умножения в A, определяет посредством факторизации билинейное отображение

$$\operatorname{gr}_\alpha(A) \times \operatorname{gr}_\beta(A) \to \operatorname{gr}_{\alpha+\beta}(A).$$

Отсюда мы получаем билинейное отображение $\operatorname{gr}(A) \times \operatorname{gr}(A)$ в $\operatorname{gr}(A)$, превращающее группу $\operatorname{gr}(A)$ в градуированную алгебру (соотв. алгебру с единицей) типа $\mathbf{R}$. Если A — ассоциативная алгебра, то такова же и $\operatorname{gr}(A)$.

4. *Центральные фильтрации на группе*

Определение 2. *Пусть G — группа. Говорят, что вещественная фильтрация (G_α) на G центральна, если $G = \bigcup_{\alpha > 0} G_\alpha$ и коммутатор $(x, y) = x^{-1}y^{-1}xy$ элементов x из G_α и y из G_β принадлежит $G_{\alpha+\beta}$.*

На языке функции порядка v предыдущее определение формулируется в виде соотношений

$$v(x) > 0, \quad v((x, y)) \geqslant v(x) + v(y) \quad \text{для любых } x, y \text{ из } G. \tag{10}$$

Нетрудно вывести отсюда, что $v((x, y)) > v(x)$, если $v(x) \neq +\infty$; если положить $x^y = y^{-1}xy$ (ср. с *Alg.*, chap. I, p. 66), то $x^y = x.(x, y)$, так что

$$v(x^y) = v(x). \tag{11}$$

Это соотношение выражает тот факт, что все подгруппы G_α группы G являются *нормальными подгруппами.* Подгруппы G_α образуют фундаментальную систему окрестностей e для некоторой *топологии*, совместимой со структурой группы G (*Общ. топ.*, 1968, гл. III, § 1, n° 2, *пример*) и называемой топологией, определенной фильтрацией (G_α).

В этом пункте G — группа, наделенная *центральной* фильтрацией (G_α). Для любого $\alpha \in \mathbf{R}$ определим подгруппу G_α^+ группы G формулой

$$G_\alpha^+ = \bigcup_{\beta > \alpha} G_\beta. \tag{12}$$

В частности, $G_\alpha^+ = G_\alpha = G$ при $\alpha \leqslant 0$. Напомним, что если A и B — подгруппы в G, то (A, B) — подгруппа в G, порожденная коммутаторами (a, b), где $a \in A$ и $b \in B$. В этих обозначениях

$$(G_\alpha, G_\beta) \subset G_{\alpha+\beta}, \tag{13}$$

$$(G_\alpha^+, G_\beta) \subset G_{\alpha+\beta}^+, \tag{13$'$}$$

$$(G, G_\alpha) \subset G_\alpha^+. \tag{14}$$

Согласно формуле (14), G_α^+ — нормальная подгруппа в G_α при любом $\alpha \in \mathbf{R}$, а факторгруппа $\mathrm{gr}_\alpha(G) = G_\alpha/G_\alpha^+$ коммутативна. Положим $\mathrm{gr}(G) = \bigoplus_{\alpha \in \mathbf{R}} \mathrm{gr}_\alpha(G)$ и наделим группу $\mathrm{gr}(G)$ градуировкой типа $\mathbf{R}$, в которой $\mathrm{gr}_\alpha(G)$ состоит из элементов степени α. При $\alpha \leqslant 0$ имеем $\mathrm{gr}_\alpha(G) = \{0\}$.

Предложение 1. (i). *Пусть* α, β *взяты из* $\mathbf{R}$. *Тогда существует биаддитивное отображение*

$$\varphi_{\alpha\beta}\colon \mathrm{gr}_\alpha(G) \times \mathrm{gr}_\beta(G) \to \mathrm{gr}_{\alpha+\beta}(G),$$

переводящее $(xG_\alpha^+, yG_\beta^+)$ *в* $(x, y)G_{\alpha+\beta}^+$.

(ii) *Пусть* φ — *биаддитивное отображение* $\mathrm{gr}(G) \times \mathrm{gr}(G)$ *в* $\mathrm{gr}(G)$, *ограничение которого на* $\mathrm{gr}_\alpha(G) \times \mathrm{gr}_\beta(G)$ *равно* $\varphi_{\alpha\beta}$ *для любой пары* (α, β). *Тогда* φ *наделяет* $\mathrm{gr}(G)$ *структурой* $\mathbf{Z}$-*алгебры Ли.*

(i) Напомним тождество

$$(xx', y) = (x, y)^{x'}(x', y), \tag{15}$$

где x, x', y — произвольные элементы из G (*Alg.*, chap. I, p. 66, formule (4')).

Будем обозначать символом $f(x, y)$ класс по модулю $G^+_{\alpha+\beta}$ элемента (x, y) из подгруппы $G_{\alpha+\beta}$, где $x \in G_\alpha$ и $y \in G_\beta$. Для любого a из $G_{\alpha+\beta}$ и x' из G имеем $a^{-1} . a^{x'} = (a, x') \in G^+_{\alpha+\beta}$; в частности, $f(x, y)$ совпадает с классом $(x, y)^{x'}$ по модулю $G^+_{\alpha+\beta}$. Из формулы (15) следует поэтому

$$f(xx', y) = f(x, y) f(x', y). \tag{16}$$

Так как, далее, $(y, x) = (x, y)^{-1}$, то

$$f(y, x) = f(x, y)^{-1}. \tag{17}$$

Из (16) и (17) выводим также

$$f(x, yy') = f(x, y) f(x, y'). \tag{18}$$

Нам нужно проверить, что отображение $f\colon G_\alpha \times G_\beta \to \mathrm{gr}_{\alpha+\beta}(G)$ посредством факторизации определяет отображение $\varphi_{\alpha\beta}\colon \mathrm{gr}_\alpha(G) \times \times \mathrm{gr}_\beta(G) \to \mathrm{gr}_{\alpha+\beta}(G)$. Согласно (16) и (18), достаточно проверить, что $f(x, y) = 0$, если $x \in G^+_\alpha$ или же $y \in G^+_\beta$, а это следует из (13').

(ii) Так как $(x, x) = e$, то из (17) вытекает, что φ является $\mathbf{Z}$-билинейным знакопеременным отображением. Остается поэтому доказать, что если $u \in \mathrm{gr}_\alpha(G)$, $v \in \mathrm{gr}_\beta(G)$ и $w \in \mathrm{gr}_\gamma(G)$, то

$$\varphi(u, \varphi(v, w)) + \varphi(v, \varphi(w, u)) + \varphi(w, \varphi(u, v)) = 0. \tag{19}$$

Пусть $x \in G_\alpha$, $y \in G_\beta$ и $z \in G_\gamma$ — элементы, представляющие соответственно классы u, v и w. Мы знаем, что x^y и x — элементы из G_α, сравнимые по модулю G^+_α, поэтому x^y — представитель u в G_α; так как (y, z) — представитель $\varphi(v, w)$ в $G_{\beta+\gamma}$, то $(x^y, (y, z))$ — представитель $\varphi(u, \varphi(v, w))$ в $G_{\alpha+\beta+\gamma}$. Применяя циклическую перестановку, мы убеждаемся в том, что $(y^z, (z, x))$ и $(z^x, (x, y))$ представляют соответственно классы $\varphi(v, \varphi(w, u))$ и $\varphi(w, \varphi(u, v))$ в $G_{\alpha+\beta+\gamma}$. Соотношение (19) вытекает, таким образом, из следующего тождества (*Alg.*, chap. I, p. 66, formula (15); см. также упражнение 26 б) гл. I)

$$(x^y, (y, z)) . (y^z, (z, x)) . (z^x, (x, y)) = e. \tag{20}$$

Ч. Т. Д.

Алгебра Ли $\mathrm{gr}(G)$ над $\mathbf{Z}$, определенная в предложении 1, называется *градуированной алгеброй Ли, ассоциированной с фильтрованной группой G*.

5. Пример центральной фильтрации

Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей, наделенная фильтрацией алгебры с единицей (A_α), такой, что $A_0 = A$; тогда A_α при любом $\alpha \in \mathbf{R}$ является двусторонним идеалом в A. Обозначим через A^* мультипликативную группу обратимых элементов из A. Для любого $\alpha > 0$ обозначим через Γ_α множество $x \in A^*$, таких, что $x - 1 \in A_\alpha$; положим $\Gamma = \bigcup_{\alpha > 0} \Gamma_\alpha$ и $\Gamma_\beta = \Gamma$ при $\beta \leqslant 0$.

Предложение 2. *Множество* Γ — *подгруппа в* A^* *и* (Γ_α) — *центральная фильтрация на* Γ.

По построению $\Gamma = \bigcup_{\alpha > 0} \Gamma_\alpha$, так что соотношение $\Gamma_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} \Gamma_\beta$ следует из $A_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} A_\beta$. Покажем, что Γ_α — подгруппа в A^*. Имеем $1 \in \Gamma_\alpha$; пусть x, y — элементы из Γ_α, т. е. $x - 1 \in A_\alpha$, $y - 1 \in A_\alpha$. Поскольку A_α — двусторонний идеал в A, формулы

$$xy - 1 = (x - 1)(y - 1) + (x - 1) + (y - 1), \tag{21}$$

$$x^{-1} - 1 = -x^{-1}(x - 1) \tag{22}$$

влекут за собой $xy - 1 \in A_\alpha$ и $x^{-1} - 1 \in A_\alpha$, так что $xy \in \Gamma_\alpha$ и $x^{-1} \in \Gamma_\alpha$.

Так как $\Gamma = \bigcup_{\alpha > 0} \Gamma_\alpha$, то Γ — подгруппа в A^*.

Пусть, наконец, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $x \in \Gamma_\alpha$ и $y \in \Gamma_\beta$. Положим $x - 1 = \xi$ и $y - 1 = \eta$. Тогда

$$(x, y) - 1 = x^{-1}y^{-1}(\xi\eta - \eta\xi). \tag{23}$$

По предположению $\xi \in A_\alpha$ и $\eta \in A_\beta$, откуда $\xi\eta - \eta\xi \in A_{\alpha+\beta}$. Так как $A_{\alpha+\beta}$ — двусторонний идеал в A, то $(x, y) - 1 \in A_{\alpha+\beta}$, так что $(x, y) \in \Gamma_{\alpha+\beta}$. Ч. Т. Д.

Замечание. Пусть $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ и $x \in \Gamma_\alpha$, $y \in \Gamma_\beta$. По формулам (21), (22) и (23) имеем

$$x^{-1} - 1 \equiv -(x - 1) \mod A_{2\alpha}, \tag{24}$$

$$xy - 1 \equiv (x - 1) + (y - 1) \mod A_{\alpha+\beta}, \tag{25}$$

$$(x, y) - 1 \equiv [(x - 1), (y - 1)] \mod A_{\alpha+\beta+\inf(\alpha, \beta)}. \tag{26}$$

Докажем, например, (26). Если $x - 1 = \xi$ и $y - 1 = \eta$, то по (23) имеем

$$(x, y) - 1 - [\xi, \eta] = ((x^{-1} - 1) + (y^{-1} - 1) + (x^{-1} - 1)(y^{-1} - 1))[\xi, \eta].$$

В то же время $[\xi, \eta] \in A_{\alpha+\beta}$, $(x^{-1}-1) \in A_\alpha$, $(y^{-1}-1) \in A_\beta$, откуда и следует (26).

Пусть G — группа и $\rho: G \to \Gamma$ — гомоморфизм. Для любого вещественного α положим $G_\alpha = \rho^{-1}(\Gamma_\alpha)$. Так как (Γ_α) — центральная фильтрация на Γ, то понятно, что (G_α) — центральная фильтрация на G.

Предложение 3. (i) *Для любого* $\alpha \in \mathbf{R}$ *существует единственный гомоморфизм групп* $g_\alpha: \mathrm{gr}_\alpha(G) \to \mathrm{gr}_\alpha(A)$, *отображающий класс элемента* $a \in G_\alpha$ *по модулю* G_α^+ *на класс элемента* $\rho(a)-1$ *по модулю* A_α^+.

(ii) *Пусть* g — *гомоморфизм* $\mathrm{gr}(G)$ *в* $\mathrm{gr}(A)$, *ограничение которого на* $\mathrm{gr}_\alpha(G)$ *равно* g_α *для любого* α. *Тогда* g — *инъективный гомоморфизм* $\mathbf{Z}$*-алгебр Ли.*

(i) Пусть $\alpha > 0$. По предположению для любого a из G_α верно $\rho(a)-1 \in A_\alpha$; обозначим через $p_\alpha(a)$ класс элемента $\rho(a)-1$ по модулю A_α^+. Так как $A_{2\alpha} \subset A_\alpha^+$, то соотношение (25) влечет за собой $p_\alpha(ab) = p_\alpha(a) + p_\alpha(b)$. Далее, $a \in G_\alpha^+$ тогда и только тогда, когда $\rho(a)-1 \in A_\alpha^+$; следовательно, G_α^+ — ядро гомоморфизма p_α подгруппы G_α в $\mathrm{gr}_\alpha(A)$. При факторизации p_α определяет, следовательно, инъективный гомоморфизм $g_\alpha: \mathrm{gr}_\alpha(G) \to \mathrm{gr}_\alpha(A)$.

При $\alpha \leqslant 0$ имеем $\mathrm{gr}_\alpha(G) = \{0\}$, и у нас не остается иного выхода, кроме как положить $g_\alpha = 0$.

(ii) Так как g_α инъективен для любого вещественного α, то g инъективен. Покажем, что g — гомоморфизм алгебр Ли. Так как $\mathrm{gr}_\alpha(G) = \{0\}$ при $\alpha \leqslant 0$, то достаточно доказать формулу

$$p_{\alpha+\beta}((a, b)) = [p_\alpha(a), p_\beta(b)], \tag{27}$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $a \in G_\alpha$ и $b \in G_\beta$, которая, однако, следует из (26).

6. Целочисленные центральные фильтрации

Напомним (n° 1, *замечание*), что фильтрация (G_α) группы G называется целочисленной, если $G_\alpha = G_n$ для любого целого n и любого $\alpha \in \left]n-1, n\right]$. Задание целочисленной центральной фильтрации на группе G эквивалентно заданию ряда $(G_n)_{n \geqslant 1}$ подгрупп группы G, удовлетворяющих условиям

$$G_1 = G, \tag{i}$$

$$G_n \supset G_{n-1} \quad \text{для любого } n \geqslant 1, \tag{ii}$$

$$(G_m, G_n) \subset G_{m+n} \quad \text{для } m \geqslant 1 \text{ и } n \geqslant 1. \tag{iii}$$

Для любого целого $n \geqslant 1$ подгруппа G_n нормальна в G и факторгруппа $\mathrm{gr}_n(G) = G_n/G_{n+1}$ коммутативна. Отображение $(x, y) \mapsto (x, y) = x^{-1}y^{-1}xy$ из $G_m \times G_n$ в G_{m+n} позволяет посредством факторизации определить на $\mathrm{gr}(G) = \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathrm{gr}_n(G)$ структуру градуированной алгебры Ли типа $\mathbf{N}$ над кольцом $\mathbf{Z}$.

Напомним (*Alg.*, chap. I, p. 68, *définition* 5), что *нижним центральным рядом* группы G называется последовательность подгрупп, определенная формулами

$$C^1G = G, \quad C^{n+1}G = (G, C^nG) \quad \text{для любого} \quad n \geqslant 1. \tag{28}$$

Соответствующая ему фильтрация называется *нижней центральной фильтрацией* группы G.

Предложение 4. (i) *Нижняя центральная фильтрация G является целочисленной центральной фильтрацией на G.*

(ii) *Если $(G_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ — целочисленная центральная фильтрация на G, то $C^nG \subset G_n$ при любом целом $n \in \mathbf{N}^*$.*

Утверждение (i) доказано в кн. *Alg.*, chap. I, p. 68, *formule* (7).

Утверждение (ii) доказывается индукцией по n; $C^1G = G = G_1$; при $n > 1$ имеем $C^nG = (G, C^{n-1}G) \subset (G, G_{n-1}) \subset G_n$.

Предложение 5. *Пусть G — группа, и пусть $\mathrm{gr}(G)$ — градуированная $\mathbf{Z}$-алгебра Ли, ассоциированная с нижней центральной фильтрацией G. Тогда алгебра $\mathrm{gr}(G)$ порождается множеством $\mathrm{gr}_1(G) = G/(G, G)$.*

Пусть L — подалгебра Ли алгебры $\mathrm{gr}(G)$, порожденная $\mathrm{gr}_1(G)$; индукцией по n докажем включение $L \supset \mathrm{gr}_n(G)$, причем утверждение тривиально при $n = 1$. Предположим, что $n > 1$ и $L \supset \mathrm{gr}_{n-1}(G)$. Так как $C^nG = (G, C^{n-1}G)$, то процесс построения умножения в алгебре Ли на $\mathrm{gr}(G)$ показывает, что $\mathrm{gr}_n(G) = [\mathrm{gr}_1(G), \mathrm{gr}_{n-1}(G)] \subset L$.

Только что приведенное доказательство показывает, что нижний центральный ряд алгебры Ли $\mathrm{gr}(G)$ (§ 2, n° 7) задается формулой

$$\mathscr{C}^n(\mathrm{gr}(G)) = \sum_{m \geqslant n} \mathrm{gr}_m(G).$$

Замечание. Пусть k — кольцо, n — целое число > 0, A — множество матриц с n столбцами и n строками с элементами из k, являющихся нижними треугольными. Для любого $p \geqslant 0$ пусть A_p — множество $(x_{ij}) \in A$, таких, что $x_{ij} = 0$ при $i - j < p$. Тогда $A_0 = A$ и $A_pA_q \subset A_{p+q}$. Пусть $\Gamma_p = 1 + A_p$. Тогда Γ_1 — подгруппа в $\mathbf{GL}(n, k)$, называемая группой *унитреугольных матриц по-*

ряда n над k. Согласно предложению 2 из n° 5, (Γ_p) — целочисленная фильтрация на Γ_1. Так как $\Gamma_n = \{1\}$, то Γ_1 — *нильпотентная* группа (*Alg.*, chap. I, p. 60, *définition* 6).

§ 5. Алгебры Магнуса

В этом параграфе X — множество, $F(X)$ — свободная группа над X (*Alg.*, chap. I, p. 84, n° 5) *и $A(X)$ — свободная ассоциативная алгебра над X, наделенная моноградуировкой $(A^n(X))_{n \geqslant 0}$* (*Alg.*, chap. III, p. 31, *exemple* 3). *Множество X отождествляется со своими образами в $F(X)$ и $A(X)$.*

1. Алгебры Магнуса

Пусть $\widehat{A}(X)$ — произведение модулей $\prod_{n \geqslant 0} A^n(X)$. Определим в $\widehat{A}(X)$ умножение правилом

$$(ab)_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i},$$

где $a = (a_n)$ и $b = (b_n)$ — элементы из $\widehat{A}(X)$. Известно, что $\widehat{A}(X)$ является ассоциативной алгеброй и что $A(X)$ отождествляется с подалгеброй в $\widehat{A}(X)$, состоящей из последовательностей, в которых равны нулю все члены, за исключением конечного их числа (*Комм. алг.*, гл. III, § 2, n° 12, *пример* 1).

Наделим $\widehat{A}(X)$ топологией произведения дискретных топологических пространств $A^n(X)$; эта топология превращает $\widehat{A}(X)$ в полную отделимую топологическую алгебру, причем K наделено дискретной топологией и $A(X)$ плотно в $\widehat{A}(X)$. Пусть $a = (a_n) \in \widehat{A}(X)$; семейство $(a_n)_{n \geqslant 0}$ суммируемо и $a = \sum_{n \geqslant 0} a_n$.

Для любого целого $m \geqslant 0$ обозначим через $\widehat{A}_m(X)$ идеал, состоящий из рядов вида $a = \sum_{n \geqslant m} a_n$, таких, что $a_n \in A^n(X)$, где n — любое целое $\geqslant m$. Эта последовательность идеалов является фундаментальной системой окрестностей 0 в $\widehat{A}(X)$ и целочисленной фильтрацией на $\widehat{A}(X)$. Функция порядка, ассоциированная с этой фильтрацией, обозначается через ω; имеем тогда $\omega(0) = +\infty$ и $\omega(a) = m$, если $a = \sum_{r \geqslant m} a_n$, где $a_m \in A^n(X)$ для любого $n \geqslant m$ и $a_m \neq 0$ (§ 4, n° 1 и 2).

Говорят, что $\widehat{A}(X)$ — *алгебра Магнуса* множества X с коэффициентами в K. Если есть неясность в употреблении K, то можно также писать $\widehat{A}_K(X)$.

Предложение 1. *Пусть B — ассоциативная алгебра с единицей, наделенная вещественной фильтрацией $(B_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$, относительно которой B отделима и полна*[1] (§ 4, n° 1 и 2). *Пусть f — отображение множества X в B, такое, что существует $\lambda > 0$, для которого $f(X) \subset B_\lambda$. Тогда f продолжается единственным образом до непрерывного гомоморфизма алгебр с единицей $\hat{f}$ алгебры $\hat{A}(X)$ в B.*

Пусть f' — единственный гомоморфизм алгебр с единицей алгебры $A(X)$ в B, продолжающий f (*Alg.*, chap. III, p. 22, proposition 7). Покажем, что f' *непрерывен*: в самом деле, $f'(A^n(X)) \subset B_{n\lambda}$, так что $f'(\hat{A}_n(X) \cap A(X)) \subset B_{n\lambda}$. Поэтому f' продолжается единственным способом по непрерывности до гомоморфизма $\hat{f}: \hat{A}(X) \to B$.

Сохраним предположения и обозначения предыдущего предложения 1; пусть $u \in \hat{A}(X)$. Элемент $\hat{f}(u)$ обозначается через $u((f(x))_{x \in X})$ и называется *результатом подстановки* $f(x)$ *вместо* x *в* u. В частности, $u((x)_{x \in X}) = u$. Пусть теперь $\boldsymbol{u} = (u_y)_{y \in Y}$ — семейство элементов из $\hat{A}_1(X)$ и $v \in \hat{A}(X)$. Сказанное выше позволяет определить элемент $v((u_y)_{y \in Y}) \in \hat{A}(X)$. Обозначим его через $v \circ \boldsymbol{u}$. Так как $u_y((f(x))) \in B_\lambda$, то можно подставить элементы $u_y((f(x)))$ вместо y в v. Отображения $v \mapsto (v \circ u)((f(x)))$ и $v \mapsto v((u_y((f(x)))))$ — это непрерывные гомоморфизмы алгебр с единицей $\hat{A}(Y) \to B$, принимающие одинаковые значения $u_y((f(x)))$ на элементах $y \in Y$. Следовательно (предложение 1),

$$(v \circ \boldsymbol{u})((f(x))) = v((u_y((f(x))))) \tag{2}$$

для любого $v \in \hat{A}(Y)$.

2. Группа Магнуса

Если $a = (a_n)_{n \geqslant 0}$ — произвольный элемент из $\hat{A}(X)$, то элемент a_0 из K мы будем называть *свободным членом* a и обозначать через $\varepsilon(a)$. Формула (1) показывает, что ε — гомоморфизм алгебры $\hat{A}(X)$ в K.

Лемма 1. *Элемент a из $\hat{A}(X)$ обратим тогда и только тогда, когда его свободный член обратим в K.*

Если a обратим в $\hat{A}(X)$, то $\varepsilon(a)$ обратим в K. Обратно, если $\varepsilon(a)$ обратим в K, то существует $u \in \hat{A}_1(X)$, такой, что $a = \varepsilon(a)(1 - u)$; положим $b = \left(\sum\limits_{n \geqslant 0} u^n\right)\varepsilon(a)^{-1}$. Тогда $ab = ba = 1$, и, значит, a обратим.

[1]) Как топологическая алгебра. — *Прим. перев.*

Множество элементов в $\widehat{A}(X)$ со свободным членом, равным 1, образует, таким образом, подгруппу мультипликативного моноида $\widehat{A}(X)$, называемую *группой Магнуса* над X (относительно K). В этой главе мы будем обозначать ее через $\Gamma(X)$ или просто Γ. Для любого целого $n \geqslant 1$ обозначим через Γ_n множество $a \in \Gamma$, таких, что $\omega(a-1) \geqslant n$. Согласно предложению 2 из § 4, n° 5, последовательность $(\Gamma_n)_{n \geqslant 1}$ является *целочисленной центральной фильтрацией* на Γ.

3. Группа Магнуса и свободная группа

Теорема 1. *Пусть r — отображение множества X в $\widehat{A}(X)$, такое, что $\omega(r(x)) \geqslant 2$ для любого $x \in X$. Единственный гомоморфизм g свободной группы $F(X)$ в группу Магнуса $\Gamma(X)$, для которого $g(x) = 1 + x + r(x)$ при любом $x \in X$, инъективен.*

Докажем сначала три леммы.

Лемма 2. Пусть n — целое рациональное число, не равное нулю В кольце формальных степенных рядов $K[[t]]$ положим $(1+t)^n = \sum_{j \geqslant 0} c_{j,n} t^j$. Тогда существует целое $j \geqslant 1$, такое, что $c_{j,n} \neq 0$.

Если $n > 0$, то по формуле бинома $c_{n,n} = 1$.

Пусть $n < 0$, и положим $m = -n$. Если бы $c_{j,n} = 0$ при любом $j \geqslant 1$, то $(1+t)^n = 1$, т. е. $(1+t)^m = 1$, что противоречит формуле $c_{m,m} = 1$.

Лемма 3. Пусть $x_1, \ldots, x_s$ — элементы из X, такие, что $s \geqslant 1$ и $x_i \neq x_{i+1}$ при $1 \leqslant i \leqslant s-1$; пусть $n_1 \ldots, n_s$ — ненулевые целые рациональные числа. Тогда элемент $\prod_{i=1}^{s} (1+x_i)^{n_i}$ алгебры $\widehat{A}(X)$ отличен от единицы.

Пусть $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в K и k — поле $K/\mathfrak{m}$; пусть p: $\widehat{A}_K(X) \to \widehat{A}_k(X)$ — единственный гомоморфизм алгебр с единицей, такой, что $p(x) = x$ для любого $x \in X$ (n° 1, предложение 1). Достаточно доказать, что $p \prod (1+x_i)^{n_i} \neq 1$, и поэтому можно считать, что K — поле.

В обозначениях леммы 2

$$\prod_{i=1}^{s} (1+x_i)^{n_i} = \sum_{b_i \geqslant 0} c_{b_1, n_1} \ldots c_{b_s, n_s} x_1^{b_1} \ldots x_s^{b_s}.$$

По лемме 2 существуют целые $a_i > 0$, такие, что $c_{a_i, n_i} \neq 0$ $(1 \leqslant i \leqslant s)$. Согласно предложению 6 из *Alg.*, chap. I, p. 84, ни один из одночленов $x_1^{b_1} \ldots x_s^{b_s}$ с $b_i \geqslant 0$ и $(b_1, \ldots, b_s) \neq$

$\neq (a_1, \ldots, a_s)$ не может равняться $x_1^{a_1} \ldots x_s^{a_s}$. Отсюда следует, что коэффициент при $x_1^{a_1} \ldots x_s^{a_s}$ в $\prod_{i=1}^{s} (1 + x_i)^{n_i}$ равен $c_{a_1, n_1} \ldots$ $\ldots c_{a_s, n_s} \neq 0$, что и влечет за собой утверждение леммы.

Лемма 4. *Пусть* σ — *непрерывный эндоморфизм* $\widehat{A}(X)$, *такой, что* $\sigma(x) = x + r(x)$ *для любого* $x \in X$ (n° 1, предложение 1). *Тогда* σ — *автоморфизм и* $\sigma(\widehat{A}_m(X)) = \widehat{A}_m(X)$ *для любого* $m \in \mathbf{N}$.

Имеем $\sigma(x) \equiv x \bmod \widehat{A}_2(X)$ для любого $x \in X$, откуда при $n \geqslant 1$ и $x_1, \ldots, x_n$ из X выполняется

$$\sigma(x_1) \ldots \sigma(x_n) \equiv x_1 \ldots x_n \bmod \widehat{A}_{n+1}(X);$$

отсюда по линейности следует, что $\sigma(a) \equiv a$ по модулю $\widehat{A}_{n+1}(X)$ для любого $a \in A^n(X)$ и, в частности, $\sigma(A^n(X)) \subset \widehat{A}_n(X)$. Отсюда легко выводим, что $\sigma(A^m(X)) \subset \widehat{A}_n(X)$ при $m \geqslant n$, так что $\sigma(\widehat{A}_n(X)) \subset \widehat{A}_n(X)$. Иначе говоря, σ совместим с фильтрацией $(\widehat{A}_m(X))$ алгебры $\widehat{A}(X)$ и его ограничение на ассоциированную градуированную алгебру тождественно. Следовательно, σ биективен (*Ком. алг.*, гл. III, § 2, n° 8, следствие 3 теоремы 1).

Докажем теперь теорему 1. Пусть w — элемент из $F(X)$. По предложению 7 из *Alg.*, chap. I, p. 84, существуют $x_1, \ldots, x_s$ из X и целые рациональные $n_1, \ldots, n_s$, не равные нулю, такие, что $s \geqslant 1$, $x_i \neq x_{i+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant s-1)$ и

$$w = x_1^{n_1} \ldots x_s^{n_s}.$$

В обозначениях леммы 4 имеем

$$g(w) = \prod (1 + \sigma(x_i))^{n_i} = \sigma\left(\prod (1 + x_i)^{n_i}\right),$$

откуда $g(w) \neq 1$ по леммам 3 и 4.

4. Нижний центральный ряд свободной группы

Мы собираемся доказать следующие две теоремы.

Теорема 2. *Предположим, что в кольце* K *соотношение* $n \cdot 1 = 0$ *влечет за собой* $n = 0$ *для любого целого* n. *Пусть* r — *отображение множества* X *в* $\widehat{A}(X)$, *такое, что* $\omega(r(x)) \geqslant 2$ *для любого* $x \in X$, *и пусть* g — *гомоморфизм группы* $F(X)$ *в группу Магнуса* $\Gamma(X)$, *такой, что* $g(x) = 1 + x + r(x)$ *при* $x \in X$. *Для любого* $n \geqslant 1$ *подгруппа* $C^nF(X)$ *является полным прообразом подгруппы* $1 + \widehat{A}_n(X)$ *группы* $\Gamma(X)$ *при отображении* g.

Теорема 3. *Для любого* $x \in X$ *пусть* $c(x)$ — *канонический образ* x *в* $F(X)/(F(X), F(X))$. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *градуированная* $\mathbf{Z}$-*алгебра*

Ли, ассоциированная с фильтрацией $(C^nF(X))_{n\geqslant 1}$ *группы* $F(X)$ (§ 4, n° 6). *Единственный гомоморфизм* $\mathbf{Z}$*-алгебр Ли свободной алгебры* $L_{\mathbf{Z}}(X)$ *в* $\mathfrak{g}$, *продолжающий* c, *является изоморфизмом.*

В терминах образов градуированная $\mathbf{Z}$-алгебра Ли, ассоциированная со свободной группой $F(X)$ (относительно нижнего центрального ряда), является свободной $\mathbf{Z}$-алгеброй Ли $L_{\mathbf{Z}}(X)$.

Положим $F(X)=F$, $\Gamma(X)=\Gamma$, $\widehat{A}(X)=\widehat{A}$, $\widehat{A}_{\mathbf{Z}}(X)=\widehat{A}_{\mathbf{Z}}$, $C^nF(X)=C^n$, $\Gamma_n=1+\widehat{A}_n(X)$; пусть, далее, $\alpha\colon L_{\mathbf{Z}}(X)\to\mathfrak{g}$ — гомоморфизм, введенный в формулировке теоремы 3.

А) *Предварительные редукции*

Обозначим через γ гомоморфизм группы F в Γ, определенный правилом $\gamma(x)=1+x$ для любого $x\in X$. По лемме 4 существует автоморфизм σ алгебры $\widehat{A}$, сохраняющий ее фильтрацию и такой, что $\sigma(1+x)=g(x)$ для любого $x\in X$; имеем $\sigma(\Gamma_n)=\Gamma_n$ для любого n. Так как гомоморфизмы g и $\sigma\circ\gamma$ группы F в Γ совпадают на X, то $g=\sigma\circ\gamma$, так что $g^{-1}(\Gamma_n)=\gamma^{-1}(\Gamma_n)$. В предположениях теоремы 2 можно отождествить $\mathbf{Z}$ с подкольцом в K; алгебра Магнуса $\widehat{A}_{\mathbf{Z}}$ отождествляется тогда с подкольцом в $\widehat{A}$, причем фильтрация на $\widehat{A}_{\mathbf{Z}}$ индуцируется фильтрацией на $\widehat{A}$. Так как γ отображает F в $A_{\mathbf{Z}}$, то понятно, что достаточно доказать теоремы 2 и 3 при дополнительных предположениях $K=\mathbf{Z}$ и $r=0$, т. е. $g=\gamma$, *которых мы и будем придерживаться в дальнейшем.*

Б) *Сюръективность* α

Так как X порождает группу $F=C^1$, то множество $c(X)$ порождает $\mathbf{Z}$-модуль $\mathfrak{g}^1=C^1/C^2$. Но $\mathfrak{g}^1$ порождает $\mathbf{Z}$-алгебру Ли $\mathfrak{g}$ (§ 4, n° 6, предложение 5), следовательно, $c(X)$ порождает $\mathfrak{g}$, что и доказывает сюръективность α.

В) Отождествим градуированную алгебру $\operatorname{gr}(\widehat{A})$ с $A(X)$ при помощи канонических изоморфизмов $A^n(X)\to\widehat{A}_n/\widehat{A}_{n+1}$. Для любого целого $n\geqslant 1$ положим $F^n=\gamma^{-1}(\Gamma_n)$; известно, что $(F^n)_{n\geqslant 1}$ — целочисленная центральная фильтрация F (§ 4, n° 5). Обозначим через $\mathfrak{g}'$ градуированную $\mathbf{Z}$-алгебру Ли, ассоциированную с этой фильтрацией (§ 4, n° 4). Пусть f — гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}'$ в $A(X)$, ассоциированный с γ (§ 4, n° 5, предложение 3). В то же время $C^n\subset F^n$ для любого целого $n\geqslant 1$ (§ 4, n° 6, предложение 4), так что имеется канонический гомоморфизм ε алгебры $\mathfrak{g}=\bigoplus_{n\geqslant 1}C^n/C^{n+1}$ в $\mathfrak{g}'=\bigoplus_{n\geqslant 1}F^n/F^{n+1}$:

$$L_{\mathbf{Z}}(X)\xrightarrow{\alpha}\mathfrak{g}\xrightarrow{\varepsilon}\mathfrak{g}'\xrightarrow{f}A(X).$$

Положим $\beta = f \circ \varepsilon$; гомоморфизм β можно определить словами следующим образом: если u — класс по модулю C^{n+1} некоторого элемента w из C^n, то $\gamma(w) - 1$ — элемент порядка $\geqslant n$ в $\hat{A}$ и $\beta(u)$ — однородная компонента степени n элемента $\gamma(w) - 1$. В частности,

$$\beta(c(x)) = x \text{ для любого } x \in X. \tag{3}$$

Г) *Доказательство теорем* 2 *и* 3.

В силу (3) ограничение гомоморфизма алгебр Ли $\beta \circ \alpha$: $L_{\mathbf{Z}}(X) \to A(X)$ на X тождественно, поэтому $\beta \circ \alpha$ — каноническая инъекция (§ 3, n° 1). Поэтому α инъективен, а следовательно, и биективен в силу Б); это доказывает теорему 3. Поскольку $\beta \circ \alpha = f \circ \varepsilon \circ \alpha$ инъективен, а α биективен, то ε инъективен. Для любого целого $n \geqslant 1$

$$\varepsilon_n\colon\ C^n/C^{n+1} \to F^n/F^{n+1}$$

инъективен, поэтому

$$C^n \cap F^{n+1} = C^{n+1}.$$

Имеем $C^1 = F = F^1$; если $C^n = F^n$, то $C^n \cap F^{n+1} = F^{n+1}$, откуда $C^{n+1} = F^{n+1}$, что после применения индукции по $n \geqslant 1$ доказывает теорему 2.

Следствие.

$$\bigcap_{n \geqslant 1} C^n F(X) = \{e\}.$$

В самом деле, применяя теорему 2 при $K = \mathbf{Z}$ и $r = 0$, получим

$$\bigcap_{n \geqslant 1} C^n F(X) = \bigcap_{n \geqslant 1} g^{-1}\bigl(1 + \hat{A}_n(X)\bigr) = \\ = g^{-1}\Bigl(\bigcap_{n \geqslant 1}\bigl(1 + \hat{A}_n(X)\bigr)\Bigr) = g^{-1}(1) = \{e\}.$$

Замечание. Пусть H — семейство Холла над X (§ 2, n° 10). Пусть M — группоид, умножение в котором определено правилом $(x, y) \mapsto (x, y) = x^{-1}y^{-1}xy$, и пусть φ — гомоморфизм $M(X)$ в M, ограничение которого на X тождественно. Элементы из $\varphi(H)$ называются *базисными коммутаторами* группы $F(X)$, связанными с семейством Холла H. Для любого целого $n \geqslant 1$ пусть H_n — подмножество в H, состоящее из элементов длины n; известно (§ 2, n° 11, теорема 1), что каноническое отображение H_n в $L_{\mathbf{Z}}(X)$ является базисом свободной абелевой группы $L^n_{\mathbf{Z}}(X)$. Более того, $\varphi(H_n) \subset C^n$; поэтому можно через $\varphi_n(m)$ обозначить класс $\operatorname{mod} C^{n+1}$ элемента $\varphi(m) \in C^n$ для любого

$m \in H_n$. Из теоремы 3 видно тогда, что φ_n — *биекция множества H_n на базис свободной абелевой группы C^n/C^{n+1}*. Отсюда легко вывести, что для любого $w \in F(X)$ и любого $i \geqslant 1$ существует единственный элемент α_i из $\mathbf{Z}^{(\mathrm{H}_i)}$, такой, что, каково бы ни было $n \geqslant 1$, верно равенство

$$w = \prod_{i=1}^{n} \prod_{m \in H_i} \varphi(m)^{\alpha_i(m)} \bmod C^{n+1}, \tag{4}$$

где произведение вычисляется согласно совершенной упорядоченности на H.

Пример. Предположим, что X — множество, состоящее из двух элементов x, y, и положим $H_1 = \{x, y\}$, $H_2 = \{xy\}$. Любой элемент w группы $F(X)$ может быть записан в виде

$$w \equiv x^a y^b (x, y)^c \bmod C^3, \text{ где } a, b, c \in \mathbf{Z}.$$

Если $w = (xy)^n$, то $a = b = n$ и $c = n(1-n)/2$ (см. упражнение 9), откуда

$$(xy)^n \equiv x^n y^n (x, y)^{n(1-n)/2} \bmod C^3.$$

5. *p-Фильтрация в свободных группах*

В этом пункте p — простое число, а $K = \mathbf{F}_p$. Пусть γ—гомоморфизм группы $F(X)$ в $\Gamma(X)$, такой, что $\gamma(x) = 1 + x$ для любого x из X; положим $F_n^{(p)}(X) = \gamma^{-1}(1 + \hat{A}_n(X))$. Последовательность $(F_n^{(p)}(X))_{n \geqslant 1}$ является целочисленной центральной фильтрацией на $F(X)$, причем она *отделима*, так как γ инъективен (n° 3, теорема 1). Назовем ее *p-фильтрацией* $F(X)$.

Предложение 2. *Предположим, что X конечно. Для любого целого $n \geqslant 1$ группа $F(X)/F_n^{(p)}(X)$ — конечная p-группа класса нильпотентности, не превосходящего n.*

Доказываем индукцией по n. Достаточно показать, что $F_n^{(p)}(X)/F_{n+1}^{(p)}(X)$ — коммутативная конечная p-группа при любом целом $n \geqslant 1$. При любом $w \in F_n^{(p)}(X)$ элемент $\gamma(w) - 1$ из $\hat{A}(X)$ имеет порядок $\geqslant n$; обозначим через $\delta_n(w)$ однородную компоненту $\gamma(w) - 1$ степени n. Отображение δ_n: $F_n^{(p)}(X) \to A^n(X)$ является гомоморфизмом с ядром $F_{n+1}^{(p)}(X)$ (§ 4, n° 5, предложение 3), поэтому $F_n^{(p)}(X)/F_{n+1}^{(p)}(X)$ изоморфна подгруппе в $A^n(X)$. Так как X конечно, то $A^n(X)$ — векторное пространство

конечной размерности над $\mathbf{F}_p$, т. е. конечная коммутативная p-группа, а поэтому такова же и $F_n^{(p)}(X)/F_{n+1}^{(p)}(X)$.

Предложение 3. *Для любого $w \neq 1$ из $F(X)$ существует конечная p-группа G и гомоморфизм f группы $F(X)$ в G, такой, что $f(w) \neq 1$.*

Существуют элементы $x_1, \ldots, x_r$ множества X и целые числа $n_1, \ldots, n_r$, такие, что $w = x_1^{n_1} \ldots x_r^{n_r}$. Пусть $Y = \{x_1, \ldots, x_r\}$. Каноническое вложение множества Y в X продолжается до гомоморфизма α: $F(Y) \to F(X)$; кроме того, пусть β — гомоморфизм группы $F(X)$ в $F(Y)$, ограничение которого на Y тождественно и который отображает $X - Y$ в $\{1\}$. Имеем $\beta(\alpha(y)) = y$ для любого $y \in Y$, поэтому $\beta \circ \alpha$ — тождественный автоморфизм группы $F(Y)$. Очевидно, существует w' в $F(Y)$, такой, что $w = \alpha(w')$; тогда $\beta(w) = w' \neq 1$; однако $\bigcap_{n \geqslant 1} F_n^{(p)}(Y) = \{1\}$, и значит, существует целое число $n \geqslant 1$, такое, что $\beta(w) \notin F_n^{(p)}(Y)$. По предложению 2 группа $G = F(Y)/F_n^{(p)}(Y)$ — конечная p-группа. Если f — композиция β и канонического гомоморфизма группы $F(Y)$ на G, то $f(w) \neq 1$.

Следствие. *Пересечение нормальных подгрупп конечного индекса в $F(X)$ тривиально.*

§ 6. Ряд Хаусдорфа

В этом параграфе мы предполагаем, что K — поле характеристики 0.

1. Экспонента и логарифм в фильтрованных алгебрах

Пусть A — ассоциативная алгебра с единицей, отделимая и полная относительно вещественной фильтрации (A_α). Положим $\mathfrak{m} = A_0^+ = \bigcup_{\alpha > 0} A_\alpha$.

Для любого $x \in \mathfrak{m}$ семейство $(x^n/n!)_{n \in \mathbf{N}}$ суммируемо. Положим

$$e^x = \exp x = \sum_{n \geqslant 0} x^n/n! \tag{1}$$

Тогда $\exp(x) \in 1 + \mathfrak{m}$, и отображение $\exp$: $\mathfrak{m} \to 1 + \mathfrak{m}$ называется *экспоненциальным отображением* алгебры A.

Для любого $y \in 1 + \mathfrak{m}$ семейство $((-1)^{n-1}(y-1)^n/n)_{n \geqslant 1}$ суммируемо. Положим

$$\log y = \sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n-1} (y-1)^n/n. \tag{2}$$

Тогда $\exp(x) \in 1 + \mathfrak{m}$, и отображение $\log\colon 1 + \mathfrak{m} \to \mathfrak{m}$ называется *логарифмическим отображением* алгебры A.

Предложение 1. *Экспоненциальное отображение является гомеоморфизмом $\mathfrak{m}$ на $1 + \mathfrak{m}$, а логарифмическое отображение — обратным к нему гомеоморфизмом.*

Для любого $x \in A_\alpha$ выполняется $\frac{x^n}{n!} \in A_{n\alpha}$. Отсюда следует, что ряд, определяющий экспоненту, равномерно сходится в каждом из множеств A_α при $\alpha > 0$; так как A_α открыта в $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m} = \bigcup_{\alpha > 0} A_\alpha$, то экспоненциальное отображение непрерывно. Аналогично показывается, что непрерывно и логарифмическое отображение.

Пусть e и l — формальные ряды без свободного члена

$$e(X) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{X^n}{n!}, \quad l(X) = \sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n-1} X^n/n.$$

Известно, что $e(l(X)) = l(e(X)) = X$ в $\hat{A}(\{X\}) = K[[X]]$. (*Alg.*, chap. IV, § 6, n° 9, n$^{\text{elle}}$ ed). Используя подстановку (§ 5, n° 1), получаем, что $e(l(x)) = l(e(x)) = x$ для любого $x \in \mathfrak{m}$; так как

$$\exp(x) = e(x) + 1, \quad \log(1 + x) = l(x),$$

то

$$\log \exp x = x, \ \exp \log(1 + x) = 1 + x$$

для любого $x \in \mathfrak{m}$, откуда и следует предложение.

Замечания. 1) Если $x \in \mathfrak{m}$ и $y \in \mathfrak{m}$ и если x, y коммутируют, то $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ и семейство $\left(\frac{x^i}{i!}\frac{x^j}{j!}\right)_{i, j \in \mathbf{N}}$ суммируемо (*Alg.*, chap. IV, § 6, proposition 11).

2) Так как e и l — ряды без свободного члена и так как A_α — замкнутый идеал в A, то $\exp A_\alpha \subset 1 + A_\alpha$ и $\log(1 + A_\alpha) \subset A_\alpha$, откуда $\exp A_\alpha = 1 + A_\alpha$ и $\log(1 + A_\alpha) = A_\alpha$ для любого $\alpha > 0$.

3) Пусть B — ассоциативная фильтрованная алгебра с единицей, отделимая и полная, и $\mathfrak{n} = \bigcup_{\alpha > 0} B_\alpha$. Пусть f — непрерывный гомоморфизм алгебр с единицей A в B, такой, что $f(\mathfrak{m}) \subset \mathfrak{n}$. Тогда $f(\exp x) = \exp f(x)$ для любого $x \in \mathfrak{m}$ и $f(\log y) = \log f(y)$ для любого $y \in 1 + \mathfrak{m}$; докажем, например, первую из этих формул:

$$f(\exp x) = \sum_{n \geqslant 0} f(x^n)/n! = \sum_{n \geqslant 0} f(x)^n/n! = \exp f(x).$$

4) Пусть E — ассоциативная алгебра с единицей. Если a — нильпотентный элемент из E, то семейство $\left(\frac{a^n}{n!}\right)_{n \in \mathbf{N}}$ обладает конечным носителем и можно положить $\exp a = \sum_{n \geqslant 0} a^n/n!$ Говорят, что элемент b унипотентен, если $b - 1$ нильпотентен; положим тогда $\log b = \sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n-1} (b-1)^n/n$. Из соотношений $e(l(X)) = l(e(X)) = X$ легко вывести, что отображение $a \to \exp a$ множества нильпотентных элементов из E на множество унипотентных элементов из E биективно и что $b \mapsto \log b$ является обратным к нему отображением.

2. *Группа Хаусдорфа*

Пусть X — множество. Будем использовать обозначения § 5, n° 1 и 2. Отождествим свободную алгебру Ли $L(X)$ с ее каноническим образом в $A(X)$ (§ 3, n° 1, теорема 1). Обозначим через $\widehat{L}(X)$ замыкание $L(X)$ в $\widehat{A}(X)$, т. е. множество элементов из $\widehat{A}(x)$ вида $a = \sum_{n \geqslant 1} a_n$, где $a_n \in L^n(X)$ для любого $n \geqslant 0$; это фильтрованная подалгебра Ли алгебры $\widehat{A}(X)$.

Теорема 1. *Ограничение экспоненциального отображения $\widehat{A}(X)$ на $\widehat{L}(X)$ является биекцией $\widehat{L}(X)$ на замкнутую подгруппу группы Магнуса $\Gamma(X)$.*

Положим $A(X) = A$, $A^n(X) = A^n$, $\widehat{A}(X) = \widehat{A}$, $L^n(X) = L^n$, $\widehat{L}(X) = \widehat{L}$, $\Gamma(X) = \Gamma$. Пусть B — алгебра $A \otimes A$, наделенная градуировкой типа $\mathbf{N}$, которая определена формулой $B^n = \sum_{i+j=n} A^i \otimes A^j$. Пусть $\widehat{B} = \sum_{n \geqslant 0} B^n$ — полная фильтрованная алгебра, ассоциированная с B (*Комм. алг.*, гл. III, § 2, n° 12, *пример* 1). Копроизведение c: $A \to A \otimes A$, определенное в § 3, n° 1, следствие 1 теоремы 1, является градуированным степени 0 и поэтому продолжается непрерывным образом до гомоморфизма $\hat{c}$: $\widehat{A} \to \widehat{B}$, задаваемого формулой

$$\hat{c}\left(\sum_{n \geqslant 0} a_n\right) = \sum_{n \geqslant 0} c(a_n), \quad \text{где } a_n \in A^n.$$

Определим также непрерывные гомоморфизмы δ' и δ'' из $\widehat{A}$ в $\widehat{B}$ формулами

$$\delta'\left(\sum_{n \geqslant 0} a_n\right) = \sum_{n \geqslant 0} (a_n \otimes 1), \qquad \delta''\left(\sum_{n \geqslant 0} a_n\right) = \sum_{n \geqslant 0} (1 \otimes a_n),$$
$$\text{где } a_n \in A^n.$$

Согласно следствию 2 теоремы 1 из § 3, n° 1, L^n есть множество $a_n \in A^n$, таких, что $c(a_n) = a_n \otimes 1 + 1 \otimes a_n$. Отсюда следует, что $\widehat{L}$ есть множество $a \in \widehat{A}$, таких, что

$$\hat{c}(a) = \delta'(a) + \delta''(a). \tag{3}$$

Пусть Δ — множество $b \in \widehat{A}$ со свободным членом, равным 1, таких, что

$$\hat{c}(b) = \delta'(b) \,.\, \delta''(b), \tag{4}$$

или, иначе говоря, множество $b = \sum\limits_{n \geqslant 0} b_n$, таких, что $b_n \in A^n$ для любого $n \geqslant 0$, $b_0 = 1$ и $c(b_n) = \sum\limits_{i+j=n} b_i \otimes b_j$. Эта последняя характеризация показывает, что Δ является замкнутым подмножеством в Γ; так как $\hat{c}$, δ' и δ'' — гомоморфизмы колец и так как любой элемент из $\delta'(\widehat{A})$ коммутирует с любым элементом из $\delta''(\widehat{A})$, то ограничения на Γ отображений $\hat{c}$ и $\delta'\delta''$ являются гомоморфизмами групп, а Δ — подгруппой в Γ.

По предложению 1 n° 1 экспоненциальное отображение алгебры $\widehat{A}$ является биекцией множества $\widehat{A}^+$ элементов из $\widehat{A}$ без свободного члена на Γ. Пусть $a \in \widehat{A}^+$ и $b = \exp a$. Так как $\hat{c}$ — непрерывный гомоморфизм колец, то

$$\hat{c}(b) = \hat{c}\Big(\sum_{n \geqslant 0} a^n/n!\Big) = \sum_{n \geqslant 0} \hat{c}(a)^n/n! = \exp \hat{c}(a).$$

Аналогично доказываются соотношения

$$\delta'(b) = \exp \delta'(a), \quad \delta''(b) = \exp \delta''(a),$$

и так как $\delta'(a)$ коммутирует с $\delta''(a)$, то (n° 1, *замечание* 1)

$$\delta'(b)\,\delta''(b) = \exp(\delta'(a) + \delta''(a)).$$

Следовательно, a удовлетворяет (3) тогда и только тогда, когда b удовлетворяет (4), что и доказывает теорему.

Замечание. Предыдущее доказательство показывает, что $\exp(\widehat{L})$ — подгруппа Δ группы Γ, состоящая из таких b, которые удовлетворяют соотношению (4).

Таким образом, посредством экспоненциального отображения можно перенести групповое умножение из группы Δ на $\widehat{L}$. Иначе говоря, $\widehat{L}$ является полной топологической группой относительно закона композиции $(a, b) \longmapsto a \mapsto b$, задаваемого формулой

$$a \mapsto b = \log(\exp a \,.\, \exp b).$$

Таким образом определенная топологическая группа называется *группой Хаусдорфа* (над X относительно K).

Пусть g — гомоморфизм свободной группы $F = F(X)$ в Γ, такой, что $g(x) = \exp x$ для любого $x \in X$. Так как $\exp x - 1 - x = \sum_{n \geqslant 2} x^n/n!$ имеет порядок $\geqslant 2$, то g инъективен по теореме 1 из § 5, n° 3. Поэтому *отображение* $\log \circ g$ *является инъективным гомоморфизмом группы F в группу Хаусдорфа, продолжающим каноническое вложение* $X \to \widehat{L}$.

Для любого целого $m \geqslant 1$ обозначим через $\widehat{L}_m$ множество элементов порядка $\geqslant m$ из $\widehat{L}$ и через Γ_m — множество элементов $u \in \Gamma$, таких, что $u - 1$ имеет порядок $\geqslant m$. Имеем $\widehat{L}_m = \exp^{-1}(\Gamma_m)$ по *замечанию* 2 из n° 1; так как $(\Gamma_m)_{m \geqslant 1}$ — центральная фильтрация на Γ (§ 4, n° 5, предложение 2), то $(\widehat{L}_m)_{m \geqslant 1}$ — *целочисленная центральная фильтрация на группе* $\widehat{L}$.

3. Формальные ряды Ли

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — фильтрованная алгебра Ли* (§ 4, n° 1), $(\mathfrak{g}_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ — *ее фильтрация, и пусть* $\alpha \in \mathbf{R}$. *Если P — однородный многочлен Ли степени n от переменных* $(T_i)_{i \in I}$ (§ 2, n° 4), *то* $P((a_i)) \in \mathfrak{g}_{n\alpha}$ *для любого семейства* $(a_i)_{i \in I}$ *элементов из* $\mathfrak{g}_\alpha$.

Любой многочлен Ли степени $n \geqslant 2$ является конечной суммой членов степени n, имеющих вид $[Q, R]$, где Q и R имеют степень $< n$ (§ 2, n° 7, предложение 7). Отсюда лемма следует индукцией по n.

Назовем *формальным рядом Ли* [1]) (с коэффициентами из K) *от переменных* $(T_i)_{i \in I}$ любой элемент алгебры Ли $\widehat{L}((T_i)_{i \in I}) = \widehat{L}(I)$. Любой такой элемент единственным образом представляется в виде суммы суммируемого семейства $(u_\nu)_{\nu \in \mathbf{N}^{(I)}}$, где $u_\nu \in L^\nu(I)$.

Предположим, что I *конечно*. Пусть $\mathfrak{g}$ — фильтрованная алгебра Ли, полная и отделимая, причем $\mathfrak{g} = \bigcup_{\alpha > 0} \mathfrak{g}_\alpha$; пусть $\boldsymbol{t} = (t_i)_{i \in I}$ — семейство элементов $\mathfrak{g}$.

Предложение 2. *Гомоморфизм* f_t: $L(I) \to \mathfrak{g}$, *такой, что* $f_t(T_i) = t_i$ (§ 2, n° 4), *продолжается до единственного непрерывного гомоморфизма* $\widehat{f}_t$ *алгебры* $\widehat{L}(I)$ *в* $\mathfrak{g}$.

---

[1]) Формальный ряд Ли не является, вообще говоря, формальным рядом в смысле определения из *Алг.*, гл. IV, § 5.

В самом деле, существует $\alpha > 0$, такое, что $t_i \in \mathfrak{g}_\alpha$ для любого $i \in I$; тогда $f_t(L^\nu(I)) \subset \mathfrak{g}_{|\nu|\alpha}$ для любого ν (лемма 1), что и доказывает непрерывность f_t. Ч. Т. Д.

Если $u \in \widehat{L}(I)$, то положим $u((t_i)) = \hat{f}_t(u)$. В частности, беря $\mathfrak{g} = \widehat{L}(I)$, получим $u = u((T_i))$; в общем случае говорят, что $u((t_i))$ является результатом подстановки t_i вместо T_i в формальный ряд Ли $u((T_i))$. Если $u = \sum_{\nu \in \mathbf{N}^{(I)}} u_\nu$, где $u_\nu \in L^\nu(X)$, то семейство $(u_\nu((t_i)))_{\nu \in \mathbf{N}^{(I)}}$ суммируемо и

$$u((t_i)) = \sum_{\nu \in \mathbf{N}^{(I)}} u_\nu((t_i)). \tag{5}$$

Пусть σ — непрерывный гомоморфизм $\mathfrak{g}$ в фильтрованную алгебру Ли $\mathfrak{g}'$, полную, отделимую и такую, что $\mathfrak{g}' = \bigcup_{\alpha > 0} \mathfrak{g}'_\alpha$. Для любого *конечного* семейства $\boldsymbol{t} = (t_i)_{i \in I}$ элементов $\mathfrak{g}$ и любого $u \in \widehat{L}(I)$ имеем

$$\sigma(u((t_i))) = u((\sigma(t_i))), \tag{6}$$

так как гомоморфизм $\sigma \circ \hat{f}_t$ непрерывен и отображает T_i на $\sigma(t_i)$ для любого $i \in I$.

Пусть $\boldsymbol{u} = (u_j)_{j \in J}$ — *конечное* семейство элементов из $\widehat{L}(I)$, и пусть $v \in \widehat{L}(J)$; подставляя u_j вместо T_j в v, получим элемент $w = v((u_j)_{j \in J})$ алгебры $\widehat{L}(I)$, обозначаемый через $v \circ \boldsymbol{u}$. Тогда

$$w((t_i)_{i \in I}) = v((u_j((t_i)_{i \in I}))_{j \in J}) \tag{7}$$

для любого *конечного* семейства $\boldsymbol{t} = (t_i)_{i \in I}$ элементов $\mathfrak{g}$, в чем легко убедиться, преобразуя непрерывным гомоморфизмом $\hat{f}_t$ равенство $w = v((u_j)_{j \in J})$.

Пусть $u = \sum_{\nu \in \mathbf{N}^I} u_\nu \in \widehat{L}(I)$, причем $u_\nu \in L^\nu(I)$. Отображение $\tilde{u}$: $(t_i) \mapsto u((t_i))$ алгебры $\mathfrak{g}^I$ в $\mathfrak{g}$ *непрерывно*: в самом деле, в каждом из открытых множеств $\mathfrak{g}_\alpha$ при любом $\alpha > 0$ семейство $\tilde{u}_\nu$ равномерно суммируемо, так что достаточно показать, что каждое $\tilde{u}_\nu$ непрерывно, что непосредственно доказывается индукцией по $|\nu|$.

4. *Ряд Хаусдорфа*

Пусть $\{U, V\}$ — множество, состоящее из двух элементов.

Определение 1. *Элемент* $H = U \mathbin{\text{⊢⊣}} V = \log(\exp U \,.\, \exp V)$ (n° 2) *алгебры Ли* $\widehat{L}_{\mathbf{Q}}(\{U, V\})$ *называется рядом Хаусдорфа от переменных* U *и* V.

Обозначим через H_n (соотв. $H_{r,s}$) компоненту полной степени n (соотв. полистепени (r, s)) ряда H. Имеем:

$$H = \sum_{n \geqslant 0} H_n = \sum_{r,\, s \geqslant 0} H_{r,s}, \quad H_n = \sum_{\substack{r+s=n \\ r,\, s \geqslant 0}} H_{r,s}. \tag{8}$$

Теорема 2. *Если r и s — два положительных целых числа, таких, что $r + s \geqslant 1$, то $H_{r,s} = H'_{r,s} + H''_{r,s}$, где*

$$(r+s) H'_{r,s} =$$
$$= \sum_{m \geqslant 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{\substack{r_1 + \ldots + r_m = r \\ s_1 + \ldots + s_{m-1} = s-1 \\ r_1 + s_1 \geqslant 1, \ldots, r_{m-1} + s_{m-1} \geqslant 1}} \left(\left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{(\operatorname{ad} U)^{r_i}}{r_i!} \frac{(\operatorname{ad} V)^{s_i}}{s_i!} \right) \frac{(\operatorname{ad} U)^{r_m}}{r_m!} \right)(V), \tag{9}$$

$$(r+s) H''_{r,s} =$$
$$= \sum_{m \geqslant 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{\substack{r_1 + \ldots + r_{m-1} = r-1 \\ s_1 + \ldots s_{m-1} = s \\ r_1 + s_1 \geqslant 1, \ldots, r_{m-1} + s_{m-1} \geqslant 1}} \left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{(\operatorname{ad} U)^{r_i}}{r_i!} \frac{(\operatorname{ad} V)^{s_i}}{s_i!} \right)(U). \tag{10}$$

В $\widehat{A}_{\mathbf{Q}}(\{U, V\})$ верно равенство $\exp U \exp V = 1 + W$, где $W = \sum_{r+s \geqslant 1} \frac{U^r}{r!} \frac{V^s}{s!}$, откуда $H = \sum_{m \geqslant 1} (-1)^{m-1} W^m/m$ (n° 2), т. е.

$$H_{r,s} = \sum_{m \geqslant 1} \frac{(-1)^{m-1}}{m} \sum_{\substack{r_1 + \ldots + r_m = r \\ s_1 + \ldots + s_m = s \\ r_1 + s_1 \geqslant 1, \ldots, r_m + s_m \geqslant 1}} \prod_{i=1}^{m} \frac{U^{r_i}}{r_i!} \frac{V^{s_i}}{s_i!}. \tag{11}$$

Линейное отображение P_n, определенное формулой

$$P_n(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n} \left(\prod_{i=1}^{n-1} (\operatorname{ad} x_i) \right)(x_n)$$

для любых $n \geqslant 1$ и $x_1, \ldots, x_n$ из $\{U, V\}$, является проектированием $A^n_{\mathbf{Q}}(\{U, V\})$ на $L^n_{\mathbf{Q}}(\{U, V\})$ (§ 3, n° 2, следствие предложения 1); так как $H_{r,s}$ принадлежит $L^{r+s}_{\mathbf{Q}}(\{U, V\})$, то $H_{r,s} = P_{r+s}(H_{r,s})$. В то же время

$$P_{r+s} \left(\prod_{i=1}^{m} \frac{U^{r_i}}{r_i!} \frac{V^{s_i}}{s_i!} \right) =$$
$$= \frac{1}{r+s} \left(\left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{(\operatorname{ad} U)^{r_i}}{r_i!} \frac{(\operatorname{ad} V)^{s_i}}{s_i!} \right) \frac{(\operatorname{ad} U)^{r_m}}{r_m!} \frac{(\operatorname{ad} V)^{s_m - 1}}{s_m!} \right)(V), \tag{12}$$

если $s_m \geqslant 1$, и

$$P_{r+s}\left(\prod_{i=1}^{m} \frac{U^{r_i}}{r_i!}\frac{V^{s_i}}{s_i!}\right) = \frac{1}{r+s}\left(\left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{(\operatorname{ad} U)^{r_i}}{r_i!}\frac{(\operatorname{ad} V)^{s_i}}{s_i!}\right)\frac{(\operatorname{ad} U)^{r_m-1}}{r_m!}\right)(U), \tag{13}$$

если $r_m \geqslant 1$ и $s_m = 0$. Более того, очевидно, что $(\operatorname{ad} t)^{p-1}.t = 0$, если $p \geqslant 2$ и $(\operatorname{ad} t)^0.t = t$. Поэтому обе части равенства (12) равны нулю, если $s_m \geqslant 2$, и то же верно для (13), если $r_m \geqslant 2$. Отсюда следует теорема, ибо $H'_{r,s}$ равно сумме членов типа (12), а $H''_{r,s}$ — сумме членов типа (13). Ч. Т. Д.

Замечания.

1) Мы определили (§ 3, n° 2, *замечание*) проектирование Q модуля $A(X)$ на $L(X)$, такое, что $Q(a^m) = 0$ для любого $a \in L(X)$ и любого $m \geqslant 2$, и $Q(1) = 0$. Тогда $H = Q(\exp H) = Q(\exp U . \exp V)$, откуда немедленно следует, что

$$H_{r,s} = Q\left(\frac{U^r}{r!}\frac{V^s}{s!}\right), \text{ если } r+s \geqslant 1. \tag{14}$$

2) В частности,

$$H(U, V) \equiv U + V + \frac{1}{2}[U, V] + \frac{1}{12}[U, [U, V]] + \\ + \frac{1}{12}[V, [V, U]] - \frac{1}{24}[U, [V, [U, V]]] \tag{15}$$

по модулю $\sum_{n \geqslant 5} L^n(\{U, V\})$.

3) $H_{0,n} = H_{n,0} = 0$ для любого целого $n \neq 1$, так что

$$H(U, 0) = H(0, U) = U. \tag{16}$$

С другой стороны, так как $[U, -U] = 0$, то

$$H(U, -U) = 0. \tag{17}$$

5. *Подстановки в ряд Хаусдорфа*

Так как K — поле, содержащее $\mathbf{Q}$, то ряд Хаусдорфа можно рассматривать как формальный ряд Ли с коэффициентами в K. Следовательно, если $\mathfrak{g}$ — фильтрованная алгебра Ли, полная, отделимая и такая, что $\mathfrak{g} = \bigcup_{\alpha > 0} \mathfrak{g}_\alpha$, то любые a, b из $\mathfrak{g}$ можно подставить вместо U и V в H (см. n° 3 и § 2, n° 5, *замечание*).

В частности, пусть A — ассоциативная фильтрованная алгебра с единицей, отделимая и полная. Положим $\mathfrak{m} = \bigcup_{\alpha > 0} A_\alpha$ и

$\mathfrak{m}_\alpha = A_\alpha \cap \mathfrak{m}$ для любого $\alpha \in \mathbf{R}$; имеем $\mathfrak{m}_\alpha = A_\alpha$ при $\alpha > 0$ и $\mathfrak{m}_\alpha = \mathfrak{m}$ при $\alpha < 0$. Относительно операции коммутирования $[a, b] = ab - ba$ $\mathfrak{m}$ является фильтрованной алгеброй Ли, полной и отделимой, к которой можно применить предыдущее. В этих обозначениях имеем следующий результат, дополняющий предложение 1 из n° 1.

Предложение 3. *Если* $a \in \mathfrak{m}$, $b \in \mathfrak{m}$, *то* $\exp H(a, b) = \exp a \,.\, \exp b$.

Пусть a, b — элементы $\mathfrak{m}$; существует $\alpha > 0$, такое, что $a \in A_\alpha$ и $b \in A_\alpha$. Следовательно, существует непрерывный гомоморфизм θ алгебры Магнуса $\widehat{A}(\{U, V\})$ в A, отображающий U на a и V на b (§ 5, n° 1, предложение 1).

Ограничение θ на $\widehat{L}(\{U, V\})$ является непрерывным гомоморфизмом алгебры Ли $\widehat{L}(\{U, V\})$ в $\mathfrak{m}$, отображающим U (соотв. V) на a (соотв. b). По формуле (6) из n° 3 получаем $\theta(H) = H(a, b)$. Достаточно теперь применить гомоморфизм θ к обеим частям равенства $\exp H(U, V) = \exp U \,.\, \exp V$ и принять во внимание *замечание* 3 из n° 1.

Замечание 1. Если a и b коммутируют, то $H_{r,s}(a, b) = 0$ при $r + s \geqslant 2$, так как однородный многочлен Ли степени $\geqslant 2$ равен нулю на (a, b). Следовательно, $H(a, b) = a + b$, так что предложение 3 позволяет еще раз получить формулу $\exp(a+b) = \exp a \,.\, \exp b$.

Предложение 4. *Пусть* $\mathfrak{g}$ — *фильтрованная алгебра Ли, полная и отделимая, причем* $\mathfrak{g} = \bigcup_{\alpha > 0} \mathfrak{g}_\alpha$. *Отображение* $(a, b) \mapsto H(a, b)$ *является групповым законом на* $\mathfrak{g}$, *совместимым с топологией на* $\mathfrak{g}$, *относительно которого* 0 — *единичный элемент*, a — $-a$ — *обратный к* a *при любом* $a \in \mathfrak{g}$.

Отображение $(a, b) \mapsto H(a, b)$ множества $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}$ непрерывно (n° 3); так как отображение $a \mapsto -a$, очевидно, непрерывно, то достаточно проверить соотношения

$$H(H(a, b), c) = H(a, H(b, c)), \tag{18}$$

$$H(a, -a) = 0, \tag{19}$$

$$H(a, 0) = H(0, a) = a, \tag{20}$$

где a, b, c — произвольные элементы из $\mathfrak{g}$. По формуле (7) из n° 3 достаточно показать справедливость этих формул в случае, когда a, b, c — переменные, а $\mathfrak{g} = \widehat{L}(\{a, b, c\})$. Однако ограничение экспоненциального отображения на $\widehat{L}(\{a, b, c\})$ является инъекцией в алгебру Магнуса $\widehat{A}(\{a, b, c\})$ и по предложению 3

имеем

$$\begin{gathered}\exp H(H(a,\ b),\ c)=\exp H(a,\ b)\,.\exp c=\exp a\,.\exp b\,.\exp c,\\ \exp H(a,\ H(b,\ c))=\exp a\,.\exp H(b,\ c)=\exp a\,.\exp b\,.\exp c,\\ \exp H(a,\ -a)=\exp a\,.\exp(-a)=\exp(a-a)=\exp 0,\\ \exp H(a,\ 0)=\exp a\,.\exp 0=\exp a,\\ \exp H(0,\ a)=\exp 0\,.\exp a=\exp a.\end{gathered}$$

Это доказывает соотношения с (18) до (20).

Замечания.

2. Возьмем в качестве $\mathfrak{g}$ алгебру Ли $\widehat{L}(X)$. Групповой закон, вводимый на ней предыдущим предложением, совпадает с групповым законом, определенным в n° 2. Иначе говоря,

$$a \mapsto\!\!\dashv b = H(a,\ b) \quad \text{для любых } a,\ b \text{ из } \widehat{L}(X), \tag{21}$$

т. е. умножение в группе Хаусдорфа задается рядом Хаусдорфа.

3. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, наделенная целочисленной фильтрацией, определенной нижним центральным рядом $(\mathscr{C}^n\mathfrak{g})$. Предположим, что существует $m \geqslant 1$, такое, что $\mathscr{C}^m\mathfrak{g}=\{0\}$. В топологии, определенной этой фильтрацией $(\mathscr{C}^n\mathfrak{g})_{n\geqslant 1}$, алгебра Ли $\mathfrak{g}$ отделима, полна, а также дискретна. Имеем $P(a_1,\ \ldots,\ a_r)=0$ для любых $a_1,\ \ldots,\ a_r$ из $\mathfrak{g}$ и любого однородного многочлена Ли P степени $\geqslant m$; в частности, $H_{r,s}(a,\ b)=0$ при $r+s\geqslant m$ и ряд $H(a,b)=\sum\limits_{r,\ s} H_{r,s}(a,\ b)$ состоит лишь из конечного числа ненулевых членов. Групповой закон $(a,\ b)\mapsto H(a,\ b)$ на $\mathfrak{g}$ является, таким образом, полиномиальным (§ 2, n° 4).

Предложение 5. *Пусть $K_{r,s}$ — компонента полистепени $(r,\ s)$ ряда $H(U+V,\ -U)$. Тогда*

$$K_{n,1}(U,\ V)=\frac{1}{(n+1)!}(\operatorname{ad}U)^n(V) \quad \textit{для любого } n\geqslant 0.$$

В самом деле, положим $K(U,\ V)=H(U+V,\ -U)$, $K_1(U,\ V)=\sum\limits_{n\geqslant 0} K_{n,1}(U,\ V)$. Обозначим через L (соотв. R) левое (соотв. правое) умножение на U в $\widehat{A}(\{U,\ V\})$.

Можно записать

$$\begin{aligned} e^U V e^{-U} &= \sum_{p,\ q}\frac{U^p}{p!}V\frac{(-U)^q}{q!}=\\ &=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}\Big(\sum_{p+q=n}\frac{n!}{p!q!}(L^p(-R)^q\,.\,V)\Big)=\\ &=\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{n!}(L-R)^n\,.\,V\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$e^U V e^{-U} = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{n!} (\operatorname{ad} U)^n V. \tag{22}$$

Будем далее производить вычисления по модулю идеала $\sum_{m \geqslant 0} \sum_{n \geqslant 2} A^{m, n}(\{U, V\})$ алгебры $\hat{A}(\{U, V\})$. Для любого $n \geqslant 1$ получим

$$(U + V)^n \equiv U^n + \sum_{i=1}^{n-1} U^i V U^{n-i-1},$$

откуда

$$\begin{aligned}(\operatorname{ad} U)(U + V)^n &\equiv \left((L - R) \sum_{i=1}^{n-1} L^i R^{n-i}\right) \cdot V \equiv \\ &\equiv (L^n - R^n) \cdot V \equiv \\ &\equiv U^n V - V U^n.\end{aligned}$$

Следовательно, суммированием по n получаем

$$(\operatorname{ad} U) . e^{U+V} \equiv e^U V - V e^U. \tag{23}$$

Кроме того, $K_1(U, V) \equiv K(U, V)$ и $e^{K_1(U, V)} \equiv 1 + K_1(U, V)$, так что по предложению 3

$$K_1 \equiv e^K - 1 \equiv e^{U+V} e^{-U} - 1.$$

Отсюда, далее, выводим

$$\begin{aligned}(\operatorname{ad} U) K_1 &\equiv U e^{U+V} e^{-U} - e^{U+V} e^{-U} U \equiv (U e^{U+V} - e^{U+V} U) e^{-U} \equiv \\ &\equiv (e^U V - V e^U) e^{-U} \quad \text{по (23)} \equiv \\ &\equiv e^U V e^{-U} - V \equiv \\ &\equiv \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n!} (\operatorname{ad} U)^n V \quad \text{по (22)} \equiv \\ &\equiv (\operatorname{ad} U) \left(\sum_{n \geqslant 0} \frac{(\operatorname{ad} U)^n}{(n+1)!} V \right).\end{aligned}$$

Теперь остается применить *замечание* из § 2, n° 11.

§ 7. Сходимость ряда Хаусдорфа (вещественный или комплексный случай)

В этом параграфе мы будем предполагать, что K — одно из полей $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, наделенное обычным абсолютным значением. Напомним, что нормируемой алгеброй над K называется

алгебра A (не обязательно ассоциативная) над K, наделенная топологией $\mathcal{T}$, обладающей следующими свойствами:

1) $\mathcal{T}$ может быть определена при помощи нормы;

2) отображение $(x, y) \mapsto xy$ пространства $A \times A$ в A непрерывно.

Нормированной алгеброй над K называется алгебра A над K, в которой введена норма, такая, что $\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ для любых x, y из A.

Обозначим через $\mathfrak{g}$ полную нормируемую алгебру над K. Выберем в $\mathfrak{g}$ некоторую норму и число $M > 0$, такое, что

$$\|[x, y]\| \leqslant M \|x\| \|y\| \quad \text{для любых } x, y \text{ из } \mathfrak{g}. \tag{1}$$

1. *Непрерывные многочлены со значениями в* $\mathfrak{g}$

Пусть I — конечное множество, и пусть $P(\mathfrak{g}^I; \mathfrak{g})$ (соотв. $\widehat{P}(\mathfrak{g}^I; \mathfrak{g})$) — векторное пространство *непрерывных многочленов* (соотв. *формальных рядов с непрерывными составляющими*) на $\mathfrak{g}^I$ со значениями в $\mathfrak{g}$. Напомним (*Мн. Св. рез.*, приложение), что $\widehat{P}(\mathfrak{g}^I; \mathfrak{g})$ наделено градуировкой типа $\mathbf{N}^I$ и что $\widehat{P}(\mathfrak{g}^I; \mathfrak{g})$ отождествляется с пополнением векторного пространства $P(\mathfrak{g}^I; \mathfrak{g})$ относительно топологии, определенной фильтрацией, ассоциированной с этой градуировкой $P(\mathfrak{g}^I; \mathfrak{g})$. Более того, $P(\mathfrak{g}^I; \mathfrak{g})$ является градуированной алгеброй Ли относительно коммутирования, определенного формулой $[f, g](\boldsymbol{x}) = [f(\boldsymbol{x}), g(\boldsymbol{x})]$ для любых f, g из $P(\mathfrak{g}^I; \mathfrak{g})$, $\boldsymbol{x} \in \mathfrak{g}^I$; эта структура алгебры Ли по непрерывности переносится на $\widehat{P}(\mathfrak{g}^I; \mathfrak{g})$ и превращает ее в фильтрованную алгебру Ли, полную и отделимую.

По предложению 2 из § 6, n° 3, существует единственный непрерывный гомоморфизм φ_I: $u \mapsto \tilde{u}$ алгебры Ли $\widehat{L}(I)$ в $\widehat{P}(\mathfrak{g}^I; \mathfrak{g})$, отображающий переменную с индексом i для любого $i \in I$ на pr_i, так как $\mathrm{pr}_i \in P(\mathfrak{g}^I; \mathfrak{g})$. Отсюда следует, что $\tilde{u} \in P(\mathfrak{g}^I; \mathfrak{g})$ для любого $u \in L(I)$; более точно, если $u \in L(I)$, то $\tilde{u}$ есть не что иное, как полиномиальное отображение $(t_i) \mapsto u((t_i))$ из § 2, n° 4. С другой стороны, ясно, что φ_I совместимо с полиградуировкой $L(I)$ и $P(\mathfrak{g}^I; \mathfrak{g})$. Если $u = \sum_{\nu \in \mathbf{N}^I} u_\nu$, где $u_\nu \in L^\nu(I)$ для любого $\nu \in \mathbf{N}^I$, то

$$\tilde{u} = \sum_{\nu \in \mathbf{N}^I} \tilde{u}_\nu, \quad \text{где} \quad \tilde{u}_\nu \in P_\nu(\mathfrak{g}^I; \mathfrak{g}).$$

Пусть $\mathbf{u} = (u_j)_{j \in J}$ — *конечное* семейство элементов $\widehat{L}(I)$, $v \in \widehat{L}(J)$ и $w = v \circ \mathbf{u}$ (§ 6, n° 3). Положим $\tilde{\mathbf{u}} = (\tilde{u}_j)_{j \in J}$. Тогда

$$\tilde{v} \circ \tilde{\mathbf{u}} = (v \circ \mathbf{u})^{\sim}. \tag{2}$$

Это следует продолжением по непрерывности формулы (7) из n° 3 § 6 и (*Мн. Св. рез.*, приложение, n° 6).

2. *Групускула, определенная полной нормированной алгеброй Ли*

Пусть $H = \sum_{r,\, s \geqslant 0} H_{r,\, s} \in \hat{L}(\{U,\ V\})$ — ряд Хаусдорфа (§ 6, n° 4, определение 1). Покажем, что соответствующий формальный ряд

$$\tilde{H} = \sum_{r,\, s \geqslant 0} \tilde{H}_{r,\, s} \in \hat{P}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g};\ \mathfrak{g}) \tag{3}$$

сходится (*Мн. Св. рез.*, 3.1.1).

Введем следующий формальный ряд $\eta \in \mathbf{Q}[[U,\ V]]$:

$$\eta(U,\ V) = -\log(2 - \exp(U + V)) = \tag{4}$$

$$= \sum_{m \geqslant 1} \frac{1}{m} (\exp(U + V) - 1)^m = \tag{5}$$

$$= \sum \frac{1}{m} \sum_{\substack{r_1,\ \ldots,\ r_m \\ s_1,\ \ldots,\ s_m \\ r_i + s_i \geqslant 1}} \frac{U^{r_1}}{r_1!} \frac{V^{s_1}}{s_1!} \frac{U^{r_2}}{r_2!} \cdots \frac{V^{s_m}}{s_m!}. \tag{6}$$

Отсюда

$$\eta(U,\ V) = \sum_{r,\, s \geqslant 0} \eta_{r,\, s} U^r V^s, \tag{7}$$

где

$$\eta_{r,\, s} = \sum_{m \geqslant 1} \frac{1}{m} \sum_{\substack{r_1 + \ldots + r_m = r \\ s_1 + \ldots + s_m = s \\ r_i + s_i \geqslant 1}} \frac{1}{r_1! \ldots r_m!\, s_1! \ldots s_m!}. \tag{8}$$

Пусть u и v — два вещественных положительных числа, таких, что $u + v < \log 2$; имеем $0 \leqslant \exp(u + v) - 1 < 1$; ряды, получающиеся из (5) и (6) подстановкой u вместо U и v вместо V, сходятся, и из предыдущих вычислений следует, что

$$\sum_{r,\, s \geqslant 0} \eta_{r,\, s} u^r v^s = -\log(2 - \exp(u + v)) < +\infty. \tag{9}$$

Пусть $r,\ s \geqslant 0$, и пусть $\| \tilde{H}_{r,\, s} \|$ — норма непрерывного многочлена $H_{r,\, s}$ (*Мн. Св. рез.*, приложение, n° 2).

Лемма 1. $\|H_{r,s}\| \leqslant M^{r+s-1}\eta_{r,s}$.

Пусть r_i, $s_i \in \mathbf{N}$ для $1 \leqslant i \leqslant m$, причем $s_m = 1$; положим $r = \sum_i r_i$, $s = \sum_i s_i$ и рассмотрим следующий элемент из $L(\{U, V\})$:

$$Z = \left(\left(\prod_{i=1}^{m-1} (\operatorname{ad} U)^{r_i} (\operatorname{ad} V)^{s_i}\right) (\operatorname{ad} U)^{r_m}\right)(V).$$

Имеем $\tilde{Z} = f \circ p$, где f есть $(r+s)$-линейное отображение $\mathfrak{g}^{r+s}$ в $\mathfrak{g}$: $(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s) \mapsto$

$$\mapsto \left(\operatorname{ad}(x_1) \circ \ldots \circ \operatorname{ad}(x_{r_1}) \circ \operatorname{ad}(y_1) \circ \ldots \circ \operatorname{ad}(y_{s_1}) \circ \operatorname{ad}(x_{r_1+1}) \circ \ldots \right.$$
$$\left. \ldots \circ \operatorname{ad}(x_r)\right)(y_s),$$

а p — отображение $\mathfrak{g}^2$ в $\mathfrak{g}^{r+s}$:

$$(x, y) \mapsto (\underbrace{x, \ldots, x}_{r}, \underbrace{y, \ldots, y}_{s});$$

поэтому $\|\tilde{Z}\| \leqslant \|f\| \leqslant M^{r+s-1}$ (*Мн. Св. рез.*, приложение). Применяя эту оценку к различным членам правой части формулы (9) из n° 4 § 4, получим

$$\|(H'_{r,s})^{\sim}\| \leqslant \frac{M^{r+s-1}}{r+s} \sum_{m \geqslant 1} \frac{1}{m} \sum_{\substack{r_1 + \ldots + r_m = r \\ s_1 + \ldots + s_{m-1} = s-1 \\ r_1 + s_1 \geqslant 1, \ldots, r_{m-1} + s_{m-1} \geqslant 1}} \frac{1}{r_1! \ldots r_m! \, s_1! \ldots s_{m-1}!}. \quad (10)$$

Рассуждая аналогичным образом, приходим к неравенству

$$\|(H''_{r,s})^{\sim}\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{M^{r+s-1}}{r+s} \sum_{m \geqslant 1} \frac{1}{m} \sum_{\substack{r_1 + \ldots + r_{m-1} = r-1 \\ s_1 + \ldots + s_{m-1} = s \\ r_1 + s_1 \geqslant 1, \ldots, r_{m-1} + s_{m-1} \geqslant 1}} \frac{1}{r_1! \ldots r_{m-1}! \, s_1! \ldots s_{m-1}!}, \quad (11)$$

откуда, согласно (8),

$$\|\tilde{H}_{r,s}\| \leqslant \eta_{r,s} \frac{M^{r+s-1}}{r+s} \leqslant \eta_{r,s} M^{r+s-1},$$

что и доказывает лемму.

Предложение 1. *Формальный ряд $\tilde{H}$ является сходящимся* (*Мн. Св. рез.*, 3.1.1), *его область абсолютной сходимости* (*Мн. Св. рез.*, 3.1.4) *содержит открытое множество*

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \,\middle|\, \|x\| + \|y\| < \frac{1}{M} \log 2 \right\}.$$

В самом деле, пусть u, v — вещественные числа >0, такие, что $u+v<\frac{1}{M}\log 2$; по лемме 1

$$M\sum_{r,\,s\geqslant 0}\|\widetilde{H}_{r,\,s}\|u^r v^s\leqslant\sum_{r,\,s\geqslant 0}\eta_{r,\,s}M^{r+s}u^r v^s=$$
$$=-\log(2-\exp M(u+v))<+\infty,\qquad(12)$$

причем последнее неравенство следует из (9).

Обозначим через $h\colon\Omega\to\mathfrak{g}$ *аналитическую функцию* (*Мн. Св. рез.*, 3.2.9), определенную при помощи $\widetilde{H}$, т. е. формулой

$$h(x,\,y)=\sum_{r,\,s\geqslant 0}\widetilde{H}_{r,\,s}(x,\,y)=\sum_{r,\,s\geqslant 0}H_{r,\,s}(x,\,y)\quad\text{для}\quad(x,\,y)\in\Omega.\qquad(13)$$

Эта функция называется *функцией Хаусдорфа* алгебры $\mathfrak{g}$ относительно M (или просто функцией Хаусдорфа, если это не может привести к недоразумению). Заметим, что $H_{r,\,s}(U,\,-U)=0$ для любых $r+s\geqslant 2$, так что

$$h(x,\,-x)=0\quad\text{при}\quad\|x\|\leqslant\frac{1}{2M}\log 2.\qquad(14)$$

Аналогично

$$h(0,\,x)=h(x,\,0)=x\quad\text{при}\quad\|x\|<\frac{1}{M}\log 2.\qquad(15)$$

Предложение 2. *Пусть*

$$\Omega'=\left\{(x,\,y,\,z)\in\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\;\middle|\;\|x\|+\|y\|+\|z\|<\frac{1}{M}\log\frac{3}{2}\right\}.$$

Если $(x,\,y,\,z)\in\Omega'$, *то*

$$(x,\,y)\in\Omega,\quad(h(x,\,y),\,z)\in\Omega,\quad(y,\,z)\in\Omega,\quad(x,\,h(y,\,z))\in\Omega\qquad(16)$$

и

$$h(h(x,\,y),\,z)=h(x,\,h(y,\,z)).\qquad(17)$$

Пусть $(x,\,y,\,z)\in\Omega'$; ясно, что $(x,\,y)\in\Omega$ и что $(y,\,z)\in\Omega$. Более того,

$$\|h(x,\,y)\|\leqslant\sum_{r,\,s}\|\widetilde{H}_{r,\,s}\|\|x\|^r\|y\|^s,$$

поэтому вследствие (13)

$$\|h(x,\,y)\|\leqslant-\frac{1}{M}\log(2-\exp M(\|x\|+\|y\|)).$$

Однако $M(\|x\|+\|y\|) < \log\frac{3}{2} - M\|z\|$; положим $u = \exp(M\|z\|)$; тогда $1 \leqslant u \leqslant \frac{3}{2}$ и

$$M(\|h(x, y)\|+\|z\|) < -\log\left(2 - \exp\left(\log\frac{3}{2} - M\|z\|\right)\right) + M\|z\| =$$

$$= -\log\left(2 - \frac{3}{2u}\right) + \log u = \log\frac{2u^2}{4u-3} =$$

$$= \log\left(2 + \frac{2(u-1)(u-3)}{4u-3}\right) \leqslant \log 2.$$

Аналогично убеждаемся в том, что $(x, h(y, z)) \in \Omega$.

Докажем теперь (17). В алгебре Ли $\hat{L}(\{U, V, W\})$ выполняется равенство

$$H(H(U, V), W) = H(U, H(V, W))$$

вследствие предложения 4 из n° 5 § 6. По формуле (2) из n° 1 получаем, что в $\tilde{P}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}; \mathfrak{g})$ выполняется соотношение

$$\tilde{H}\circ(\tilde{H}\times \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}) = \tilde{H}\circ(\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}\times\tilde{H}).$$

Согласно п. 3.1.9 из *Мн. Св. рез.*, существует число $\varepsilon > 0$, такое, что формула (17) верна, как только $\|x\|$, $\|y\|$ и $\|z\| \leqslant \varepsilon$. Однако функции $(x, y, z) \mapsto h(h(x, y), z)$ и $(x, y, z) \mapsto h(x, h(y, z))$ — аналитические функции на Ω' со значениями в $\mathfrak{g}$ (*Мн. Св. рез.*, 3.2.7). Так как Ω' связно и так как они совпадают в окрестности нуля, то они равны (*Мн. Св. рез.*, 3.2.5).

Из полученных результатов вытекает следующее.

Пусть α — вещественное число, такое, что $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{3M}\log\frac{3}{2}$. Пусть $G = \{x \in \mathfrak{g} \mid \|x\| < \alpha\}$, $\Theta = \{(x, y) \in G\times G \mid h(x, y) \in G\}$ и $m\colon \Theta \to G$ — ограничение h на Θ. Тогда:

1) Θ открыто в $G\times G$ и m аналитично;

2) $x \in G$ влечет за собой $(0, x) \in \Theta$, $(x, 0) \in \Theta$ и $m(0, x) = m(x, 0) = x$;

3) $x \in G$ влечет за собой $-x \in G$, $(x, -x) \in \Theta$, $(-x, x) \in \Theta$ и $m(x, -x) = m(-x, x) = 0$;

4) пусть x, y, z — элементы G, такие, что $(x, y) \in \Theta$, $(m(x, y), z) \in \Theta$, $(y, z) \in \Theta$ и $(x, m(y, z)) \in \Theta$. Тогда $m(m(x, y), z) = m(x, m(y, z))$.

* *Иначе говоря* (гл. III, § 1), *если положить* $-x = \sigma(x)$, *то четверка* $(G, 0, \sigma, m)$ *является групускулой Ли над* K. *

3. Экспоненциальное отображение в полных нормированных ассоциативных алгебрах

В этом пункте A — *полная нормированная ассоциативная алгебра с единицей* (*Общ. топ.*, *гл.* IX, § 3, n° 7). Поэтому $\|xy\| \leqslant \|x\| \|y\|$ для любых x, y из A.

Пусть I — конечное множество и $\widehat{P}(A^I; A)$ — векторное пространство *формальных степенных рядов с непрерывными членами* на A^I со значениями в A (*Мн. Св. рез.*, приложение, n° 5), наделенное структурой алгебры по правилу $f \cdot g = m \circ (f, g)$ для любых f, g из $\widehat{P}(A^I, A)$, где m: $A \times A \to A$ обозначает умножение в A. Рассуждая как в n° 1 и используя предложение 1 из n° 1 § 5, можно определить непрерывный гомоморфизм алгебр с единицей $u \mapsto \tilde{u}$ из $\widehat{A}(I)$ в $\widehat{P}(A^I; A)$, отображая переменную с индексом i на pr_i; этот гомоморфизм продолжает гомоморфизм алгебры Ли $\widehat{L}(I)$ в $\widehat{P}(A^I; A)$, определенный в n° 1. Если $u = \sum_{\nu} u_\nu$, где $u_\nu \in A^\nu(I)$ для любого $\nu \in \mathbf{N}^I$, то $\tilde{u} = \sum_{\nu} \tilde{u}_\nu$, где $\tilde{u}_\nu$ — полиномиальное отображение $(t_i)_{i \in I} \mapsto u_\nu((t_i))$.

Пусть $\boldsymbol{u} = (u_j)_{j \in J}$ — конечное семейство элементов $\widehat{A}(I)$, $v \in \widehat{A}(J)$ и $w = v \circ \boldsymbol{u}$ (§ 5, n° 1). Тогда

$$(v \circ \boldsymbol{u})^{\sim} = \tilde{v} \circ \tilde{\boldsymbol{u}}. \tag{18}$$

Это следует, из продолжения по непрерывности формулы (2) из § 5, n° 1, и кн. *Мн. Св. рез.*, приложение, n° 6.

Положим, в частности, $I = \{U\}$, отождествим A и $A^{\{U\}}$ и рассмотрим образы $\tilde{e}$ и $\tilde{l}$ рядов $e(U) = \sum_{n \geqslant 1} U^n/n!$ и $l(U) = \sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n-1} U^n/n$ в $\widehat{P}(A; A)$. Имеем $\|\widetilde{U^n}\| \leqslant 1$, так как $\|x_1 \ldots x_n\| \leqslant \|x_1\| \ldots \|x_n\|$ для любых $x_1, \ldots, x_n$ из A. Следовательно, *радиус абсолютной сходимости ряда* $\tilde{e}$ (соотв. $\tilde{l}$) *бесконечен* (соотв. $\geqslant 1$).

Обозначим через e_A (соотв. l_A) аналитическое отображение A в A (соотв. B в A, где B — открытый единичный шар в A), определенное сходящимся рядом $\tilde{e}$ (соотв. $\tilde{l}$), и положим $\exp_A(x) = 1 + e_A(x)$ (для любого $x \in A$) и $\log_A(x) = l_A(x - 1)$ (для любого $x \in A$, $\|x - 1\| < 1$). Тогда

$$\exp_A x = \sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in A), \tag{19}$$

$$\log_A x = \sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} \qquad (x \in A, \|x - 1\| < 1). \tag{20}$$

Так как $(e \circ l)(U) = (l \circ e)(U) = U$ (см. § 6, n° 1), то, согласно (18), $\tilde{e} \circ \tilde{l} = \tilde{l} \circ \tilde{e} = \mathrm{Id}_A$. Следовательно (*Мн. Св. рез.*, 3.1.9),

$$\exp_A(\log_A(x)) = x \qquad (x \in A, \|x - 1\| < 1), \tag{21}$$

$$\log_A(\exp_A(x)) = x \qquad (x \in A, \|x\| < \log 2), \tag{22}$$

ибо если $\|x\| < \log 2$, то $\|\exp_A(x) - 1\| \leqslant \exp\|x\| - 1 < 1$.

Рассмотрим, наконец, алгебру A как полную нормированную алгебру Ли. Имеем $\|[x, y]\| = \|xy - yx\| \leqslant 2\|x\|\|y\|$. Согласно предложению 1 из n° 2, область абсолютной сходимости формального ряда $\tilde{H}$ содержит множество

$$\Omega = \left\{ (x, y) \in A \times A \,|\, \|x\| + \|y\| < \frac{1}{2}\log 2 \right\}.$$

Следовательно, $\tilde{H}$ определяет аналитическую функцию $h\colon \Omega \to A$. Тогда $h(x, y) = \sum\limits_{r, s \geqslant 0} H_{r, s}(x, y)$ (см. § 3, n° 1, *замечание* 4).

Предложение 3. *Если* $\|x\| + \|y\| < \frac{1}{2}\log 2$, *то*

$$\exp_A x \,.\, \exp_A y = \exp_A h(x, y). \tag{23}$$

В самом деле, из (18) и соотношения $e^U e^V = e^{H(U, V)}$ следует, что

$$m \circ (1 + \tilde{e}, 1 + \tilde{e}) = (1 + \tilde{e}) \circ \tilde{H}$$

в $\hat{P}(A \times A; A)$. Поэтому из *Мн. Св. рез.*, 3.1.9, можно вывести, что (23) верно для (x, y), достаточно близких к $(0, 0)$; в свою очередь, отсюда требуемый результат получается с помощью аналитического продолжения (*Мн. Св. рез.*, 3.2.5).

§ 8. Сходимость ряда Хаусдорфа (ультраметрический случай)

В этом параграфе мы будем предполагать, что K — *полное нормированное* недискретное *поле характеристики нуль*, наделенное *ультраметрическим* абсолютным значением. Пусть p — характеристика поля вычетов K (*Комм. алг.*, § 3, n° 2).

Если $p \neq 0$, то положим $a = |p|$; известно, что $0 < a < 1$ (*Комм. алг.*, гл. 6, § 3, n° 2) и что существует нормирование v поля K со значениями в $\mathbf{R}$, притом единственное, такое, что его ограничение на $\mathbf{Q}$ является p-адическим нормированием v_p и $|x| = a^{v(x)}$ для любого $x \in K$. Положим, с другой стороны,

$$\theta = \frac{1}{p - 1}. \tag{1}$$

Если $p = 0$, то обозначим через a вещественное число, такое, что $0 < a < 1$, и через v — нормирование K со значениями в $\mathbf{R}$,

такое, что $|x| = a^{v(x)}$ при любом $x \in K$ (см. там же). Тогда $v(x) = 0$ для любого $x \in \mathbf{Q}^*$. С другой стороны, положим

$$\theta = 0. \tag{2}$$

1. *p-адическая оценка рядов* exp, log *и H*

Будем предполагать в этом пункте, что $p \neq 0$.

Лемма 1. *Пусть n — целое число $\geqslant 0$ и $n = n_0 + n_1 p + \ldots + n_k p^k$, где $0 \leqslant n_i \leqslant p - 1$, есть p-адическое разложение n. Пусть $S(n) = n_0 + n_1 + \ldots + n_k$. Тогда*

$$v_p(n!) = \frac{n - S(n)}{p - 1}. \tag{3}$$

В самом деле, $v_p(n!) = \sum_{i=1}^{n} v_p(i)$, а число целых i, содержащихся между 1 и n, для которых $v_p(i) \geqslant j$, равно целой части $[n/p^j]$ числа n/p^j. Поэтому

$$v_p(n!) = \sum_{j \geqslant 0} j([n/p^j] - [n/p^{j+1}]) = \sum_{j \geqslant 1} [n/p^j].$$

Так как $[n/p^j] = \sum_{i \geqslant j} n_i p^{i-j}$, то отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 2. $v(n) \leqslant v(n!) \leqslant (n-1)\theta$ *и* $v(n) \leqslant (\log n)/(\log p)$ *для любых целых* $n \geqslant 1$.

В самом деле, $v(n!) = v_p(n!) = (n - S(n))\theta \leqslant (n-1)\theta$ вследствие леммы 1.

С другой стороны, $n \geqslant p^{v(n)}$, откуда $v(n) \leqslant (\log n)/(\log p)$.

Пусть $I = \{U, V\}$ — множество, состоящее из двух элементов, и пусть

$$H = \sum_{r, s \geqslant 0} H_{r,s}(U, V) \in \hat{L}_{\mathbf{Q}}(I)$$

— ряд Хаусдорфа (§ 6, n° 4, определение 1). Пусть $\mathbf{Z}_{(p)}$ — локализация кольца $\mathbf{Z}$ по простому идеалу (p) и $(e_b)_{b \in B}$ — базис $L_{\mathbf{Z}_{(p)}}(I)$ над $\mathbf{Z}_{(p)}$ (§ 2, n° 11, теорема 1). Он является также базисом $L_{\mathbf{Q}}(I)$ над $\mathbf{Q}$.

Предложение 1. *Пусть r и s — целые числа $\geqslant 0$. Если $H_{r,s} = \sum_{b \in B} \lambda_b e_b$, где $\lambda_b \in \mathbf{Q}$ — разложение $H_{r,s}$ по базису $(e_b)_{b \in B}$, то*

$$v_p(\lambda_b) \geqslant -(r + s - 1)\theta \quad \textit{для любого} \quad b \in B. \tag{4}$$

Кольцо $A_{\mathbf{Z}_{(p)}}(I)$ совпадает с $\mathbf{Z}_{(p)}$-подмодулем $A_{\mathbf{Q}}(I)$, порожденным словами $w \in M_0(I)$. Так как $L_{\mathbf{Z}_{(p)}}(I)$ — прямое слагаемое в $A_{\mathbf{Z}_{(p)}}(I)$, то

$$L_{\mathbf{Z}_{(p)}}(I) = A_{\mathbf{Z}_{(p)}}(I) \cap L_{\mathbf{Q}}(I). \tag{5}$$

Пусть f — целое число, такое, что $f \leqslant (r+s-1)\theta < f+1$. Соотношение (4) эквивалентно $v_p(\lambda_b) \geqslant -f$ для любого $b \in B$, т. е. соотношению $H_{r,s} \in p^{-f}L_{\mathbf{Z}_{(p)}}(I)$. Последнее же, согласно (5), эквивалентно включению $H_{r,s} \in p^{-f}A_{\mathbf{Z}_{(p)}}(I)$.

Согласно формулам (11) из n° 4 § 6, достаточно доказать, что для любого целого $m \geqslant 1$ и любых целых $r_1, \ldots, r_m, s_1, \ldots s_m$, таких, что

$$\begin{gathered} r_1 + \ldots + r_m = r, \quad s_1 + \ldots + s_m = s, \\ r_i + s_i \geqslant 1 \quad \text{при} \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \end{gathered} \tag{6}$$

выполняется неравенство

$$v_p(m \cdot r_1! \ldots r_m! s_1! \ldots s_m!) \leqslant f. \tag{7}$$

Однако по лемме 2 $v_p(r_i!\, s_i!) \leqslant (r_i + s_i - 1)\theta$ и $v_p(m) \leqslant v_p(m!) \leqslant \leqslant (m-1)\theta$, поэтому левая часть в (7) мажорируется выражением $\theta\left(m - 1 + \sum\limits_{i+1}^{m}(r_i + s_i - 1)\right) = \theta(r+s-1)$; так как это, однако, целое число, то оно $\leqslant f$, что и завершает доказательство.

2. *Нормированные алгебры Ли*

Определение 1. *Нормированной алгеброй Ли над полем K называется алгебра Ли, наделенная нормой $\| \; \|$, такой, что*

$$\|x + y\| \leqslant \sup(\|x\|, \|y\|), \tag{8}$$

$$\|[x, y]\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| \tag{9}$$

для любых x, y из $\mathfrak{g}$.

В остальной части этого параграфа $\mathfrak{g}$ — полная нормированная алгебра Ли.

Для любого конечного множества I определим, как и в n° 1 § 7, непрерывный гомоморфизм $u \mapsto \tilde{u}$ алгебры Ли $\widehat{L}(I)$ в $\widehat{P}(\mathfrak{g}^I; \mathfrak{g})$. Как и в § 7, можно убедиться в том, что если $u = \sum\limits_{\nu} u_\nu$, где $u_\nu \in L^\nu(I)$ для любого $\nu \in \mathbf{N}^I$, то $\tilde{u} = \sum\limits_{\nu} \tilde{u}_\nu$, где $\tilde{u}_\nu$ — полиномиальное отображение $(t_i)_{i \in I} \mapsto u_\nu((t_i))$, определенное в § 2, n° 4. Остается справедливой и формула композиции (2) из § 7, n° 1.

3. Группа, определенная полной нормированной алгеброй Ли

Пусть $H = \sum_{r \geqslant 0} H_{r,s} \in \widehat{L}(\{U, V\})$ — ряд Хаусдорфа (§ 6, n° 4, определение 1). Покажем, что формальный ряд с непрерывными членами

$$\widetilde{H} = \sum_{r, s \geqslant 0} \widetilde{H}_{r,s} \in \widehat{P}(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}; \mathfrak{g}) \tag{10}$$

является *сходящимся* (*Мн. Св. рез.*, 4.1.1).

Пусть $r \geqslant 0$, $s \geqslant 0$ таковы, что $r + s \neq 0$, и пусть $\| \widetilde{H}_{r,s} \|$ — норма непрерывного многочлена $\widetilde{H}_{r,s}$ (*Мн. Св. рез.*, приложение, n° 2).

Лемма 3. $\| \widetilde{H}_{r,s} \| \leqslant a^{-(r+s-1)\theta}$.

Пусть B — семейство Холла над I и $H_{r,s} = \sum_{b \in B} \lambda_b e_b$ — разложение $H_{r,s}$ по базису, соответствующему этому семейству в алгебре $L(\{U, V\})$. Тогда

$$| \lambda_b | \leqslant a^{-(r+s-1)\theta}. \tag{11}$$

В самом деле, это тривиально при $p = 0$, ибо тогда $\lambda_b \in \mathbf{Q}$, и следует из предложения 1 n° 1, если $p \neq 0$.

Более того,

$$\| \tilde{e}_b \| \leqslant 1, \text{ если } b \in B. \tag{12}$$

Действительно, установим, далее, более общий факт: для любого коммутатора b степени n от двух переменных U и V (§ 2, n° 6) $\tilde{b}$ имеет норму, не превосходящую 1. Используем индукцию по n. Если $n = 1$, то $\tilde{b}$ — проекция $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}$, поэтому его норма $\leqslant 1$; если $n > 1$, то существуют два коммутатора b_1 и b_2 степеней $< n$, такие, что $b = [b_1, b_2]$. Так как билинейное отображение $\gamma: (x, y) \longmapsto [x, y]$ множества $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ имеет норму $\leqslant 1$, то (*Мн. Св. рез.*, приложение, n° 4)

$$\| \tilde{b} \| = \| \gamma \circ (\tilde{b}_1, \tilde{b}_2) \| \leqslant \| \tilde{b}_1 \| \cdot \| \tilde{b}_2 \| \leqslant 1. \tag{13}$$

Теперь из соотношений (11) и (12) извлекаем утверждение леммы.

Предложение 2. *Формальный ряд $\widetilde{H}$ является сходящимся (Мн. Св. рез., 4.1.1). Если G — шар $\{x \in \mathfrak{g} \mid \| x \| < a^{\theta}\}$, то область абсолютной сходимости ряда $\widetilde{H}$ (Мн. Св. рез., 4.1.3) содержит $G \times G$.*

В самом деле, если u и v — вещественные числа > 0, такие, что $u < a^{\theta}$ и $v < a^{\theta}$, то (лемма 3)

$$\| \widetilde{H}_{r,s} \| u^r v^s \leqslant a^{\theta} (u a^{-\theta})^r (v a^{-\theta})^s \tag{14}$$

и $\|\widetilde{H}_{r,s}\|u^r v^s$ стремится к нулю, когда $r+s$ стремится к бесконечности.

Обозначим через h: $G\times G\to\mathfrak{g}$ *аналитическую функцию* (*Мн. Св. рез.*, 4.2.4), определенную при помощи $\widetilde{H}$, т. е. формулой

$$h(x, y) = \sum_{r, s\geqslant 0}\widetilde{H}_{r,s}(x, y) = \sum_{r, s\geqslant 0} H_{r,s}(x, y) \quad \text{для любых} \quad (x, y)\in G\times G. \tag{15}$$

Эта функция называется *функцией Хаусдорфа* алгебры $\mathfrak{g}$.

Пусть $(x, y)\in G\times G$. Тогда

$$\|\widetilde{H}_{r,s}(x, y)\|\leqslant \sup(\|x\|, \|y\|), \tag{16}$$

$$\|h(x, y)\|\leqslant \sup(\|x\|, \|y\|). \tag{17}$$

Действительно, (17) тривиально следует из (16), а (16) очевидно при $r=s=0$; если $r\geqslant 1$, то

$$\|\widetilde{H}_{r,s}(x, y)\|\leqslant\|\widetilde{H}_{r,s}\|\|x\|^r\|y\|^s\leqslant \leqslant\|x\|\left(\frac{\|x\|}{a^\theta}\right)^{r-1}\left(\frac{\|y\|}{a^\theta}\right)^s\leqslant \leqslant\|x\|;$$

аналогично рассуждаем при $s\geqslant 1$.

В частности, $\|h(x, y)\|<a^\theta$ для любых $(x, y)\in G\times G$.

Предложение 3. *Пусть G — шар $\{x\in\mathfrak{g}\mid\|x\|<a^\theta\}$. Аналитическое отображение h: $G\times G\to G$ превращает G в группу, в которой 0 является единичным элементом, а $-x$ обратным к x для любого $x\in G$. Кроме того, если R — вещественное число, такое, что $0<R<a^\theta$, то шар $\{x\in\mathfrak{g}\mid\|x\|<R\}$ (соотв. $\{x\in\mathfrak{g}\mid\|x\|\leqslant R\}$) является открытой* (соотв. *замкнутой*) *подгруппой в G.*

Так как $H(U, -U)=0$ и $H(0, U)=H(U, 0)=U$, то $h(x, -x)=0$ и $h(0, x)=h(x, 0)=x$ для любого $x\in G$. Остается доказать только тождество ассоциативности

$$h(h(x, y), z)=h(x, h(y, z)) \quad \text{для любых} \quad x, y, z \text{ из } G. \tag{18}$$

Так как

$$H(H(U, V), W)=H(U, H(V, W))$$

в $\widehat{L}(\{U, V, W\})$ (§ 6, n° 5, предложение 4), то

$$\widetilde{H}\circ(\widetilde{H}\times\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}})=\widetilde{H}\circ(\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}\times\widetilde{H}) \tag{19}$$

в $\widehat{P}(\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\times\mathfrak{g};\ \mathfrak{g})$ (n° 2) и (19) влечет за собой (18) согласно (16) и *Мн. Св. рез.*, 4.1.5.

* Иначе говоря (гл. III, § 1), группа G, наделенная функцией Хаусдорфа, является группой Ли. *

4. Экспоненциальное отображение в полных нормированных ассоциативных алгебрах

В этом пункте A — ассоциативная алгебра с единицей, наделенная нормой $x \longmapsto \|x\|$, удовлетворяющей условиям

$$\|x+y\| \leqslant \sup(\|x\|, \|y\|),$$
$$\|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|,$$
$$\|1\| = 1$$

для любых x, y из A и *полная* относительно этой нормы. Результаты второго и третьего абзацев § 7, n° 3, остаются в силе.

Положим $I = \{U\}$ и рассмотрим образы $\tilde{e}$ и $\tilde{l}$ рядов $e(U) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{U^n}{n!}$ и $l(U) = \sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{U^n}{n}$ в $\widehat{P}(A;\ A)$. Тогда

$$\left\| \left(\frac{U^n}{n!} \right)^{\sim} \right\| \leqslant a^{-(n-1)\theta}, \tag{20}$$

$$\left\| \left(\frac{U^n}{n} \right)^{\sim} \right\| \leqslant a^{-\frac{\log n}{\log p}} \tag{21}$$

согласно лемме 2 n° 1. Поэтому *радиус* абсолютной сходимости ряда $\tilde{e}$ (соотв. $\tilde{l}$) больше или равен a^{θ} (соотв. больше или равен 1) (*Мн. Св. рез.*, 4.1.3). При $R > 0$ пусть $G_R = \{x \in A \mid \|x\| < R\}$, и положим $G = G_{a^{\theta}}$. Ряд $\tilde{e}$ (соотв. $\tilde{l}$) определяет аналитическое отображение e_A (соотв. l_A) из G (соотв. G_1) в A. Положим

$$\exp_A(x) = 1 + e_A(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{x^n}{n!} \text{ для любого } x \in G, \tag{22}$$

$$\log_A(x) = l_A(x-1) = \sum_{n \geqslant 1} (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} \text{ для любого } x - 1 \in G_1 \tag{23}$$

(будем опускать индекс A, если из-за этого не могут возникнуть недоразумения). Для $x \in G_R$ и $n \geqslant 1$ получим

$$\left\| \frac{x^n}{n} \right\| \leqslant \left\| \frac{x^n}{n!} \right\| < R^n a^{-(n-1)\theta} = R \left(\frac{R}{a^{\theta}} \right)^{n-1}, \tag{24}$$

так что $e_A(G_R) \subset G_R$, $l_A(G_R) \subset G_R$, если $R \leqslant a^{\theta}$.

Предложение 4. *Пусть R — вещественное число, такое, что $0 < R \leqslant a^{\theta}$. Отображение $\exp_A$ определяет аналитический изоморфизм G_R на $1 + G_R$, причем обратным к нему изоморфизмом является ограничение $\log_A$ на $1 + G_R$.*

Имеем $e(l(X)) = l(e(X)) = X$. Согласно (20), (21) и *Мн. Св. рез.*, 4.1.5, из этого следует, что $e_A(l_A(x)) = l_A(e_A(x))$ для любого $x \in G_R$. Поэтому

$$\exp_A(\log_A x) = x \quad \text{для любого} \quad y \in 1 + G_R,$$
$$\log_A(\exp_A x) = x \quad \text{для любого} \quad x \in G_R,$$

что и завершает доказательство.

Если рассматривать A с операцией коммутирования $[x, y] = xy - yx$, то A превращается в полную нормированную алгебру Ли, ибо $\| xy - yx \| \leqslant \sup(\| xy \|, \| yx \|) \leqslant \| x \| \cdot \| y \|$.

Из предложения 2 n° 3 следует, что область абсолютной сходимости $\tilde{H}$ содержит $G \times G$, так что $\tilde{H}$ определяет аналитическую функцию h: $G \times G \to A$; тогда

$$h(x, y) = \sum_{r,\, s \geqslant 0} H_{r,s}(x, y). \tag{25}$$

Предложение 5. *Для любых x, y из G выполняется равенство*

$$\exp_A x \cdot \exp_A y = \exp_A h(x, y). \tag{26}$$

В самом деле, $e^U e^V = e^{H(U,\, V)}$, так что

$$m \circ (1 + \tilde{e}, 1 + \tilde{e}) = (1 + \tilde{e}) \circ H$$

в $\tilde{H}(A \times A; A)$ (если через m обозначить умножение в A). Доказываемое предложение следует теперь из предложения 2, леммы 3 и *Мн. Св. рез.*, 4.1.5.

ДОПОЛНЕНИЕ

Функция Мёбиуса

Пусть n — целое число $\geqslant 1$. Если n делится на квадрат простого числа, то положим $\mu(n) = 0$. Если n не делится на квадрат никакого простого числа, то положим $\mu(n) = (-1)^k$, где k — число простых делителей n. Таким образом определенная функция μ: $\mathbf{N}^* \to \{-1, 0, 1\}$ называется *функцией Мёбиуса*.

Напомним, что если даны два целых числа $n_1 \geqslant 1$ и $n_2 \geqslant 1$, то запись $n_1 \mid n_2$ означает, что n_1 делит n_2.

Предложение. (i) *Функция μ является единственным отображением $\mathbf{N}^*$ в $\mathbf{Z}$, таким, что $\mu(1) = 1$ и*

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = 0 \tag{1}$$

для любого целого $n > 1$.

(ii) *Пусть s и t — два отображения $\mathbf{N}^*$ в коммутативную группу, записываемую аддитивно. Для того, чтобы*

$$s(n) = \sum_{d \mid n} t(d) \text{ при любом целом } n \geqslant 1, \tag{2}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$t(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d)\, s\left(\frac{n}{d}\right) \text{ при любом целом } n \geqslant 1. \tag{3}$$

Утверждение единственности в (i) очевидно, ибо из (1) можно определить $\mu(n)$ индукцией по n. Покажем, что функция μ удовлетворяет (1). В самом деле, пусть n — целое число > 1. Пусть P — множество простых делителей n и $n = \prod_{p \in P} p^{v_p(n)}$ — разложение n на простые множители. Если d — делитель n, то $\mu(d) = 0$, кроме того случая, когда d имеет вид $\prod_{p \in H} p$, где H — подмножество в P. Тогда

$$\sum_{d \mid n} \mu(d) = \sum_{H \subset P} (-1)^{\operatorname{Card} H} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\operatorname{Card} P} \binom{n}{k} (-1)^k = (1-1)^{\operatorname{Card} P} = 0.$$

Пусть s и t — отображения $\mathbf{N}^*$ в некоторую коммутативную группу, записываемую аддитивно. Пусть $n \in \mathbf{N}^*$. Если справедливо (2), то

$$\sum_{d \mid n} \mu(d)\, s\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d \mid n} \mu(d) \sum_{\delta \mid \frac{n}{d}} t(\delta) = \sum_{d\delta \mid n} \mu(d)\, t(\delta) =$$

$$= \sum_{\delta \mid n} t(\delta) \sum_{d \mid \frac{n}{\delta}} \mu(d) = t(n).$$

Обратно, если верно (3), то

$$\sum_{d \mid n} t(d) = \sum_{d \mid n} \sum_{\delta \mid d} \mu(\delta)\, s\left(\frac{d}{\delta}\right) = \sum_{d \mid n} s(d) \sum_{\delta \mid \frac{n}{d}} \mu(\delta) = s(n),$$

что и требовалось доказать.

Формула (3) называется *формулой обращения Мёбиуса*.

УПРАЖНЕНИЯ

§ 1

1) Предположим, что K — поле характеристики 0. Пусть E — биалгебра конечного ранга над K, являющаяся кокоммутативной. Доказать, что $P(E) = \{0\}$ (применить теорему 1 из n° 6).

2) Пусть E — биалгебра, такая, что $P(E) = \{0\}$, и $(E_n)_{n \geqslant 0}$ — фильтрация на E, совместимая со структурой биалгебры. Индукцией по n показать, что $E_n^+ = \{0\}$ для любого $n \geqslant 0$, и вывести отсюда, что $E^+ = \{0\}$, т. е. что $E = K$.

3) Пусть G — моноид, а $E = K[G]$ — его алгебра (*Alg.*, chap. III, p. 19).

а) Показать, что E обладает единственной структурой биалгебры, такой, что $c(g) = g \otimes g$ для любого $g \in G$; эта структура совместима со структурой алгебры на E и превращает E в кокоммутативную биалгебру, коединицей которой является отображение ε, такое, что $\varepsilon(g) = 1$ для любого $g \in G$.

б) Показать, что любой примитивный элемент биалгебры E равен нулю. Вывести отсюда, что если $G \neq \{e\}$, то E не обладает фильтрацией, совместимой со структурой биалгебры (применить упражнение 2).

в) Пусть K — целостное кольцо. Показать, что ненулевыми элементами $x \in E$, обладающими тем свойством, что $c(x) = x \otimes x$, являются элементы из G, и только они. Показать, что E обладает инверсией i (см. *Alg.*, chap. III, p. 198, exerc. 4) тогда и только тогда, когда G — группа, и что в этом случае $i(g) = g^{-1}$ для любого $g \in G$.

4) Пусть E — кокоммутативная биалгебра и G — множество $g \in E$, таких, что $\varepsilon(g) = 1$ и $c(g) = g \otimes g$. Показать, что G замкнуто относительно умножения и является группой тогда и только тогда, когда E обладает инверсией. Показать, что если K — поле, то элементы из G линейно независимы над K.

5) Пусть E — биалгебра, а $E' = \operatorname{Hom}(E, K)$ — дуальное к ней пространство, наделенное структурой алгебры, дуальной к структуре коалгебры на E (*Alg.*, chap. III, p. 141). Пусть $\mathfrak{m}$ — ядро гомоморфизма $u \longmapsto u(1)$ алгебры E' на K; оно является идеалом в E'. Показать, что если $u \in \mathfrak{m}^2$ и $x \in P(E)$, то $u(x) = 0$. Если же K — поле, то показать, что $P(E)$ является ортогональным дополнением к $\mathfrak{m}^2$ в E^+, вывести отсюда, что $\dim P(E) \leqslant \dim \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$, причем в случае когда E конечномерна над K, имеет место равенство.

6) Пусть E — биалгебра и $u \in E' = \operatorname{Hom}(E, K)$ (см. упражнение 5). Пусть элемент $g \in E$ таков, что $\varepsilon(g) = 1$ и $c(g) = g \otimes g$. Показать, что отображение $u \longmapsto u(g)$ является гомоморфизмом алгебры E' в K и что отображение $y \to gy$ является эндоморфизмом коалгебры E; показать, что этот эндоморфизм является автоморфизмом, если E обладает инверсией.

7) Предположим, что K — поле. Пусть E — биалгебра, удовлетворяющая следующим условиям:

(i) E кокоммутативна;

(ii) E обладает инверсией (*Alg.*, chap. III, p. 198, exerc. 4);

(iii) $P(E) = \{0\}$;

(iv) E конечномерна над K.

Обозначим через E' K-алгебру, дуальную к коалгебре E. Обозначим также через G множество элементов $g \in E$, таких, что $\varepsilon(g)=1$ и $c(g)=g \otimes g$; это группа (см. упражнение 4).

а) Пусть $g \in G$ и $\mathfrak{m}_g$ — ядро гомоморфизма $u \longmapsto u(g)$ алгебры E' в K. Показать, что $\mathfrak{m}_g = \mathfrak{m}_g^2$ (свести к случаю, когда $g=1$, и использовать упражнение 6, затем применить упражнение 5).

б) Предположим, что K алгебраически замкнуто. Показать, что единственными максимальными идеалами в E' являются идеалы $\mathfrak{m}_g$; вывести отсюда, что их пересечение равно 0 и что E' можно отождествить с произведением K^G, а E — с биалгеброй $K[G]$ конечной группы G (см. упражнение 3).

8) Показать, что обертывающая биалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$ обладает некоторой инверсией i и что $i(x) = -x$ для любого $x \in \sigma(\mathfrak{g})$.

9) Пусть K является $\mathbf{Q}$-алгеброй. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, обладающая K-базисом, U — ее обертывающая биалгебра, наделенная канонической фильтрацией $(U_n)_{n \geqslant 0}$. Пусть $x \in U^+$ и n — целое число $\geqslant 1$. Показать, что x принадлежит U_n^+ тогда и только тогда, когда $c^+(x)$ принадлежит $\sum\limits_{\substack{i+j=n\\ i,\, j \geqslant 1}} \operatorname{Im}\left(U_i^+ \otimes U_j^+\right)$.

10) Предположим, что K — произвольная $\mathbf{Q}$-алгебра. Пусть E — кокоммутативная K-биалгебра, обладающая фильтрацией, совместимой со структурой биалгебры. Показать, что морфизм

$$f_E \colon U(P(E)) \to E,$$

определенный в n° 4, предложение 8, является изоморфизмом, если предположить дополнительно, что $P(E)$ — свободный K-модуль (то же доказательство, что и в теореме 1).

¶ 11) Пусть E — биалгебра и I — конечное множество. Зададимся базисом (e_α) биалгебры E, занумерованным элементами α из $\mathbf{N}^I$, таким, что

(i) $e_0 = 1$;

(ii) $c(e_\gamma) = \sum\limits_{\alpha+\beta=\gamma} e_\alpha \otimes e_\beta$ для любого $\gamma \in \mathbf{N}^I$.

Условие (ii) влечет за собой, что E как коалгебра изоморфна коалгебре $\mathbf{TS}(K^I)$ симметрических тензоров на K^I (см *Alg.*, chap. IV, § 5, n° 7, n$^{\text{ell}}$ éd).

а) Пусть $E' = \operatorname{Hom}(E, K)$ — алгебра, дуальная к E и $\Lambda = K[[(X_i)_{i \in I}]]$ — алгебра формальных степенных рядов от переменных X_i, занумерованных элементами множества I. Для любого $u \in E'$ пусть φ_u — формальный ряд

$$\sum_\alpha u(e_\alpha)\, x^\alpha,$$

где $x^\alpha = \prod\limits_{i \in I} X_i^{\alpha(i)}$.

Показать, что $u \longmapsto \varphi_u$ — изоморфизм алгебры E' на Λ и что этот изоморфизм переводит топологию простой сходимости на E' в топологию произведения на Λ.

б) Пусть $c_{\alpha\beta\gamma}$ — структурные константы алгебры E в базисе (e_α). Тогда

$$e_\alpha e_\beta = \sum_\gamma {}_\gamma c_{\alpha\beta\gamma} e.$$

Напишем x вместо $(X_i)_{i \in I}$ и y вместо $(Y_i)_{i \in I}$, где Y_i — некоторые новые переменные. Показать, что существует семейство $f(x, y) = (f_i(x, y))_{i \in I}$ формальных рядов от переменных x, y, такое, что

$$f(x, y)^{\gamma} = \sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta\gamma} x^{\alpha} y^{\beta} \text{ при любом } \gamma \in \mathbf{N}^I,$$

для чего, как и выше, положить $x^{\alpha} = \prod_i X_i^{\alpha(i)}$ и то же самое для y^{β} и $f(x, y)^{\gamma}$.

Показать, что $f(x, y)$ является *формальным групповым законом* над K размерности $n = \operatorname{Card} I$ в смысле гл. I, § 1, упражнение 24 [1]); определить изоморфизм алгебры Ли этой формальной группы на алгебру Ли $P(E)$, базис которой составляют e_{α} с $|\alpha| = 1$.

в) Обратно, показать, что любой групповой закон формальной группы над K от x и y может быть получен только что описанным способом единственным образом с точностью до изоморфизма.

г) Если K есть $\mathbf{Q}$-алгебра, применить только что полученные результаты к обертывающей биалгебре алгебры Ли $\mathfrak{g}$, обладающей конечным базисом над K. Вывести отсюда существование (и единственность с точностью до изоморфизма) группового закона формальной группы, алгеброй Ли которой является $\mathfrak{g}$.

д) Найти в явном виде биалгебру, соответствующую групповому закону однопараметрической формальной группы $f(x, y) = x + y$ (соотв. $f(x, y) = x + y + xy$).

¶ 12) Предположим, что K — поле характеристики $p > 0$.

а) Пусть $\mathfrak{g}$ — произвольная p-алгебра Ли (гл. I, § 2, упражнение 20), и пусть $\widetilde{U}$ — ее ограниченная универсальная обертывающая алгебра (гл. I, § 2, упражнение 6). Показать, что существует, и притом единственная, структура биалгебры на $\widetilde{U}$, совместимая со структурой алгебры и такая, что все элементы из $\mathfrak{g}$ относительно этой структуры примитивны. Показать, что $\widetilde{U}$ кокоммутативна и что $P(\widetilde{U}) = \mathfrak{g}$.

б) Если n — целое число $\geqslant 0$, то через $\widetilde{U}_n$ обозначим векторное подпространство в $\widetilde{U}$, порожденное произведениями $x_1 \ldots x_n$, где $x_i \in \mathfrak{g}$ для любого i. Показать, что $(\widetilde{U}_n)_{n \geqslant 0}$ — фильтрация, совместимая со структурой биалгебры на $\widetilde{U}$.

в) Пусть E — биалгебра и $\mathfrak{g} = P(E)$ — алгебра Ли ее примитивных элементов. Отображение $x \longmapsto x^p$ оставляет на месте $\mathfrak{g}$ и наделяет $\mathfrak{g}$ структурой p-алгебры Ли. Показать, что каноническое вложение $\mathfrak{g} \to E$ продолжается единственным способом до морфизма биалгебр $\widetilde{U} \to E$ и что этот морфизм инъективен (использовать, что если $(x_i)_{i \in I}$ — совершенно упорядоченный базис в $\mathfrak{g}$, то одночлены $\prod x_i^{n_i}$ $(0 \leqslant n_i < p)$ образуют базис U (см. *там же*), и рассуждать, как и при доказательстве леммы 2).

§ 2

1) Пусть $\mathfrak{g}$ — свободная алгебра Ли со свободными образующими $(x_1, \ldots, x_n, \ldots)$. Обозначим через $\mathfrak{g}_n$ подалгебру в $\mathfrak{g}$, порожденную элементами $(x_1, \ldots, x_n)$, и через $\mathfrak{h}_n$ — наименьший идеал в $\mathfrak{g}_n$, содержащий x_n.

---

[1]) В этом упражнении предполагается, что K — поле, но ничего не меняется, если отказаться от этого предположения.

а) Показать, что $\mathfrak{b}_n$ — подмодуль в $\mathfrak{g}_n$, порожденный элементами $\left(\operatorname{ad}\left(x_{i_1}\right)\circ\ldots\circ\operatorname{ad}\left(x_{i_k}\right)\right)x_n$, где $k \geqslant 0$ и $i_h < n$ для любого h.

б) Показать, что $\mathfrak{g}_n = \mathfrak{g}_{n-1} \oplus \mathfrak{b}_n$; вывести отсюда, что $\mathfrak{g}$ является прямой суммой $\mathfrak{b}_n$ при $n \geqslant 1$.

в) Используя а) и б), показать, что K-модуль $\mathfrak{g}$ порождается элементами $\left[x_{i_1}, \left[x_{i_2}, \ldots, \left[x_{i_{k-1}}, x_{i_k}\right]\ldots\right]\right]$, где $k \geqslant 0$ и $i_h \leqslant i_k$, если $h < k$.

¶ 2) Пусть X счетное не менее чем двуэлементное множество, и пусть $\mathfrak{H}$ — множество подмножеств в $M(X)$, являющихся семействами Холла (см. определение 2). Показать, что $\operatorname{Card}\mathfrak{H} = 2^{\aleph_0}$.

3) Пусть X — совершенно упорядоченное множество. Показать, что существует семейство Холла над X, такое, что $H \cap M^3(X)$ состоит из произведений $z(yx)$, где $y < x$, $y \leqslant z$, а $H \cap M^4(X)$ состоит из произведений $w(z(yx))$, где $w \geqslant z \geqslant y$, $y < x$, и произведений $(ab)(cd)$, где $a < b$, $c < d$ и если $a < c$, то $a = c$ и $b < d$.

4) а) Показать, что алгебра Ли, заданная в терминах образующих и определяющих соотношений следующим образом:

$$\{x, y;\ [x, [x, y]] = [y, [x, y]] = 0\},$$

обладает базисом $(x, y, [x, y])$. Представить ее матрицами.

б) Те же вопросы относительно алгебры Ли, заданной так:

$$\{x, y;\ [x, [x, y]] - 2x = [y, [x, y]] + 2y = 0\}.$$

в) Показать, что алгебра Ли

$$\{x, y, z;\ [x, y] - x = [y, z] - y = [z, x] - z = 0\}$$

является нулевой.

5) Пусть $\mathfrak{g}$ — свободная алгебра Ли и $\mathfrak{r}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Предположим, что $\mathfrak{r} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{r}]$. Показать, что $\mathfrak{r} = \{0\}$ $\left(\text{использовать равенство } \bigcap\limits_{n\geqslant 0} \mathscr{C}^n\mathfrak{g} = \{0\}\right)$.

6) Пусть E — некоторый модуль. Пусть ME — свободная алгебра модуля E (*Alg.*, chap. III, p. 181, exerc. 13). Напомним, что $ME = \bigoplus\limits_{n\geqslant 0} E_n$, где

$$E_1 = E,\ E_n = \bigoplus_{p+q=n} E_p \otimes E_q, \quad \text{если} \quad n \geqslant 2,$$

причем структура алгебры на ME задается каноническими отображениями $E_n \otimes E_m \to E_{n+m}$.

а) Пусть J — наименьший двусторонний идеал в ME, содержащий элементы вида xx и $(xy)z + (yz)x + (zx)y$, где x, y, z лежат в E. Положим $LE = ME/J$. Показать, что J — градуированный идеал в ME; получить отсюда градуировку $(L^nE)_{n\geqslant 1}$ алгебры LE.

б) Показать, что LE — алгебра Ли, она называется *свободной алгеброй Ли модуля* E. Показать, что для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и для любого линейного отображения $f\colon E \to \mathfrak{g}$ существует единственный гомоморфизм алгебр Ли $F\colon LE \to \mathfrak{g}$, продолжающий f.

в) Определить изоморфизмы $E \to L^1E$ и $\bigwedge^2 E \to L^2E$. Показать, что L^3E совпадает с фактормодулем $E \otimes \bigwedge^2 E$ по подмодулю, порожденному элементами

$$x \otimes (y \wedge z) + y \otimes (z \wedge x) + z \otimes (x \wedge y) \text{ для любых } x, y, z \text{ из } E.$$

г) Показать, что если E — свободный модуль с базисом X, то LE совпадает со свободной алгеброй Ли $L(X)$, определенной в n° 2.

д) Показать, что каноническое отображение E в универсальную обертывающую алгебру $U(LE)$ алгебры LE продолжается до изоморфизма тензорной алгебры $\mathrm{T}E$ на $U(LE)$.

е) Пусть σ — линейное отображение $\bigwedge^2 E$ в $\mathrm{T}^2 E$, такое, что $\sigma(x \wedge y) = x \otimes y - y \otimes x$. Построить модуль E, для которого σ не инъективно. Вывести отсюда, что для этого модуля каноническое отображение LE в $U(LE)$ не инъективно (сравнить с упражнением 9 из § 2 гл. I).

7) Предположим, что K — поле. Пусть $\mathfrak{l}$ — свободная алгебра Ли над множеством $(x_i)_{i \in I}$, и пусть M — некоторый $\mathfrak{l}$-модуль.

а) Показать, что $H^2(\mathfrak{l}, M) = 0$; см. гл. I, § 3, упражнение 12. (Использовать следствие 2 предложения 1, а также пункт (i) цитированного упражнения.)

б) Показать, что для любого семейства $(m_i)_{i \in I}$ элементов M существует коцикл φ: $\mathfrak{l} \to M$ степени 1, удовлетворяющий условию $\varphi(x_i) = m_i$, и что такой коцикл единствен. Получить отсюда точную последовательность

$$0 \to H^0(\mathfrak{l}, M) \to M \to M^I \to H^1(\mathfrak{l}, M) \to 0.$$

Если I конечно и M — модуль конечного ранга над K, то

$$\operatorname{rg} H^1(\mathfrak{l}, M) - \operatorname{rg} H^0(\mathfrak{l}, M) = (n-1) \operatorname{rg} M,$$

где n — мощность I.

8) Предположим, что K — поле. Пусть $\mathfrak{l}$ — алгебра Ли, свободная над семейством $(\bar{x}_i)_{i \in I}$, пусть $\mathfrak{r}$ — идеал $\mathfrak{l}$, содержащийся в $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$, и $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}/\mathfrak{r}$; обозначим через x_i образы $\bar{x}_i$ в $\mathfrak{g}$.

Доказать эквивалентность следующих свойств:

(i) $\mathfrak{g}$ свободная алгебра Ли;

(ii) $\mathfrak{g}$ свободная над (x_i) (т. е. $\mathfrak{r} = \{0\}$);

(iii) для любого $\mathfrak{g}$-модуля выполняется $H^2(\mathfrak{g}, M) = \{0\}$;

(iv) если $\mathfrak{g}$ действует на K тривиально, то $H^2(\mathfrak{g}, K) = \{0\}$.

(Импликации (ii) $\Rightarrow$ (i) и (iii) $\Rightarrow$ (iv) очевидны, а (i) $\Rightarrow$ (iii) следует из упражнения 7. Для того чтобы доказать, что (iv) $\Rightarrow$ (ii), достаточно показать, что $\mathfrak{r} = [\mathfrak{l}, \mathfrak{r}]$, см. упражнение 5; если это не так, выбрать гиперплоскость $\mathfrak{h}$ идеала $\mathfrak{r}$, содержащую $[\mathfrak{l}, \mathfrak{r}]$, и заметить, что расширение $\mathfrak{r}/\mathfrak{h} \to \mathfrak{l}/\mathfrak{h} \to \mathfrak{l}/\mathfrak{r} = \mathfrak{g}$ существенно (не расщепляется).)

¶ 9) Пусть $\mathfrak{g} = \bigoplus_{n \geqslant 1} \mathfrak{g}_n$ — градуированная алгебра Ли. Показать, что если $\mathfrak{h}$ — градуированная подалгебра в $\mathfrak{g}$, такая, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} + [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, то $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}$. Показать, что если (x_i) — семейство однородных элементов из $\mathfrak{g}$, то (x_i) — семейство, порождающее $\mathfrak{g}$, тогда и только тогда, когда образы x_i в $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ порождают $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

Показать, что если K — поле, на котором $\mathfrak{g}$ действует тривиально, и если $H^2(\mathfrak{g}, K) = \{0\}$, то семейство (x_i) является семейством свободных образующих тогда и только тогда, когда образы x_i в $\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ составляют базис этого векторного пространства. (Использовать упражнение 8.) [1])

10) Пусть $\mathfrak{l}$ — свободная алгебра Ли над множеством из n элементов и u — ее сюръективный эндоморфизм. Показать, что u — изоморфизм. (Положить

[1]) Если алгебра $\mathfrak{g}$ не градуированная, то неизвестно, влечет ли за собой условие „$H^2(\mathfrak{g}, M) = \{0\}$ дла любого $\mathfrak{g}$-модуля M“ свойство алгебры Ли $\mathfrak{g}$ быть свободной.

$\mathrm{gr}^n(\mathfrak{l}) = \mathscr{C}^n\mathfrak{l}/\mathscr{C}^{n+1}\mathfrak{l}$ и обозначить через $\mathrm{gr}^n(u)$ эндоморфизм $\mathrm{gr}^n(\mathfrak{l})$, индуцируемый эндоморфизмом u; заметить, что $\mathrm{gr}^n(u)$ сюръективен, так как $\mathrm{gr}^n(\mathfrak{l})$ — свободный K-модуль конечного ранга, и вывести отсюда, что $\mathrm{gr}^n(u)$ биективен, а затем, что ядро u содержится в $\bigcap\limits_n \mathscr{C}^n\mathfrak{l}$, равном нулю.)

Показать, что если $(y_1, \ldots, y_m)$ — система образующих алгебры $\mathfrak{l}$, то $m \geqslant n$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $(y_1, \ldots, y_m)$ — система свободных образующих.

¶ 11) Пусть Y и Z — два непересекающихся множества (причем Y совершенно упорядоченно), $X = Y \cup Z$ и $\mathfrak{l} = L(X)$. Пусть $\mathfrak{a}_Y$ — подмодуль в $\mathfrak{l}$, порожденный Z и $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$; он является двусторонним идеалом алгебры Ли $\mathfrak{l}$. Построим в явном виде систему свободных образующих для $\mathfrak{a}_Y$.

Пусть M — множество функций на Y с конечным носителем и натуральными значениями. Если $m \in M$, то через θ^m обозначим эндоморфизм алгебры $\mathfrak{l}$, задаваемой формулой

$$\theta^m = \prod_{y \in Y} (\mathrm{ad}\, y)^{m(y)},$$

причем произведение берется в заданном на множестве Y порядке. Обозначим через $\mathfrak{S}$ подмножество в $Y \times M$, состоящее из пар (u, m), таких, что существует $y \in Y$, для которого $y > u$ и $m(y) \geqslant 1$. Показать, что элементы

$$\theta^m(u) \text{ при } (u, m) \in \mathfrak{S} \text{ и } \theta^m(z) \text{ при } (z, m) \in Z \times M$$

образуют систему свободных образующих алгебры Ли $\mathfrak{a}_Y$.

(Свести задачу к случаю конечного Y и рассуждать индукцией по $\mathrm{Card}(Y)$. Использовать следствие предложения 10, примененное к наибольшему элементу y множества Y, и применить предположение индукции к $Y - \{y\}$.)

12) Пусть $X = \{x, y\}$ — двуэлементное множество. Показать, что производная алгебра алгебры $L(X)$ свободна, причем системой ее свободных образующих является система элементов вида $((\mathrm{ad}\, y)^q \circ (\mathrm{ad}\, x)^p)(y)$ для $p \geqslant 1$, $q \geqslant 0$. (Использовать упражнение 11.)

¶ 13) (В этом упражнении предполагается, что любой проективный модуль над K *свободен*; это, например, верно, когда K — кольцо главных идеалов.)

Пусть $\mathfrak{l} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathfrak{l}_n$ — градуированная свободная алгебра Ли, обладающая системой свободных образующих, состоящей из однородных элементов, и $\mathfrak{h}$ — градуированная подалгебра в $\mathfrak{l}$, являющаяся прямым слагаемым $\mathfrak{l}$ как модуля.

a) Для любого $i \geqslant 0$ пусть $\mathfrak{l}^{(i)}$ — градуированная подалгебра в $\mathfrak{l}$, такая, что

$$\mathfrak{l}_j^{(i)} = \mathfrak{h}_j, \quad \text{если} \quad j \leqslant i,$$
$$\mathfrak{l}_j^{(i)} = \mathfrak{l}_j, \quad \text{если} \quad j > i.$$

Индукцией по n доказать существование системы свободных образующих $B^{(i)}$ подалгебры $\mathfrak{l}^{(i)}$, состоящей из однородных элементов и такой, что элементы из $B^{(i-1)}$ и из $B^{(i)}$ степеней $< i-1$ совпадают. (Предположим, что $B^{(i-1)}$ построена. Пусть $\mathfrak{m}_i$ — пересечение $\mathfrak{l}_i = \mathfrak{l}_i^{(i-1)}$ с подалгеброй, порожденной $\mathfrak{h}_j$ при $j < i$, и пусть $\mathfrak{b}_i$ — подмодуль в $\mathfrak{l}_i$, порожденный элементами степени i из $B^{(i-1)}$. По предположению индукции $\mathfrak{l}_i = \mathfrak{m}_i \oplus \mathfrak{b}_i$.

Так как $\mathfrak{m}_i \subset \mathfrak{h}_i$, то $\mathfrak{b}_i$ можно представить в виде прямой суммы $\mathfrak{y}_i \oplus \mathfrak{z}_i$, причем $\mathfrak{h}_i = \mathfrak{m}_i \oplus \mathfrak{z}_i$; согласно предположению относительно K, модули $\mathfrak{y}_i$ и $\mathfrak{z}_i$ свободны; заменой лишь элементов степени i в $B^{(i-1)}$ можно добиться того, чтобы $\mathfrak{z}_i$ порождался подмножеством системы $B^{(i-1)}$. Применяя упражнение 11 к $\mathfrak{l}^{(i-1)}$ и ее идеалу $\mathfrak{l}^{(i)}$, можно получить систему свободных образующих $B^{(i)}$ подалгебры $\mathfrak{l}^{(i)}$, обладающую желаемыми свойствами.)

б) Вывести из а), что $\mathfrak{h}$ обладает системой свободных образующих, состоящей из однородных элементов.

¶ 14) Предположим, что K — поле. Пусть X — множество и x, y — элементы из $L(X)$, линейно независимые над K. Показать, что семейство (x, y) свободно в алгебре Ли $L(X)$. (Пусть x_p (соотв. y_q) — ненулевая однородная компонента наивысшей степени элемента x (соотв. y). Прибавляя, если нужно, к x кратное y, можно предполагать, что x_p и y_q линейно независимы над K. Подалгебра $L(X)$, порожденная x_p и y_q, градуирована, а следовательно, свободна; см. упражнение 13. Вывести отсюда, что (x_p, y_q) — свободное семейство, и перейти от него к (x, y).)

¶ 15) Пусть $X = \{x, y\}$ — двуэлементное множество и σ — автоморфизм алгебры $L(X)$. Показать, что если K — поле, то σ сохраняет градуировку $L(X)$ (применить упражнение 14 к однородным компонентам наивысшей степени, отличным от нуля, элементов $\sigma(x)$ и $\sigma(y)$; вывести отсюда изоморфизм $\operatorname{Aut} L(X)$ на $\mathbf{GL}(2, K)$. Распространить эти результаты на случай, когда K — кольцо без ненулевых нильпотентных элементов. В случае же, когда K содержит элемент $\varepsilon \neq 0$, квадрат которого равен нулю, показать, что отображение $x \longmapsto x$, $y \longmapsto y + \varepsilon[x, y]$ продолжается до автоморфизма алгебры $L(X)$, не сохраняющего ее градуировку.

¶ 16) Предположим, что K есть $\mathbf{Q}$-алгебра. Если $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, то обозначим через $U(\mathfrak{g})$ ее универсальную обертывающую алгебру, и пусть σ — каноническое отображение $\mathfrak{g}$ в $U(\mathfrak{g})$, а $\mathbf{S}(\mathfrak{g})$ — симметрическая алгебра K-модуля $\mathfrak{g}$. Существует единственное линейное отображение

$$\eta(\mathfrak{g})\colon\ \mathbf{S}(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}),$$

такое, что $\eta(\mathfrak{g})(x^n) = \sigma(x)^n$ для любого $x \in \mathfrak{g}$ и любого $n \in \mathbf{N}$. Имеем

$$\eta(\mathfrak{g})(x_1 \ldots x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{s \in \mathfrak{S}_n} \sigma(x_{s(1)}) \ldots \sigma(x_{s(n)}), \quad x_i \in \mathfrak{g}.$$

Докажем, что $\eta(\mathfrak{g})$ — *биекция*.

а) Проверить, что $\eta(\mathfrak{g})$ сюръективно, а если K-модуль $\mathfrak{g}$ свободен, то оно биективно (использовать теорему Пуанкаре — Биркгофа — Витта).

б) Пусть $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$. Обозначим через $\mathfrak{s}_{\mathfrak{h}}$ (соотв. $\mathfrak{u}_{\mathfrak{h}}$) идеал в $\mathbf{S}(\mathfrak{g})$ (соотв. двусторонний идеал в $U(\mathfrak{g})$, порожденный $\mathfrak{h}$ (соотв. $\sigma(\mathfrak{h})$)). Диаграмма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{s}_{\mathfrak{h}} \arrow[r] & \mathbf{S}(\mathfrak{g}) \arrow[r] \arrow[d, "\eta(\mathfrak{g})"'] & \mathbf{S}(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \arrow[r] \arrow[d, "\eta(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{u}_{\mathfrak{h}} \arrow[r] & U(\mathfrak{g}) \arrow[r] & U(\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

коммутативна, и ее строки точны. Вывести отсюда, что образ $\tilde{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{h}}$ идеала $\mathfrak{s}_{\mathfrak{h}}$ при $\eta(\mathfrak{g})$ содержится в $\mathfrak{u}_{\mathfrak{h}}$ и что $\tilde{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{h}} = \mathfrak{u}_{\mathfrak{h}}$, если $\eta(\mathfrak{g})$ и $\eta(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$ инъективны в частности, когда модули $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ свободны).

в) Возьмем в качестве $\mathfrak{g}$ свободную алгебру Ли над семейством $(X_1, \ldots, X_n, H)$, где $n \geqslant 0$, а в качестве $\mathfrak{h}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, порожденный H. Показать, что $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ — свободные модули. Вывести отсюда, что в этом случае $\widetilde{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{h}} = \mathfrak{u}_{\mathfrak{h}}$. В частности, существует $x \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{h}}$, такой, что $(\eta(\mathfrak{g}))(x) = \sigma(X_1) \ldots \sigma(X_n)\sigma(H)$.

г) Вернемся к общему случаю. Показать, что $\mathfrak{u}_{\mathfrak{h}}$ порожден над K элементами вида $\sigma(x_1) \ldots \sigma(x_n)\sigma(h)$ при $n \geqslant 0$, $x_i \in \mathfrak{g}$ и $h \in \mathfrak{h}$ (заметить, что $\mathfrak{u}_{\mathfrak{h}}$ совпадает с левым идеалом, порожденным $\mathfrak{h}$). Показать, что такой элемент принадлежит $\widetilde{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{h}}$ (использовать в) и подходящий гомоморфизм некоторой свободной алгебры Ли в $\mathfrak{g}$). Вывести отсюда, что $\widetilde{\mathfrak{u}}_{\mathfrak{h}} = \mathfrak{u}_{\mathfrak{h}}$.

д) Показать, что если $\eta(\mathfrak{g})$ биективно, то таково же и $\eta(\mathfrak{g}/\mathfrak{h})$. Вывести отсюда, наконец, что для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ отображение $\eta(\mathfrak{g})$ *биективно* (представить $\mathfrak{g}$ как факторалгебру некоторой свободной алгебры Ли) и что канонический гомоморфизм

$$\omega\colon \mathbf{S}(\mathfrak{g}) \to \operatorname{gr} U(\mathfrak{g}) \quad (\text{см. гл. I, § 2, n° 6})$$

является *изоморфизмом* (теорема Пуанкаре — Биркгофа — Витта для алгебр Ли над $\mathbf{Q}$-алгебрами).

§ 3

Буква X обозначает некоторое множество.

1) а) Показать, что любой элемент $u \in A^+(X)$ записывается в виде $u = \sum_{x \in X} u_x x$, где $u_x \in A(X)$.

б) Показать, что $\{0\}$ — единственный подмодуль в $A^+(X)$, устойчивый относительно всех отображений $u \longmapsto u_x$ $(x \in X)$. (Если $\mathfrak{a}$ — некоторый такой подмодуль и если $\mathfrak{a} \neq \{0\}$, то нужно рассмотреть ненулевой элемент из $\mathfrak{a}$ минимальной степени.)

2) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, являющаяся свободным модулем; отождествим посредством $\sigma\colon \mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$ эту алгебру с ее каноническим образом в универсальной обертывающей алгебре $U\mathfrak{g}$. Пусть $U^+\mathfrak{g}$ — ядро канонического гомоморфизма $U\mathfrak{g} \to K$. Пусть i — отображение X в $\mathfrak{g}$, такое, что $i(X)$ порождает $\mathfrak{g}$ как алгебру Ли.

а) Показать, что $U^+\mathfrak{g}$ порождается множеством $i(X)$ как левый $U\mathfrak{g}$-модуль.

б) Показать, что следующие свойства эквивалентны:

(i) $\mathfrak{g}$ — свободная алгебра с системой свободных образующих $i\colon X \to \mathfrak{g}$;

(ii) семейство i является базисом левого $U\mathfrak{g}$-модуля $U^+\mathfrak{g}$.

(Импликация (i) $\Rightarrow$ (ii) следует из упражнения 1 а) если использовать изоморфизм $U\mathfrak{g} \to A(X)$. Для доказательства (ii) $\Rightarrow$ (i) применить упражнение 1 б) к ядру гомоморфизма $A(X) \to U\mathfrak{g}$, индуцированному отображением i.)

3) Пусть $x \in X$. Показать, что централизатор x в $A(X)$ является подалгеброй, порожденной x. В частности, единственными элементами алгебры $L(X)$, перестановочными с x, являются кратные элемента x. В частности, центр алгебры $L(X)$ равен нулю, если $\operatorname{Card}(X) \geqslant 2$, а центр $L(X)\Big/\Big(\sum_{n > p} L^n(X)\Big)$ равен каноническому образу $L^p(X)$ в этой факторалгебре.

¶ 4) Предположим, что K — поле характеристики $p > 0$.

а) Пусть H — некоторый базис подалгебры Ли $L(X)$ алгебры $A(X)$. Показать (используя изоморфизм $U(L(X)) \to A(X)$ и теорему Пуанкаре —

Биркгофа — Витта), что элементы h^{p^n} ($h \in H$, $n \in \mathbf{N}$) линейно независимы над K.

б) Если m — целое число $\geqslant 0$, обозначим через L_m подмодуль в $A(X)$ с базисом h^{p^n} для любого $h \in H$ и любого $n \leqslant m$. Показать, что L_m — подалгебра Ли в $A(X)$ и что если $a \in L_{m-1}$, то $a^p \in L_m$ (рассуждать индукцией по m, используя *формулы Джекобсона*; см. гл. I, § 1, упражнение 19). Вывести отсюда, что L_m не зависит от выбора H и является подалгеброй Ли алгебры $A(X)$, порожденной элементами x^{p^n} для любых $x \in X$, $n \leqslant m$.

в) Пусть $L(X, p)$ — объединение L_m по всем $m \geqslant 0$. Показать, что $L(X, p)$ является наименьшей p-подалгеброй Ли алгебры $A(X)$, содержащей X (см. гл. I, § 1, упражнение 20); в качестве ее базиса можно выбрать семейство h^{p^n} для всех $h \in H$, $n \in \mathbf{N}$.

г) Пусть $\widetilde{U}(L(X, p))$ — ограниченная универсальная обертывающая алгебра для $L(X, p)$; см. упражнение 6 из § 2 гл. I. Показать, что вложение $L(X, p)$ в $A(X)$ продолжается до *изоморфизма* $\widetilde{U}(L(X, p))$ на $A(X)$. (Использовать теорему Пуанкаре — Биркгофа — Витта, а также предыдущее упражнение.) Вывести отсюда, что $L(X, p)$ является множеством примитивных элементов из $A(x)$; см. § 1, упражнение 12.

д) Пусть f — отображение X в некоторую p-алгебру Ли $\mathfrak{g}$. Показать, что f единственным образом продолжается до p-гомоморфизма F: $L(X, p) \to \mathfrak{g}$. (Начать с продолжения f до гомоморфизма алгебры $A(X)$ в $\widetilde{U}\mathfrak{g}$.)

(p-алгебра Ли $L(X, p)$ называется *свободной p-алгеброй* Ли над множеством X.)

§ 4

В последующих упражнениях буквой G обозначается группа.

1) Пусть (G_n) — целочисленная центральная фильтрация группы G. Показать, что алгебра Ли $\operatorname{gr}(G)$ порождается $\operatorname{gr}_1(G)$ тогда и только тогда, когда $G_n = G_{n+1} \cdot C^nG$ для любого $n \geqslant 1$. Показать также, что в этом случае $G_n = G_m \cdot C^nG$ для любого $m > n$, из чего вывести, что $(G_n) = (C^nG)$, если существует целое m, такое, что $G_m = \{e\}$.

2) Пусть (G_α) — вещественная фильтрация на группе G и v — соответствующая ей функция порядка. Пусть H — подгруппа группы G.

а) Пусть $H_\alpha = H \cap G_\alpha$. Показать, что (H_α) — вещественная фильтрация на H и что соответствующая ей функция порядка является ограничением v на H. Кроме того, $H_\alpha^+ = H \cap G_\alpha^+$ и $\operatorname{gr}(H)$ можно отождествить с градуированной подгруппой группы $\operatorname{gr}(G)$.

б) Предположим, что H — нормальная подгруппа и что $v(G) \cap \mathbf{R}$ — *дискретное* подмножество в $\mathbf{R}$. Положим $(G/H)_\alpha = (G_\alpha H)/H$. Показать, что $((G/H)_\alpha)$ — вещественная фильтрация на G/H и что соответствующая ей функция порядка задается формулой

$$v_{G/H}(x) = \sup_{y \in x} v(y).$$

Показать, что для любого $\alpha \in \mathbf{R}$ точна такая последовательность:

$$0 \to \operatorname{gr}_\alpha(H) \to \operatorname{gr}_\alpha(G) \to \operatorname{gr}_\alpha(G/H) \to 0.$$

в) Сохраняя посылки б), предположим также, что (G_α) — *центральная* фильтрация. Показать, что таковы же тогда и фильтрации на H и G/H, индуцированные (G_α), и что алгебра Ли $\operatorname{gr}(G/H)$ может быть отождествлена с факторалгеброй алгебры $\operatorname{gr}(G)$ по идеалу $\operatorname{gr}(H)$.

¶ 3) Пусть (H_α) — вещественная фильтрация группы H и v_H — соответствующая ей функция порядка. Предположим, что G действует слева на H и что для любого $g \in G$ отображение $h \longmapsto g(h)$ является автоморфизмом фильтрованной группы H.

а) Если $\alpha \in \mathbf{R}$, то через G_α обозначим множество $g \in G$, таких, что

$$v_H(h^{-1}g(h)) \geqslant v_H(h) + \alpha \quad \text{для любого} \quad h \in H.$$

Показать, что (G_α) — вещественная фильтрация на G и что $G_\alpha = G$, если $\alpha \leqslant 0$. Обозначим через v соответствующую функцию порядка.

б) Предположим, что фильтрация (H_α) центральна и что $G_0^+ = G$. Показать, что (G_α) — центральная фильтрация на G. Если $\xi \in \operatorname{gr}_\alpha(G)$ и $\eta \in \operatorname{gr}_\beta(H)$, то пусть g (соотв. h) — представитель ξ (соотв. η) в G_α (соотв. H_β); показать, что образ $h^{-1}g(h)$ в $\operatorname{gr}_{\alpha+\beta}(H)$ не зависит от выбора g и h, обозначим его через $D_\xi(\eta)$; показать, что D_ξ продолжается до дифференцирования степени α алгебры Ли $\operatorname{gr}(H)$ и что $\xi \longmapsto D_\xi$ — гомоморфизм алгебры Ли $\operatorname{gr}(G)$ в алгебру Ли дифференцирований алгебры $\operatorname{gr}(H)$. Если $v_H(H) \cap \mathbf{R}$ содержится в некоторой дискретной подгруппе $\Gamma \subset \mathbf{R}$, то то же самое верно и для $v(G) \cap \mathbf{R}$, а для любого $\alpha \in \mathbf{R}$ отображение $\xi \longmapsto D_\xi$, определенное выше, инъективно.

4) Пусть H — нильпотентная группа класса c и G — группа ее автоморфизмов, действующая тривиально на $H/(H, H)$. Показать, что G — нильпотентная группа класса, не превосходящего $c-1$. (Применить упражнение 3 к нижнему центральному ряду группы H и заметить, что G действует тривиально на $\operatorname{gr}(H)$.) Показать, что если H — конечная p-группа, то такова же и G, если p — простое число (тот же метод).

5) Пусть K — поле и L — его конечное расширение Галуа с группой Галуа G. Пусть v_L — нормирование L со значениями в $\mathbf{Z}$ (*Комм. алг.*, гл. VI, § 3, n° 2), инвариантное относительно G. Если $g \in G$, то положим

$$v(g) = \sup_{x \in L^*} v_L\left(\frac{g(x) - x}{x}\right).$$

Показать, что v — функция порядка некоторой целочисленной отделимой фильтрации (G_n) группы G, такой, что $G_0 = G$ и что ограничение этой фильтрации на G_1 центрально (применить упражнение 3, беря в качестве H максимальный идеал кольца нормирования v_L). Показать, что G_1 является p-группой (соотв. единична), если поле вычетов L имеет характеристику $p > 0$ (соотв. характеристику нуль); если поля L и K обладают одним и тем же полем вычетов, то G_1 — ядро гомоморфизма, определенного в *Комм. алг.*, гл. VI, § 8, упражнение 11б).

¶ 6) Пусть $K[G]$ — групповая алгебра группы G над K и I — ядро канонического гомоморфизма $K[G] \to K$ („пополняющий идеал"). Тогда $K[G] = K \oplus I$ и базисом I является семейство элементов вида $g - 1$ для любого $g \in G - \{e\}$.

а) Если n — целое число $\geqslant 0$, то через I^n обозначим идеал из $K[G]$, равный n-й степени I. Пусть G_n — множество $g \in G$, таких, что $g - 1 \in I^n$. Показать, что (G_n) — целочисленная центральная фильтрация на G. В частности, $G_n \supset C^nG$ для любого n.

б) Показать, что если $K = \mathbf{Z}$, то отображение $g \longmapsto g - 1$ индуцирует при факторизации изоморфизм $G/(G, G)$ на I/I^2. Вывести отсюда, что $G_2 = C^2G$ [1]).

---

[1]) Известно, что если группа G свободна, то $G_n = C^nG$ для любого n; см. § 5, упражнение 1. (Известен пример группы G с $G_3 \neq C^3G$. — *Перев.*)

в) Пусть K — поле характеристики нуль и G конечна. Показать, что $I^n = I$ для любого $n \geqslant 1$.

г) Пусть K — поле характеристики $p > 0$ и G есть p-группа. Показать, что $I^n = \{0\}$ для достаточно большого n. (Показать сначала, используя *Alg.*, chap. I, p. 73, proposition 11, что любой простой $K[G]$-модуль изоморфен K, и вывести отсюда, что I — радикал в $K[G]$; значит, он нильпотентен, так как $K[G]$ конечномерна над K.

д) Предположим, что $K = \mathbf{Z}$ и что G обладает следующим свойством: для любого $g \in G$, $g \neq 1$, существуют простое число p, p-группа P и гомоморфизм $f\colon G \to P$, такие, что $f(g) \neq e$. Показать, что тогда $\bigcap_n I^n = \{0\}$. (Свести доказательство к случаю, когда $G = P$. Применяя г) к полю $\mathbf{F}_p$, убедиться в том, что существует m, для которого $I^m \subset p\mathbf{Z}[G]$ и I является прямым слагаемым в $\mathbf{Z}[G]$, что влечет за собой включение $I^m \subset pI$, откуда $\bigcap_n I^{mn} \subset \bigcap_n p^n I$, а последнее пересечение равно нулю, так как I — абелева группа конечного типа.)

7) Наделим G фильтрацией (C^nG) и предположим, что $\mathrm{gr}_1(G) = G/(G, G)$ циклична. Показать, что $\mathrm{gr}_n(G) = \{0\}$ для любого $n \geqslant 2$ (использовать предложение 5) и вывести отсюда, что $C^nG = (G, G)$ для любого $n \geqslant 2$.

8) Пусть $G = \mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$, и пусть $x = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

а) Проверить соотношения $w^4 = 1$, $w = xy^{-1}x$, $wxw^{-1} = y^{-1}$.

б) Если $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ — элемент из G, то положим $l(g) = |a| + |b|$. Показать, что $l(g) = 1$ тогда и только тогда, когда g имеет вид $y^n w^a$, где $n \in \mathbf{Z}$ и $0 \leqslant a \leqslant 3$. Если $l(g) \geqslant 2$, то показать, что существует некоторая степень h элемента x или y, такая, что $l(gh) < l(g)$. Вывести отсюда, что G *порождается* элементами $\{x, y\}$.

в) Используя а) и б), показать, что $G/(G, G)$ порождается образом ξ элемента x и что $\xi^{12} = e$ [1]). Вывести отсюда, что $C^nG = (G, G)$ для $n \geqslant 2$ (применить упражнение 7).

9) Наделим G фильтрацией (C^nG).

а) Показать, что идеал $\mathrm{gr}(G)$, порожденный $\mathrm{gr}_2(G)$, равен $\sum_{q \geqslant 2} \mathrm{gr}_q(G)$.

б) Пусть $(x_i)_{i \in I}$ — система образующих группы G, и пусть $m \geqslant 1$. Предположим, что для любого $(i, j) \in I^2$ имеет место включение $(x_i, x_j)^m \in C^3G$. Показать, что для любых $q \geqslant 2$ и $u \in C^qG$ выполняется также $u^m \in C^{q+1}G$ (использовать а)).

10) Пусть x, y — элементы из G и r, s — целые числа $\geqslant 1$. Предположим, что $(x^r, y^s) = e$.

а) Показать, что $(x, y)^{(rs)^n} \in C^{n+2}G$ для любого $n \geqslant 1$. (Можно предполагать, что G порождается элементами x, y; применить тогда упражнение 9 б), замечая, что $(x^r, x^s) \equiv (x, y)^{rs} \bmod C^3G$.)

б) Предположим, что $x^r = y^s = e$; обозначим через t наибольший общий делитель r и s. Показать, что $(x, y)^t \in C^3G$ и вывести отсюда, что $(x, y)^{t^n} \in C^{n+2}G$ для любого $n \geqslant 1$ (тем же способом).

---

[1]) Можно показать, что ξ имеет *порядок* 12.

11) Пусть H — подгруппа в G и m — некоторое целое число $\geqslant 1$. Предположим, что G порождена некоторым семейством $(x_i)_{i \in I}$ элементов, таких, что $x_i^m \in H$ для любого i.

а) Наделим H фильтрацией, индуцированной фильтрацией $(C^n G)$ группы G, и отождествим $\operatorname{gr}(H)$ с градуированной подалгеброй алгебры Ли $\operatorname{gr}(G)$; см. упражнение 2. Показать, что для любого целого $n \geqslant 0$

$$m^n \cdot \operatorname{gr}_n(G) \subset \operatorname{gr}_n(H).$$

Вывести отсюда, что для любого $z \in H \,.\, C^n G$ имеет место включение $z^{m^n} \in H \,.\, C^{n+1} G$.

б) Показать, что если G нильпотентна, то существует целое $N \geqslant 0$ (не зависящее от класса нильпотентности группы G), такое, что $z^{m^N} \in H$ для любого $z \in G$.

12) Предположим, что G нильпотентна. Пусть H — подгруппа в G и m — целое $\geqslant 1$, а x, y — элементы из G, такие, что $x^m \in H$ и $y^m \in H$. Показать, что существует целое $N \geqslant 0$, такое, что $(xy)^{m^N} \in H$. (Применить упражнение 11 к группе, порожденной $\{x, y\}$, и к ее пересечению с H.)

13) а) Пусть F — свободная группа с системой свободных образующих $\{\bar{x}, \bar{y}\}$, состоящей из двух элементов, c — целое число $\geqslant 2$ и m — целое число $\geqslant 1$. Положим $F^c = F/C^c F$ и обозначим через x, y образы $\bar{x}$, $\bar{y}$ в F^c. Пусть F_m^c — подгруппа в F^c, порожденная $\{x^m, y\}$. Показать, что существует целое $N \geqslant 0$, такое, что $z^{m^N} \in F_m^c$ для любого $z \in F^c$ (использовать упражнение 11).

б) Пусть I^c $\left(\text{соотв. } I_m^c\right)$ — нормальная подгруппа F^c $\left(\text{соотв. } F_m^c\right)$, порожденная y. Показать, что если N выбрано, как выше, и если z принадлежит I^c, то $z^{m^N} \in I_m^c$ (заметить, что F^c/I^c — бесконечная циклическая группа, порожденная образом x, и вывести отсюда, что $F_m^c / I_m^c \to F^c/I^c$ инъективно, а значит, $I_m^c = F_m^c \cap I^c$). В частности, $x y^{m^N} x^{-1} \in I_m^c$.

в) Предположим, что группа G нильпотентна. Пусть H — подгруппа в G и L — нормальная подгруппа в H. Пусть $g \in G$ и $m \geqslant 1$ таково, что $g^m \in H$. Показать, что если N достаточно велико, то $g l^{m^N} g^{-1} \in L$ для любого $l \in L$. (Если G имеет класс $< c$, то выбрать N, как в а), и использовать гомоморфизм $f\colon F^c \to G$, для которого $f(x) = g$, $f(y) = l$; заметить, что $f\left(F_m^c\right) \subset H$ $f\left(I_m^c\right) \subset L$ и применить б).)

¶ 14) Пусть P — некоторый набор простых чисел. Целое число n называется *P-числом*, если оно $\neq 0$ и если все его простые делители принадлежат P. Элемент $x \in G$ называется *P-элементом*, если существует P-число n, такое, что $x^n = e$; говорят, что G есть *P-группа* (соотв. *группа без P-кручения*), если любой (соотв. никакой отличный от e) элемент группы G является (соотв. не является) P-элементом. Говорят, что группа G *P-полна* (или *P-делима*), если для любого $x \in G$ и любого P-числа n существует $y \in G$, такой, что $x = y^n$.

Предположим, что G *нильпотентна*.

а) Пусть H — подгруппа в G и H_P — множество элементов $x \in G$, таких, что $x^n \in H$ для некоторого P-числа n. Показать, что H_P — подгруппа в G (использовать упражнение 12) и что $(H_P)_P = H_P$. Группа H_P называется *P-радикалом* (или *P-изолятором*) подгруппы H в G. Если G P-полна, то P-полна и подгруппа H_P.

б) Пусть L — нормальная подгруппа в H. Показать, что L_P — нормальная подгруппа в H_P. (Использовать упражнение 13 в) для доказательства того, что если $g \in H_P$ и $l \in L$, то $glg^{-1} \in L_P$.)

В частности, если L — нормальная подгруппа в G, то и L_P нормальна в G и G/L_P — группа без P-кручения. Вывести отсюда, что множество P-элементов из G является наименьшей нормальной подгруппой N группы G, такой, что G/N не имеет P-кручения.

в) Предположим, что G — группа без P-кручения. Пусть n — некоторое P-число и x, y из G таковы, что $x^n = y^n$. Показать, что $x = y$. (Применить упражнение 10 а) при $r = s = n$. Вывести из него, что существует P-число N, для которого $(x, y)^N = e$; так как G не имеет P-кручения, то $(x, y) = e$; тогда $(x^{-1}y)^n = e$, что и дает окончательно $x = y$.)

г) Пусть H — подгруппа в G и L — нильпотентная группа, а $f\colon H \to L$ — гомоморфизм. Пусть Γ — график f в $H \times L$, а Γ_P является P-радикалом Γ в $G \times L$. Показать, что Γ_P содержится в $H_P \times L$ и что $\mathrm{pr}_1\colon \Gamma_P \to H_P$ сюръективно, если L P-полна, и инъективно, если L без P-кручения.

Предположим, что L P-полна и без P-кручения. Показать, что тогда f продолжается единственным способом до гомоморфизма $f_P\colon H_P \to L$ и что график f_P равен Γ_P.

¶ 15) Сохраним обозначения предыдущего упражнения. Предположим, что G нильпотентна. Пусть $i\colon G \to \overline{G}$ — гомоморфизм G в нильпотентную группу $\overline{G}$. Говорят, что $(i, \overline{G})$ есть *P-пополнение* (или *P-оболочка*) группы G, если выполняются следующие условия:

(i) $\overline{G}$ P-полна и без P-кручения;

(ii) ядро i является множеством P-элементов в G;

(iii) P-радикал образа $i(G)$ в $\overline{G}$ равен $\overline{G}$.

а) Пусть $(i, \overline{G})$ есть P-пополнение G и L — нильпотентная P-полная группа без P-кручения. Показать, что для любого гомоморфизма $f\colon G \to L$ существует единственный гомоморфизм $\overline{f}\colon \overline{G} \to L$, удовлетворяющий условию $\overline{f} \circ i = f$ (свести к случаю, когда G — группа без P-кручения, и использовать упражнение 14 г)). Вывести отсюда, что если G обладает P-пополнением [1]), то оно единственно с точностью до изоморфизма.

б) Пусть $(i, \overline{G})$ есть P-пополнение G и H — подгруппа в G, а $\overline{H}$ — это P-пополнение $i(H)$ в G, причем $i_H\colon H \to \overline{H}$ — гомоморфизм, индуцированный i. Показать, что $(i_H, \overline{H})$ есть P-пополнение H.

Предположим, что H — нормальная подгруппа в G. Тогда $\overline{H}$ нормальна в $\overline{G}$; см. упражнение 14 б); показать, что если $i_{G/H}\colon G/H \to \overline{G}/\overline{H}$ — гомоморфизм, индуцированный i, то $(i_{G/H}, \overline{G}/\overline{H})$ есть P-пополнение G/H.

16) Сохраним обозначения двух предыдущих упражнений.

а) Пусть S_P — множество P-чисел и $\mathbf{Z}_P = S_P^{-1}\mathbf{Z}$ — кольцо частных $\mathbf{Z}$, определенное множеством S_P (*Комм. алг.*, гл. II, § 2, n° 1). Предположим, что G является P-полной нильпотентной группой без P-кручения; пусть $t \in \mathbf{Z}_P$, $g \in G$. Показать, что существует единственный элемент h в G, та-

---

[1]) На самом деле любая нильпотентная группа обладает P-пополнением; см. § 5, упражнение 6; см. также Lazard M., *Annales E. N. S.*, t. LXXI (1954), p. 101—190, chap. II, § 3. (См. также А. И. Мальцев, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **13** (1949), 201—202. — *Прим. перев.*)

кой, что $h^s = g^{st}$ при любом $s \in S_P$, для которого $st \in \mathbf{Z}$. Элемент h называется *t-й степенью* g и обозначается через g^t. Отображение $t \mapsto g^t$ является гомоморфизмом $\mathbf{Z}_P$ в G. Если t обратимо в $\mathbf{Z}_P$, то $g \mapsto g^t$ биективно. (Использовать упражнение 14 в).)

б) Пусть A — коммутативная группа и i — каноническое отображение A в $A_P = \mathbf{Z}_P \otimes A$. Показать, что (i, A_P) есть P-пополнение A.

в) Пусть G (соотв. $\overline{G}$) — нижняя *строго треугольная* группа матриц порядка n над кольцом k (соотв. над кольцом $k_P = k \otimes \mathbf{Z}_P$), и пусть i — гомоморфизм G в $\overline{G}$, индуцированный каноническим гомоморфизмом k в k_P (*Alg.*, chap. II, p. 145). Показать, что $(i, \overline{G})$ есть P-пополнение G.

г) Пусть G — *конечная* нильпотентная группа, т. е. прямое произведение своих силовских p-подгрупп G_p (*Alg.*, chap. I, p. 76, théorème 4). Пусть $\overline{G}$ — прямое произведение тех G_p, для которых $p \notin P$, и i — каноническая проекция G на G_p. Показать, что $(i, \overline{G})$ есть P-пополнение G.

¶ 17) Предположим, что G нильпотентна. Пусть P — множество простых чисел и $\mathfrak{B}_P(G)$ — множество нормальных подгрупп в G, конечный индекс которых является P-числом (см. упражнение 14). Пусть $\mathcal{T}_P(G)$ — топология на G, определенная базисом фильтра $\mathfrak{B}_P(G)$ (*Общ. топ.*, 1969, гл. III, § 1, n° 2, *пример*).

а) Пусть N — подгруппа конечного индекса в G, такая, что $(G:N)$ является P-числом, и N' — пересечение всех подгрупп, сопряженных с N. Показать, что $(G:N')$ есть P-число (использовать тот факт, что G/N' — произведение своих силовских подгрупп), вывести отсюда, что N открыта в $\mathcal{T}_P(G)$.

б) Пусть H — подгруппа конечного индекса в G. Показать, что $\mathcal{T}_P(H)$ совпадает с топологией, индуцированной на H топологией $\mathcal{T}_P(G)$. (Тем же способом.)

в) Пусть H — нормальная подгруппа в G, такая, что G/H изоморфна $\mathbf{Z}$ и x — представитель в G образующего G/H. Пусть $N \in \mathfrak{B}_P(H)$ и $N' = \bigcap_{n \in \mathbf{Z}} x^n N x^{-n}$. Показать, что $N' \in \mathfrak{B}_P(H)$ и $xN'x^{-1} = N'$. Показать, что если N'' — подгруппа, порожденная N' и x, то $(G:N'') = (H:N')$. Показать, что тогда $\mathcal{T}_P(H)$ индуцируется $\mathcal{T}_P(G)$.

г) Пусть G имеет конечное число образующих. Показать, что если H — подгруппа в G, то существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_k = G,$$

такая, что H_i нормальна в H_{i+1} для любых $0 \leqslant i < k$ и что H_{i+1}/H_i конечна или изоморфна $\mathbf{Z}$. Вывести отсюда, что $\mathcal{T}_P(H)$ индуцируется $\mathcal{T}_P(G)$ (использовать б) и в)).

д) В обозначениях г) пусть P' — дополнение к P в множестве простых чисел. Показать, что замыкание H относительно $\mathcal{T}_P(G)$ совпадает с P'-радикалом H в G (упражнение 14); в частности, G отделима тогда и только тогда, когда она не имеет P'-кручения.

18) *Верхний центральный ряд* (Z_iG) группы G определяется по индукции следующим образом:

(i) $Z_iG = \{e\}$, если $i \leqslant 0$;

(ii) $Z_iG/Z_{i-1}G$ — центр группы $G/Z_{i-1}G$.

Имеем $\{e\} = Z_0G \subset Z_1G \subset \ldots$ и Z_1G — центр группы G; все Z_iG — характеристические подгруппы в G.

а) Показать, что G нильпотентна класса $\leqslant c$ тогда и только тогда, когда $G = Z_cG$.

б) Показать, что $(C^nG, Z_mG) \subset Z_{m-n}G$.

в) Пусть G — нильпотентная группа без P-кручения (P — множество простых чисел; см. упражнение 14). Показать, что все Z_iG совпадают со своими P-радикалами. (Достаточно убедиться в этом в случае, когда $i = 1$; если n есть P-число и если элемент $g \in G$ таков, что $g^n \in Z_1G$, то $xg^nx^{-1} = g^n$ для любого $x \in G$. Значит, $xgx^{-1} = x$ по упражнению 14 в), откуда мы сразу выводим, что g принадлежит Z_1G.)

§ 5

В последующих упражнениях предположения и обозначения те же самые, что и в § 5. Через F мы обозначаем свободную группу $F(X)$, а g — единственный гомоморфизм F в группу Магнуса $\Gamma(X)$, такой, что $g(x) = 1 + x$ для любого $x \in X$ (см. теорему 1).

1) Наделим групповую алгебру $K[F]$ группы F фильтрацией, состоящей из степеней пополняющего идеала I (§ 4, упражнение 6).

а) Пусть $\tilde{g}$: $K[F] \to \widehat{A}(X)$ — единственный гомоморфизм алгебр, продолжающий g: $F \to \widehat{A}(X)^*$. Показать, что $\tilde{g}$ отображает I^n в идеал $\widehat{A}_n(X)$ (см. n° 1) и индуцирует при факторизации *изоморфизм* $\tilde{g}_n$ алгебры $K[F]/I^n$ на $\widehat{A}(X)/\widehat{A}_n(X)$. (Определить обратный гомоморфизм к $\tilde{g}_n$ при помощи гомоморфизма $A(X)$ в $K[F]$, отображающего x в $x - 1$ для любого $x \in X$.) Вывести отсюда, что $\widehat{A}(X)$ изоморфен *отделимому пополнению* $K[F]$ относительно топологии, определенной (I^n).

б) Предположим, что $K = \mathbf{Z}$. Показать, что фильтрация (I^n) отделима (использовать предложение 3 и упражнение 6 д) из § 4) и что фильтрация F, ею определенная (упражнение 6 а) из § 4), совпадает с фильтрацией (C^nF). Вывести, что гомоморфизм g: $\mathbf{Z}(F) \to \widehat{A}_{\mathbf{Z}}(X)$ инъективен.

2) Пусть G — группа, $K[G]$ — ее групповая алгебра, I — пополняющий идеал этой алгебры (§ 4, упражнение 6). Обозначим через ε канонический гомоморфизм $K[G]$ на K; тогда $\operatorname{Ker}(\varepsilon) = I$.

а) Пусть M — левый $K[G]$-модуль и $Z(G, M)$ — группа *скрещенных гомоморфизмов* G в M (*Alg*., chap. I, p. 135, exerc. 7). Для $f \in \operatorname{Hom}_{K[G]}(I, M)$ через f_1 обозначим отображение $g \longmapsto f(g-1)$ группы G в модуль M. Показать, что f_1 — скрещенный гомоморфизм (использовать тождество $gg' - 1 = g(g' - 1) + g - 1$ для того, чтобы показать, что $f_1(gg') = g \cdot f_1(g') + f_1(g)$) и что $f \longmapsto f_1$ — *изоморфизм* $\operatorname{Hom}_{K[G]}(I, M)$ на $Z(G, M)$.

б) Возьмем в качестве G свободную группу $F = F(X)$. Показать, что для любого отображения θ: $X \to M$ существует единственный элемент f_θ группы $Z(F, M)$, который продолжает θ. (Использовать интерпретацию $Z(F, M)$ в терминах полупрямого произведения F на M; см. *Alg*., chap. I, *там же*.) Вывести отсюда, используя а), что семейство $(x-1)_{x \in X}$ является *базисом* I как левого $K[F]$-модуля.

в) Согласно б), любой элемент $u \in K[F]$ единственным образом записывается в виде

$$u = \varepsilon(u) + \sum_{x \in X} D_x(u)(x - 1),$$

где $D_x(u) \in K[F]$, причем $D_x(u)$ равны нулю, за исключением, возможно, конечного их числа. Отображение $u \longmapsto D_x(u)$ называется *частной производной по* x. Оно характеризуется следующими свойствами:

(i) D_x есть K-линейное отображение $K[F]$ в $K[F]$;

(ii) $D_x(uv) = u \,.\, D_x(v) + \varepsilon(v) \,.\, D_x(u)$ для любых $u, v \in K[F]$;

(iii) $D_x(x) = 1$ и $D_x(y) = 0$, если $y \in X - \{x\}$. Если $n \geqslant 1$, то

$$D_x(x^n) = 1 + x + \ldots + x^{n-1},$$
$$D_x(x^{-n}) = -x^{-n} - x^{-n+1} - \ldots - x^{-1}.$$

г) Пусть ε_A — канонический гомоморфизм $A(X)$ на K. Показать, что любой элемент $u \in A(X)$ единственным способом записывается в виде

$$u = \varepsilon_A(u) + \sum_{x \in X} d_x(u) \,.\, x,$$

где $d_x(u) \in A(X)$, причем $d_x(u)$ равны нулю, за исключением, возможно, конечного их числа. Показать, что $d_x\colon u \longmapsto d_x(u)$ — эндоморфизм алгебры $A(X)$, который по непрерывности продолжается на $\hat{A}(X)$ и обладает свойствами, аналогичными свойствам (i), (ii), (iii), приведенным выше. Показать, что $d_x \circ \tilde{g} = \tilde{g} \circ D_x$, где $\tilde{g}$ — гомоморфизм $K[F]$ в $\hat{A}(X)$, продолжающий g (см. упражнение 1) [1]).

¶ 3) Сохраним обозначения упражнения 2.

а) Пусть J — правый идеал в $K[F]$, содержащийся в I, и u — элемент из I. Показать, что

$$u \in J \,.\, I \Longleftrightarrow D_x(u) \in J \quad \text{для любого} \quad x \in X.$$

В частности, элемент I принадлежит I^n $(n \geqslant 1)$ тогда и только тогда, когда все его частные производные принадлежат I^{n-1}.

б) Пусть R — нормальная подгруппа в F, $G = F/R$ и J — ядро канонического гомоморфизма $\gamma\colon K[F] \to K[G]$. Показать, что J как левый идеал (а также и как правый) порождается элементами $r - 1$, где $r \in R$. Доказать точность последовательности

$$0 \to J/(J\,.\,I) \xrightarrow{\alpha} I/(J\,.\,I) \xrightarrow{\beta} K[G] \xrightarrow{\varepsilon} K \to 0, \qquad (*)$$

где α индуцируется при факторизации включением J в I, а β индуцируется при факторизации ограничением γ на I.

в) Для любых $u \in I$, $x \in X$ обозначим через $\bar{D}_x(u)$ образ $D_x(u)$ в $K[G]$ при γ. Используя а), показать, что семейство $(\bar{D}_x)_{x \in X}$ определяет при факторизации *изоморфизм* $I/(J\,.\,I)$ на $K[G]^{(X)}$.

г) Для любого $r \in R$ пусть $\theta(r)$ — образ $r - 1$ в $J/(J\,.\,I)$. Показать, что $\theta(rr') = \theta(r) + \theta(r')$ и $\theta(yry^{-1}) = y\,.\,\theta(r)$ для любых $r, r' \in R$, $y \in F$. (Использовать тождества

$$rr' - 1 = (r-1)(r'-1) + (r-1) + (r'-1),$$
$$yry^{-1} - 1 = y(r-1)(y^{-1}+1) + y(r-1).)$$

Вывести отсюда, что θ — гомоморфизм $R/(R, R)$ на $J/(J\,.\,I)$, совместимый с действием G, и показать, что образ этого гомоморфизма порождает

[1]) Подробности относительно D_x см. в работе Fox R., *Ann. of Math.*, t. LVII (1953), p. 547—560.

K-модуль $J/(J\,.\,I)$; в случае когда $K = \mathbf{Z}$, показать, что таким образом получается *изоморфизм* $R/(R, R)$ на $J/(J\,.\,I)$ (непосредственно определить обратный гомоморфизм).

д) Пусть $(r_a)_{a \in A}$ — семейство элементов из R, порождающих R как нормальную подгруппу в F. Показать, что $\theta(r_a)$ порождают $K[G]$-модуль $J/(J\,.\,I)$.

е) Матрица $(\overline{D}_x(r_a))_{x \in X,\ a \in A}$ определяет гомоморфизм

$$\rho\colon K[G]^{(A)} \to K[G]^{(X)}$$

левых $K[G]$-модулей. Показать, что последовательность

$$K[G]^{(A)} \xrightarrow{\rho} K(G)^{(X)} \xrightarrow{\delta} K[G] \xrightarrow{\varepsilon} K \to 0 \qquad (**)$$

точна, причем δ — гомоморфизм $(u_x) \to \sum\limits_{x \in X} u_x(\gamma(x) - 1)$.

(Преобразовать точную последовательность $(*)$ при помощи уже решенных задач в), г), д) [1].)

4) Для любого $n \in \mathbf{N}$ обозначим через $\binom{T}{n}$ многочлен $T(T-1)\ldots$ $\ldots(T-n+1)/n!$. Если $f(T)$ — некоторый многочлен, то через Δf обозначим многочлен $f(T+1) - f(T)$. Понятно, что $\Delta\binom{T}{0} = \Delta 1 = 0$ и $\Delta\binom{T}{n} = \binom{T}{n-1}$, если $n \geqslant 1$.

а) Пусть $f \in \mathbf{Q}[T]$. Показать эквивалентность следующих свойств:

(i) f отображает $\mathbf{Z}$ в себя;

(ii) f является линейной комбинацией с коэффициентами из $\mathbf{Z}$ многочленов $\binom{T}{n}$;

(iii) $f(0) \in \mathbf{Z}$ и Δf отображает $\mathbf{Z}$ в себя. (Вести доказательство индукцией по $\deg(f)$, замечая при этом, что $\deg(\Delta f) - \deg(f) - 1$, если $\deg(f) \neq 0$.)

Многочлен f, обладающий перечисленными выше свойствами, называется *биномиальным многочленом*.

б) Пусть p — простое число и f — биномиальный многочлен. Показать, что f отображает кольцо $\mathbf{Z}_p$ целых p-адических чисел в себя (использовать непрерывность f и плотность $\mathbf{Z}$ в $\mathbf{Z}_p$).

в) Пусть P — некоторое множество простых чисел, S_P — множество P-чисел (§ 4, упражнение 14) и $\mathbf{Z}_P = S_P^{-1}\mathbf{Z}$. (Показать, что если f — биномиальный многочлен, то f отображает $\mathbf{Z}_P$ в себя (применить б) к простым числам, не входящим в P.)

5) Пусть $\Gamma = \Gamma(X)$ — группа Магнуса над X и (Γ_n) — ее естественная фильтрация (n° 2). Показать, что градуированная алгебра Ли, соответствующая этой фильтрации, изоморфна подалгебре Ли $\bigoplus\limits_{n \geqslant 1} A^n(X)$ алгебры $A(X)$. Если $X \neq \varnothing$, то эта алгебра не порождается элементами степени 1; вывести отсюда, что (Γ_n) не является нижним центральным рядом группы Γ.

¶ 6) Пусть P — некоторое множество простых чисел, S_P — множество P-чисел (§ 4, упражнение 14), и пусть $\mathbf{Z}_P = S_P^{-1}\mathbf{Z}$.

---

[1]) Относительно деталей этого упражнения см. Gruenberg K. W., Lecture Notes in Math., n° 143, chap. 3, а также Swan R., *J. of Algebra*, XII (1969), 585—601.

а) Предположим, что для любого $s \in S_P$ отображение $k \longmapsto sk$ является биекцией K на себя; это эквивалентно тому, что K можно наделить структурой $\mathbf{Z}_P$-алгебры.

В обозначениях упражнения 5 показать, что для любого $s \in S_P$ отображение $a \longmapsto a^s$ группы Γ в себя биективно, причем то же самое верно и для любой факторгруппы Γ/Γ_n при $n \geqslant 1$. Если $t \in \mathbf{Z}_P$ и $a \in \Gamma$ (соотв. $a \in \Gamma/\Gamma_n$), то определим a^t как в упражнении 16 из § 4; записывая a в форме $1 + \alpha$, где $\alpha \in \widehat{A}_1(X)$, показать, что

$$a^t = (1+\alpha)^t = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{t}{n} \alpha^n.$$

$\left(\text{Заметить, что коэффициенты } \binom{t}{n} \text{ принадлежат } \mathbf{Z}_P, \text{ см. упражнение 4.}\right)$

б) Предположим теперь, что $K = \mathbf{Z}_P$. Пусть c — целое число $\geqslant 1$. Отождествим группу $F^c = F/C^cF$ с подгруппой Γ/Γ_c, используя гомоморфизм, индуцируемый g при факторизации (обозначения теоремы 2). Группа Γ/Γ_c является P-полной без P-кручения и класса нильпотентности, не превосходящего $c-1$. Пусть F_P^c есть P-радикал F^c в Γ/Γ_c (§ 4, упражнение 14), i — инъекция F^c в F_P^c. Пара $\left(i, F_P^c\right)$ является *P-пополнением* F^c (§ 4, упражнение 15). Вывести отсюда, что *любая нильпотентная группа обладает P-пополнением* (заметить, что любая нильпотентная группа класса $< c$ является факторгруппой группы F^c при подходящем X, и использовать часть б) упражнения 15 из § 4).

в) Если $n \leqslant c$, то пусть $F_{P,n}^c$ — пересечение F_P^c с Γ_n/Γ_c; если $n \geqslant c$, положим $F_{P,n}^c = \{e\}$. Показать, что $F_{P,n}^c$ является P-радикалом C^nF^c в Γ/Γ_c. Фильтрация $\left(F_{P,n}^c\right)$ является целочисленной центральной фильтрацией на F_P^c; пусть $\mathrm{gr}\left(F_P^c\right)$ — градуированная алгебра, соответствующая этой фильтрации. Показать, что если $n < c$, то образ $\mathrm{gr}_n\left(F_P^c\right)$ в $\mathrm{gr}_n(\Gamma) = A^n_{\mathbf{Z}_P}(X)$ равен $S_P^{-1} \cdot L^n_{\mathbf{Z}}(X) = L^n_{\mathbf{Z}_P}(X)$. Вывести отсюда, что алгебра Ли $\mathrm{gr}\left(F_P^c\right)$ порождается своими элементами степени 1, так что $F_{P,n}^c = C^n\left(F_P^c\right)$ для любого n (§ 4, упражнение 1). Показать, что группа F_P^c порождается элементами $x^{1/s}$ для всех $x \in X$, $s \in S_P$ $\left(\text{заметить, что образы этих элементов в } \mathrm{gr}_1\left(F_P^c\right) \cong \mathbf{Z}_P^{(X)}\right.$ порождают группу $\mathrm{gr}_1\left(F_P^c\right)$, и применить следствие 3 предложения 8 из *Alg.*, chap. I, p. 70$\Big)$.

г) Пусть H — семейство Холла над X (§ 2, n° 10) и $H(c)$ — подмножество в H, состоящее из элементов длины $< c$. Для любого $m \in H(c)$ обозначим через $\varphi_c(m)$ образ в F^c коммутатора $\varphi(m)$, определенного элементом m (см. n° 4, *замечание*). Показать, что для любого $w \in F_P^c$ существует единственный элемент α из $\mathbf{Z}_P^{(H(c))}$, такой, что

$$w = \prod_{m \in H(c)} \varphi_c(m)^{\alpha(m)}.$$

$\left(\text{Использовать характеризацию } \mathrm{gr}\left(F_P^c\right), \text{ данную выше.}\right)$

7) Сохраним обозначения упражнения 6.

а) Пусть G — нильпотентная группа класса $< c$ и $(i, \overline{G})$ есть P-пополнение G. Пусть ρ: $F^c \to G$ — сюръективный гомоморфизм (такой гомоморфизм существует, если X выбрано надлежащим образом) и $\bar{\rho}$ — соответствующий гомоморфизм F_P^c в $\overline{G}$ (§ 4, упражнение 15). Гомоморфизм $\bar{\rho}$ сюръективен и отображает $C^n F_P^c = F_{P,\,n}^c$ на $C^n\overline{G}$. Показать, что $C^n\overline{G}$ есть *P-пополнение* $i\left(C^n G\right)$ *в* $\overline{G}$ и что *алгебра Ли* $\mathrm{gr}\,(\overline{G})$ *совпадает с* $\mathbf{Z}_P \otimes \mathrm{gr}\,(G)$.

б) Вывести отсюда, что группа G является P-полной и не имеет P-кручения тогда и только тогда, когда этими свойствами обладает $C^nG/C^{n+1}G$.

¶ 8) Предположим, что $K = \mathbf{Z}$, а X конечно. Для любого целого $k \geqslant 0$ обозначим через $(e_{k,\,\alpha})$ некоторый базис в $A_k(X)$.

а) Пусть $(w_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ — последовательность элементов из F. Обозначим через $w_{k,\,\alpha}(n)$ коэффициент при $e_{k,\,\alpha}$ в разложении компоненты степени k элемента $g\,(w_n) \in \widehat{A}\,(X)$. Тогда

$$g\,(w_n) = \sum_{k,\,\alpha} w_{k,\,\alpha}(n)\, e_{k,\,\alpha} \quad \text{для любого} \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Говорят, что последовательность (w_n) *типовая*, если для любой пары (k, α) функция $w_{k,\,\alpha}$: $n \longmapsto w_{k,\,\alpha}(n)$ является *биномиальным многочленом степени* $\leqslant k$; см. упражнение 4. Это условие не зависит от выбора базиса $(e_{k,\,\alpha})$. Показать, что оно эквивалентно существованию последовательности $\left(a_k\right)_{k \in \mathbf{N}}$ элементов из $\widehat{A}_{\mathbf{Q}}(X)$, такой, что $\omega\left(a_k\right) \geqslant k$ для любого k и

$$g\,(w_n) = \sum_{k=0}^{\infty} n^k a_k \quad \text{для любого} \quad n \in \mathbf{Z}.$$

б) Показать, что если (w_n) и $\left(w'_n\right)$ — две типовые последовательности то и последовательности $\left(w_n^{-1}\right)$ и $\left(w_n w'_n\right)$ типовые.

в) Пусть w — элемент C^kF для некоторого $k \geqslant 1$ и f — биномиальный многочлен степени $\leqslant k$. Показать, что $\left(w^{f(n)}\right)$ — типовая последовательность. В частности, если $z \in F$, то последовательность (z^n) степеней элемента z является z-типовой.

г) Пусть (w_n) — некоторая последовательность элементов из F. Показать, что (w_n) — типовая последовательность тогда и только тогда, когда существуют $y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots$ в F, такие, что $y_i \in C^iF$ для любого $i \geqslant 1$ и

$$w_n \equiv y_0 y_1^n \ldots y_k^{\binom{n}{k}} \mod C^{k+1}F$$

для любых $n \in \mathbf{Z}$ и $k \geqslant 1$. (Определить элементы y_i исходя из $\left(w_n\right)$ и полагая последовательно $n = 0, 1, \ldots$. Например, $w_0 = y_0$, $w_1 = y_0 y_1, \ldots$.

д) Пусть H — семейство Холла над X и (w_n) — некоторая последовательность элементов из F. Пусть $(\alpha\,(m, n))_{m \in H,\, n \in \mathbf{Z}}$ — множество целых чисел, таких, что

$$w_n \equiv \prod_{m \in H} \varphi\,(m)^{\alpha\,(m,\,n)} \mod C^cF$$

для любого $b \in \mathbf{Z}$ и любого $c \geqslant 1$ (см. n° 4, *замечание*). Показать, что (w_n) — типовая тогда и только тогда, когда для любого $m \in H$ функция

$n \longmapsto \alpha(m, n)$ является биномиальным многочленом степени $\leqslant l(m)$, где $l(m)$ — длина m[1]).

е) Последовательность (w_n) называется 1-*типовой*, если соответствующие функции $w_{k,\alpha}$ являются биномиальными многочленами степени $\leqslant k-1$. Показать, что если (w_n) — 1-типовая последовательность, то можно найти $y_i \in C^{i+1}F$ для любых $i = 0, 1, \ldots$, такие, что

$$w_n \equiv y_0 y_1^n \ldots y_k^{\binom{n}{k}} \mod C^{k+1}F$$

для любых $n \in \mathbf{Z}$ и $k \geqslant 1$.

¶ 9) Пусть X — двуэлементное множество $\{x, y\}$.

а) Показать, что существует последовательность $w_2, w_3, \ldots$ элементов из F, где $w_i \in C^iF$ для любого i, такая, что

$$(xy)^n \equiv x^n y^n w_2^{\binom{n}{2}} \ldots w_i^{\binom{n}{i}} \mod C^{i+1}F$$

для любых $n \in \mathbf{Z}$ и $i \geqslant 1$. (Применить упражнение 8 г) к последовательности $x^{-n}(xy)^n$.)

Показать, что $w_2 = y^{-1}(y^{-1}, x^{-1})\, y \equiv (x, y)^{-1} \mod C^3F$.

б) Пусть G — нильпотентная группа класса $\leqslant c$ и x, y — произвольные элементы из G. Вывести из предыдущего следующую формулу (*формула Холла*):

$$(xy)^n = x^n y^n \prod_{i=2}^{c} w_i(x, y)^{\binom{n}{i}}.$$

в) Пусть p — простое число. Показать, что существуют $u_i \in C^iF$ $(2 \leqslant i \leqslant p-1)$ и $w \in C^pF$, такие, что

$$(xy)^p = x^p y^p u_2^p \ldots u_{p-1}^p w.$$

(Использовать а), замечая, что $\binom{p}{i}$ делится на p, если $1 < i < p$.) Пусть $\bar{w}$ — образ w в $\mathrm{gr}_p(F) = L_{\mathbf{Z}}^p(X)$ и $\bar{w}_p$ — образ $\bar{w}$ в $L_{\mathbf{F}_p}^p(X)$. Показать, что $\bar{w}_p = \Lambda_p(x, y)$; см. гл. I, § 1, упражнение 19.) (Использовать вложение g группы F в $\widehat{A}(X)$ и сравнить компоненты степени p элементов $g((xy)^p)$ и $g\left(x^p y^p u_2^p \ldots u_{p-1}^p w\right)$. Первая равна $(x+y)^p$, а вторая сравнима $\mathrm{mod}\, p$ с $x^p + y^p + \bar{w}_p$, что и требовалось.)

Показать, что существуют $a \in C^2F$ и $w' \in C^pF$, такие, что

$$(xya)^p = x^p y^p w'.$$

(Использовать приведенную выше формулу, которая дает $(xy)^p$.) Вывести отсюда, что p-е степени элементов в нильпотентной группе класса p составляют подгруппу.

---

[1]) Относительно типовых последовательностей подробнее см. Lazard M., *Annales E. N. S.*, LXXI (1954), 101—190, chap. II, § 1, 2.

г) Показать, что существует последовательность $v_3, v_4, \ldots$ элементов из F, где $v_i \in C^iF$ для любого i, такая, что

$$(x^n, y) \equiv (x, y)^n v_3^{\binom{n}{2}} \ldots v_{i+1}^{\binom{n}{i}} \bmod C^{i+2}F$$

для любого $n \in \mathbf{Z}$ и $i \geqslant 1$. (Применить упражнение 8 е) к последовательности (x^n, y).)

Вывести отсюда, что если p — простое число, то существуют $t_i \in C^iF$ при $3 \leqslant i \leqslant p$ и $z \in C^{p+1}F$, такие, что

$$(x^p, y) \equiv (x, y)^p t_3^p \ldots t_p^p z.$$

Показать, что образ $\bar{z}_p$ элемента z в $L^{p+1}_{\mathbf{F}_p}(X)$ равен $(\operatorname{ad} x)^p(y)$. (Тем же способом, что и в в).)

¶ 10) Пусть p — простое число и G — группа, наделенная центральной вещественной фильтрацией (G_α). Предположим, что соотношение $x \in G_\alpha$ влечет за собой $x^p \in G_{p\alpha}$, иначе говоря, что фильтрация (G_α) *ограниченная*.

а) Показать, что алгебра Ли $\operatorname{gr}(G)$, ассоциированная с (G_α), такова что $p \cdot \operatorname{gr}(G) = \{0\}$, т. е. она может быть наделена структурой *алгебры над* $\mathbf{F}_p$.

б) Пусть $\xi \in \operatorname{gr}_\alpha(G)$ и x — представитель ξ в G_α. Показать, что образ x^p в $\operatorname{gr}_{p\alpha}(G)$ не зависит от выбора x (использовать упражнение 9 в)). Если обозначить этот образ через $\xi^{[p]}$, то можно доказать, что $\xi \mapsto \xi^{[p]}$ — линейное отображение $\operatorname{gr}_\alpha(G)$ в $\operatorname{gr}_{p\alpha}(G)$ и что $(\xi + \xi')^{[p]} = \xi^{[p]} + \xi'^{[p]} + \Lambda_p(\xi, \xi')$. (Тем же способом.)

Показать, что если $\xi \in \operatorname{gr}_\alpha(G)$ и $\eta \in \operatorname{gr}_\beta(G)$, то

$$[\xi^{[p]}, \eta] = (\operatorname{ad} \xi)^p(\eta).$$

(Использовать упражнение 9 г).)

в) Показать, что существует единственное *p-отображение* $\operatorname{gr}(G)$ в себя (гл. I, § 1, упражнение 20), которое продолжает отображения $\xi \mapsto \xi^{[p]}$, определенные на $\operatorname{gr}_\alpha(G)$. Наделенная этой структурой, $\operatorname{gr}(G)$ является *p-алгеброй Ли*, про которую говорят, что она ассоциирована с ограниченной фильтрацией (G_α).

¶ 11) а) Пусть A — фильтрованная алгебра, удовлетворяющая условиям из § 4, n° 5, и $\Gamma = A^* \cap \left(1 + A_0^+\right)$. Наделим Γ фильтрацией (Γ_α), индуцированной фильтрацией A (*там же*, предложение 2). Показать, что если K — поле характеристики $p > 0$, то (Γ_α) — *ограниченная фильтрация* (упражнение 10) и вложение $\operatorname{gr}(\Gamma)$ в $\operatorname{gr}(A)$, там же определенное (см. предложение 3), совместимо со структурами p-алгебр Ли на $\operatorname{gr}(\Gamma)$ и $\operatorname{gr}(A)$.

б) Предположим, что $K = F_p$. Применим предыдущее к фильтрованной алгебре $\widehat{A}(X)$, в которую посредством гомоморфизма g вложена группа $F = F(X)$. Фильтрация (Γ_n) группы Γ индуцирует фильтрацию (F_n) группы F, являющуюся *ограниченной*. Далее, p-алгебра Ли $\operatorname{gr}(F)$ совпадает с некоторой p-подалгеброй Ли алгебры $A(X)$, содержащей X. Вывести отсюда, что $\operatorname{gr}(F)$ содержит свободную p-алгебру Ли $L(X, p)$; см. упражнение 4 д).

в) Пусть H — семейство Холла над X; для любого целого числа i пусть H_i — множество элементов H длины i. Пусть $w \in F$ и $\alpha_i \in \mathbf{Z}^{(H_i)}$ таковы, что

$$w \equiv \prod_{i=1}^{n} \prod_{m \in H_i} \varphi(m)^{\alpha_i(m)} \bmod C^{n+1}F$$

для любого n, см. n° 4. Для любого $m \in H$ обозначим через $l(m)$ длину m, а через $q(m, w)$ наибольшую степень p, делящую $\alpha_i(m)$, где $i = l(w)$ (если $\alpha_i(m) = 0$, то положим $q(m, w) = +\infty$). Пусть $N = \inf\limits_{m \in H} (l(m) \,.\, q(m, w))$. Показать, что $\varphi(m)^{\alpha_i(m)}$ принадлежит F_N, а если $l(w) \,.\, q(m, w) > N$, то и F_{N+1}. Показать, что если $l(w) \,.\, q(m, w) = N$, то образ $\varphi(m)^{\alpha_i(m)}$ в $\mathrm{gr}_N(\widehat{A}(X)) = A^N(X)$ является ненулевым кратным $\bar{m}^{[q(m, w)]}$, где $\bar{m}$ — элемент из $L(X)$, определенный элементом m (§ 2, n° 11). Но эти элементы линейно независимы (§ 3, упражнение 4); вывести отсюда, что образ w в $\mathrm{gr}_N(F)$ не равен нулю и принадлежит $L(X, p)$, откуда следует, что $\mathrm{gr}(F) = L(X, p)$.

12) Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над полем k характеристики $p > 0$.

а) Пусть h — целое число $\leqslant p - 1$. Говорят, что $\mathfrak{g}$ удовлетворяет *h-му условию Энгеля*, если $(\mathrm{ad}\, x)^h (y) = 0$ для любой пары (x, y) элементов из $\mathfrak{g}$. Показать, что это эквивалентно тождеству

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_h} \mathrm{ad}\,(x_{\sigma(1)}) \circ \ldots \circ \mathrm{ad}\,(x_{\sigma(h)}) = 0$$

для любых $x_1, \ldots, x_h$ из $\mathfrak{g}$ (применить формулу $(\mathrm{ad}\, x)^h = 0$ к линейным комбинациям x_i).

б) Пусть x, y — элементы из $\mathfrak{g}$, такие, что $\Lambda_p(ax, by) = 0$ для любых a, b из k. Показать, что если $\Lambda_p^{r,\, s}$ — биоднородная компонента Λ_p бистепени (r, s), то $\Lambda_p^{r,\, s}(x, y) = 0$ для любой пары (r, s). Вывести отсюда (полагая $r = p - 1$, $s = 1$), что $(\mathrm{ad}\, x)^{p-1}(y) = 0$. В частности, если $\Lambda_p(x, y) = 0$ для любых x, y из $\mathfrak{g}$, то алгебра Ли $\mathfrak{g}$ удовлетворяет $(p - 1)$-му условию Энгеля.

в) Пусть $\mathfrak{c}$ — центр $\mathfrak{g}$. Предположим, что $(\mathrm{ad}\, x)^p = 0$ для любого $x \in \mathfrak{g}$. Показать, что $\mathfrak{g}/\mathfrak{c}$ удовлетворяет $(p - 1)$-му условию Энгеля. (Показать, что $\Lambda_p(\mathrm{ad}\, x, \mathrm{ad}\, y) = 0$ для любых x, y из $\mathfrak{g}$ и применить б) к алгебре Ли $\mathrm{ad}\, \mathfrak{g} = \mathfrak{g}/\mathfrak{c}$.)

г) Пусть G — группа, в которой $x^p = 1$ для любого $x \in G$, и пусть (G_α) — центральная вещественная фильтрация на G. Фильтрация (G_α) *ограниченная* (упражнение 10), и $\mathrm{gr}(G)$ является p-алгеброй Ли с нулевым p-отображением. Вывести отсюда, что $\mathrm{gr}(G)$ удовлетворяет $(p - 1)$-му условию Энгеля [1]).

§ 6

1) Показать, что $\exp(U)\exp(V)\exp(-U) = \exp\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathrm{ad}\, U)^n (V)\right)$.

Вывести отсюда, что

$$H(U, H(V, -U)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathrm{ad}\, U)^n (V) = (\exp(\mathrm{ad}\, U))(V).$$

2) Показать, что $H(U, V) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\mathrm{ad}\, U)^n (H(V, U))$. (Применить упражнение 1, замечая, что $H(U, H(H(V, U), -U)) = H(U, V)$.)

[1]) Относительно свойств алгебр Ли, удовлетворяющих условию Энгеля, и их приложений к „ослабленной проблеме Бернсайда“ см. Кострикин А. И., *Изв. АН СССР*, т. 23 (1959), стр. 3—34.

3) Положим $M(U, V) = H(-U, U+V)$. Тогда $\exp(M(U, V)) = \exp(-U)\exp(U+V)$. Обозначим через $M_1(U, V)$ (соотв. $H_1(U, V)$) сумму биоднородных компонент ряда M (соотв. ряда H), степень которого относительно V равна 1.

а) Показать, что

$$M_1(U, V) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} (\operatorname{ad} U)^n (V) = (f(\operatorname{ad} U))(V),$$

где $f(T) = (1 - e^{-T})/T$.

(То же рассуждение, что и в доказательстве предложения 5. Можно также ограничиться предложением 5, если использовать тождество

$$\exp(U)\exp(M(U, V)) \,.\, \exp(-U) = \exp(H(U+V, -U))$$

в сочетании с упражнением 1.)

б) Показать, что $H(U, M(U, V)) = U + V$. Вывести отсюда, что $H_1(U, M_1(U, V)) = V$.

в) Положим $g(T) = 1/f(T) = 1 + T/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} b_{2n} T^{2n}$, где b_{2n} — *числа Бернулли* (*Теор. функ. действ. пер.*, гл. VI, § 1, n° 4). Показать, что

$$H_1(U, V) = (g(\operatorname{ad} U))(V) = V + \frac{1}{2}[U, V] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} b_{2n} (\operatorname{ad} U)^{2n}(V).$$

Получить отсюда первые члены разложения $H_1(U, V)$:

$$H_1(U, V) = V + \frac{1}{2}(\operatorname{ad} U)(V) + \frac{1}{12}(\operatorname{ad} U)^2(V) - \frac{1}{720}(\operatorname{ad} U)^4(V) + \\ + \frac{1}{30\,240}(\operatorname{ad} U)^6(V) - \ldots$$

г) Показать, что сумма биоднородных компонент в $H(U, V)$, имеющих степень 1 по переменному U, является рядом

$$U + \frac{1}{2}[U, V] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} b_{2n} (\operatorname{ad} V)^{2n}(U).$$

Применить в) к $H(V, U)$ и использовать упражнение 2 для перехода от $H(V, U)$ к $H(U, V)$.)

д) Пусть W — еще одно переменное и $X(U, V, W)$ — сумма триоднородных компонент ряда $H(U, V+W)$, имеющих степень 1 по W. Показать, что

$$X(U, H_1(V, W)) = H_1(H(U, V), W).$$

Использовать тождество $H(U, H(V, W)) = H(H(U, V), W)$.) Вывести из него, что

$$X(U, V, W) = (g(\operatorname{ad} H(U, V)) \circ f(\operatorname{ad} V))(W).$$

¶ 4) Пусть X — конечное множество и $\hat{L} = \hat{L}(X)$. Наделим $\hat{L}$ законом композиции Хаусдорфа $(a, b) \longmapsto a \boxplus b$, который мы обозначим просто через ab. Если $t \in K$, $a \in \hat{L}$, то положим $a^t = ta$.

а) Пусть $\mathscr{H}$ — семейство Холла над X. Если $m \in \mathscr{H}$, то через m_L обозначим соответствующий элемент алгебры Ли $L(X)$ (§ 2, n° 11), а через $m_{\mathscr{H}}$ — базисный коммутатор группы $\widehat{L}$, определенный элементом m (§ 5, n° 4, *замечание*). Если l — длина m, то показать, что $m_{\mathscr{H}} = m_L + \mu$, где μ имеет степень $\geqslant l+1$ (рассуждать индукцией по l). Вывести отсюда, что любой элемент w группы $\widehat{L}$ может быть единственным образом записан в виде

$$w = \prod_{m \in \mathscr{H}} m_{\mathscr{H}}^{\alpha(m)},$$

где $\alpha(m) \in K$, причем это произведение в топологической группе $\widehat{L}$ сходится.

б) Пусть $\mathbf{P}$ — множество всех простых чисел, а c — целое число $\geqslant 1$. Положим $K = \mathbf{Q}$. Показать, что группа $\widehat{L}/\widehat{L}_c$ совпадает с $\mathbf{P}$-пополнением $F^c_{\mathbf{P}}$ группы $F^c = F(X)/C^cF(X)$, см. § 5, упражнение 6.

в) Положим теперь X равным двуэлементному множеству $\{U, V\}$. Показать, что существуют два семейства рациональных чисел $\alpha(m)$, $\beta(m)$, такие, что

$$U + V = \prod_{m \in \mathscr{H}} m_{\mathscr{H}}^{\alpha(m)},$$

$$[U, V] = \prod_{m \in \mathscr{H}} m_{\mathscr{H}}^{\beta(m)}.$$

Например,

$$U + V = U \,.\, V \,.\, (U, V)^{-1/2} \ldots,$$

$$[U, V] = (U, V) \ldots .$$

г) Пусть $\mathfrak{g}$ — нильпотентная $\mathbf{Q}$-алгебра, наделенная законом композиции Хаусдорфа. Пусть u, v — элементы из $\mathfrak{g}$. Показать, что

$$u + v = \prod_{m \in \mathscr{H}} m_{\mathscr{H}}(u, v)^{\alpha(m)},$$

$$[u, v] = \prod_{m \in \mathscr{H}} m_{\mathscr{H}}(u, v)^{\beta(m)},$$

где α и β — определенные выше семейства рациональных чисел (*формула обращения Хаусдорфа*). (Использовать непрерывный гомоморфизм $\varphi\colon \widehat{L} \to \mathfrak{g}$, такой, что $\varphi(U) = u$, $\varphi(V) = v$, и заметить, что он является также и гомоморфизмом относительно закона композиции Хаусдорфа.)

д) Пусть G — полная нильпотентная группа без кручения (т. е. $\mathbf{P}$-полная и без $\mathbf{P}$-кручения). Если $u \in G$ и $t \in \mathbf{Q}$, то u^t определено (§ 4, упражнение 16). Если $u \in G$, $v \in G$, то определим $u + v$ и $[u, v]$ формулами из пункта г). Показать, что в этом случае G оказывается наделенной структурой нильпотентной *$\mathbf{Q}$-алгебры Ли* и что закон композиции Хаусдорфа на этой алгебре является законом композиции исходной группы G (проверить эти утверждения в случае, когда G — группа $F^c_{\mathbf{P}}$ (см. б)) и перейти к общему случаю, используя гомоморфизмы $F^c_{\mathbf{P}}$ в G).

Пусть f — отображение G в полную нильпотентную группу без кручения G'. Показать, что f — гомоморфизм групп тогда и только тогда, когда он является гомоморфизмом алгебр Ли. (Закон композиции Хаусдорфа индуцирует, таким образом, *изоморфизм* „категории“ нильпотентных $\mathbf{Q}$-алгебр Ли на „категорию“ полных нильпотентных групп без кручения.)

5) Пусть $\mathfrak{g}$ — нильпотентная $\mathbf{Q}$-алгебра Ли, которая наделена групповым законом композиции Хаусдорфа, обозначаемым через $(x, y) \longmapsto x \,.\, y$.

а) Показать, что если $x \in \mathfrak{g}$, $y \in \mathfrak{g}$, то

$$x \,.\, y \,.\, x^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (\operatorname{ad} x)^n (y).$$

(Использовать упражнение 2.)

б) Пусть $\mathfrak{h}$ — подмножество в $\mathfrak{g}$. Показать, что $\mathfrak{h}$ — подалгебра Ли (соотв. идеал) алгебры $\mathfrak{g}$ тогда и только тогда, когда оно является изолированной подгруппой (соотв. изолированной нормальной подгруппой) группы $\mathfrak{g}$. (Использовать формулы упражнения 4 г) для перехода от композиции в группе к композиции в алгебре Ли.)

в) Допустим, что $\mathfrak{h}$ — подгруппа группы $\mathfrak{g}$. Показать, что ее $\mathbf{P}$-радикал равен $\mathbf{Q}\mathfrak{h}$.

г) Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Ли алгебры $\mathfrak{g}$. Показать, что централизатор (соотв. нормализатор) $\mathfrak{h}$ в группе $\mathfrak{g}$ является множеством $x \in \mathfrak{g}$, таких, что $(\operatorname{ad} x)(\mathfrak{h}) = 0$ (соотв. $(\operatorname{ad} x)(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{h}$).

д) Показать, что нижний центральный ряд алгебры Ли $\mathfrak{g}$ совпадает с нижним центральным рядом группы $\mathfrak{g}$ и что ассоциированная градуированная алгебра Ли $\operatorname{gr}(\mathfrak{g})$ — одна и та же „с точки зрения группы“ и „с точки зрения алгебры Ли“.

¶ 6) Пусть G — конечно порожденная нильпотентная группа без кручения. Показать, что если n достаточно велико, то группу G можно вложить в нижнюю строго треугольную группу порядка n над $\mathbf{Z}$. (Пусть $(i, \overline{G})$ является $\mathbf{P}$-пополнением G (см. § 5, упражнение 6); наделенная каноническим образом структурой алгебры Ли (упражнение 4), $\overline{G}$ является конечномерной нильпотентной алгеброй Ли над полем $\mathbf{Q}$. Применить к $\overline{G}$ теорему Адо (гл. I, § 7) и вывести из нее возможность вложения $\overline{G}$ в строго треугольную группу над $\mathbf{Q}$. Перейти от $\mathbf{Q}$ к $\mathbf{Z}$ сопряжением подходящей целочисленной матрицей.)

§ 7

1) Пусть $\mathfrak{g}$ — полная нормированная алгебра Ли над K, такая, что $\|[x, y]\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ для любых x, y из $\mathfrak{g}$. Обозначим через Θ множество $x \in \mathfrak{g}$, таких, что $\|x\| < \frac{1}{3} \log \frac{3}{2}$. Если x, y принадлежат Θ, то $h(x, y) \in \Theta$, см. n° 2.

а) Положим $f(T) = (1 - e^{-T})/T$ и $g(T) = 1/f(T)$. Ряд f сходится на всей комплексной плоскости, а ряд g — в открытом круге радиуса 2π (см. *Теор. функц. действ. пер.*, гл. VI, § 2, n° 3). Вывести отсюда, что если $z \in \Theta$, то $f(\operatorname{ad} z)$ и $g(\operatorname{ad} z)$ определены и что это взаимно обратные элементы из $\mathscr{L}(\mathfrak{g}; \mathfrak{g})$.

б) Пусть $D_2(h(x, y))$ — вторая частная производная функции h в точке (x, y) области $\Theta \times \Theta$ (*Мн. Св. рез.*, 1.6.2). Она является элементом $\mathscr{L}(\mathfrak{g}; \mathfrak{g})$. Показать, что

$$D_2(h(x, y)) = g(\operatorname{ad} h(x, y)) \circ f(\operatorname{ad} y).$$

(Использовать упражнение 3 д) из § 6 для доказательства этой формулы, в случае когда x, y достаточно близки к нулю, и перейти к общему случаю, используя аналитическое продолжение.)

Показать, что формула

$$f(\operatorname{ad} h(x, y)) \circ D_2 h(x, y) = f(\operatorname{ad} y)$$

верна в любой точке абсолютной сходимости формального ряда $\widetilde{H}$ (см. предложение 1).

§ 8

Предположим, что характеристика p поля вычетов K не равна нулю. Обозначим через $\mathfrak{o}_K$ кольцо нормирования v поля K.

1) а) Элемент π из K называется допустимым, если $v(\pi)=\theta$ и $\pi^{p-1}/p \equiv -1 \pmod{\pi\mathfrak{o}_K}$. (Заметить, что $\pi^{p-1}/p \in \mathfrak{o}_K$, так как $v(\pi)=\theta$.)

Показать, что существует поле K, удовлетворяющее условиям этого параграфа и содержащее допустимый элемент (присоединить к $\mathbf{Q}_p$ корень $(p-1)$-й степени из $-p$).

б) Пусть π — допустимый элемент поля K. Рассмотрим следующие формальные ряды с коэффициентами из K:

$$e_\pi(U)=\frac{1}{\pi}e(\pi U)=\sum_{n=1}^{\infty}\pi^{n-1}U^n/n!,$$

$$l_\pi(U)=\frac{1}{\pi}l(\pi U)=\sum_{n=1}^{\infty}(-\pi)^{n-1}U^n/n.$$

Показать, что эти ряды взаимно обратны и что их коэффициенты принадлежат $\mathfrak{o}_K$ (использовать лемму 2).

в) Пусть $\{U, V\}$ — двуэлементное множество и $H(U, V)$ — ряд Хаусдорфа. Положим

$$H_\pi(U, V)=\frac{1}{\pi}H(\pi U, \pi V).$$

Тогда $H_\pi(U, V)\in\widehat{L}_K(\{U, V\})$.

Показать, что

$$H_\pi(U, V)=l_\pi(e_\pi(U)+e_\pi(V)+\pi e_\pi(U)e_\pi(V)).$$

Вывести отсюда, что $H_\pi\in\widehat{L}_{\mathfrak{o}_K}(\{U, V\})$, т. е. что коэффициенты H_π принадлежат $\mathfrak{o}_K$; получить отсюда еще одно доказательство предложения 1.

г) Обозначим через $\widetilde{e}_\pi$, $\widetilde{l}_\pi$ и $\widetilde{H}_\pi$ ряды, получающиеся из e_π, l_π и H_π редукцией по модулю $\pi\mathfrak{o}_K$; их коэффициенты принадлежат кольцу $\mathfrak{o}_K/\pi\mathfrak{o}_K$.

Показать, что $\widetilde{l}_\pi(U)=U-U^p$ (заметить, что $v_p(n)<(n-1)\theta$, если $n\neq 1, p$). Вывести отсюда, что

$$\widetilde{e}_\pi(U)=U+U^p+\ldots+U^{p^n}+\ldots$$

и что

$$\widetilde{H}_\pi(U, V)=\widetilde{e}_\pi(U)+\widetilde{e}_\pi(V)-(\widetilde{e}_\pi(U)+\widetilde{e}_\pi(V))^p,$$

откуда, кроме того,

$$\widetilde{H}_\pi(U, V)=U+V-\Lambda_p\left(\sum_{n=0}^{\infty}U^{p^n}, \sum_{n=0}^{\infty}V^{p^n}\right),$$

где Λ_p определено формулой

$$\Lambda_p(U, V)=(U+V)^p-U^p-V^p, \text{ см. гл. I, § 1, упражнение 19.}$$

в частности, $\widetilde{H}_\pi(U, V)$ принадлежит $\widehat{L}_{\mathbf{F}_p}(\{U, V\})$ и его однородная компо-

нента степени p равна $-\Lambda_p(U, V)$. Имеем

$$\widetilde{H}_\pi(U, V) = \widetilde{H}_\pi(V, U),$$
$$\widetilde{H}_\pi(U, \widetilde{H}_\pi(V, W)) = \widetilde{H}_\pi(\widetilde{H}_\pi(U, V), W) \text{ в } \hat{L}_{\mathbf{F}_p}(\{U, V, W\}),$$

где W — некоторая третья переменная.

д) Пусть $C(U, V) = H(-U, H(-V, H(U, V)))$ (*коммутатор Хаусдорфа*). Тогда $\exp(C(U, V)) = \exp(-U)\exp(-V)\exp(U)\exp(V)$. Положим

$$C_\pi(U, V) = \frac{1}{\pi} C(\pi U, \pi V).$$

Показать, что коэффициенты $C_\pi(U, V)$ принадлежат $\pi\mathfrak{o}_K$ (использовать то, что $\widetilde{H}_\pi(U, V) = \widetilde{H}_\pi(V, U)$) [1]).

2) Известно (§ 6, упражнение 3), что если $n \geqslant 2$, то компонента ряда $H(U, V)$ бистепени $(n, 1)$ равна $\frac{1}{n!} b_n (\operatorname{ad} U)^n (V)$, где b_n есть n-е число Бернулли. Вывести отсюда и из предложения 1 неравенство

$$v_p(b_n/n!) \leqslant n/(p-1).$$

Получить этот результат также при помощи теоремы Клаузена—фон Штаудта (*Теор. функц. действ. пер.*, гл. VI, § 2, упражнение 6) и показать, что равенство выполняется в том и только том случае, когда $S(n) = p - 1$.

3) Предположим, что K содержит примитивный корень p-й степени из единицы w. Положим $\pi = w - 1$. Используя формулу

$$w^i - 1 = \pi(1 + w + \ldots + w^{i-1}),$$

показать, что $v(w^i - 1) = v(\pi)$ для $1 \leqslant i \leqslant p - 1$ и что

$$\frac{w^i - 1}{\pi} \equiv i \pmod{\pi}.$$

При помощи формулы $p = \prod_{i=1}^{p-1} (w^i - 1)$ вывести отсюда, что π *допустимо* (упражнение 1).

¶ 4) Пусть c — целое число $\geqslant 1$ и P — множество простых чисел, содержащее все простые числа $\leqslant c$. Пусть $\mathbf{Z}_P = S_P^{-1}\mathbf{Z}$ (§ 4, упражнение 16). Показать, что члены степени $\leqslant c$ ряда Хаусдорфа $H(U, V)$ принадлежат $L_{\mathbf{Z}_P}(\{U, V\})$. Вывести отсюда, что если $\mathfrak{g}$ — нильпотентная $\mathbf{Z}_P$-алгебра Ли класса $\leqslant c$, то закон композиции $(u, v) \longmapsto H(u, v)$ превращает $\mathfrak{g}$ в нильпотентную P-полную группу без P-кручения, класс нильпотентности которой не превосходит c. Показать, что, обратно, любая группа, обладающая этими свойствами, может быть получена таким способом. (Использовать формулу обращения Хаусдорфа (см. § 6, упражнение 4) и доказать, что показатели $\alpha(m)$ и $\beta(m)$, фигурирующие в ней, принадлежат $\mathbf{Z}_P$, когда $l(m) \leqslant c$.)

В частности, любая p-группа порядка p^n и класса $< p$ получается при помощи умножения Хаусдорфа из нильпотентной $\mathbf{Z}$-алгебры Ли класса $< p$, содержащей p^n элементов. (Взять за P множество простых чисел, отличных от p.)

---

[1]) Относительно деталей этого упражнения см. Lazard M., *Bull. Soc. Math. France*, t. XCI (1963), p. 435—451.

Дополнение

1) Пусть Φ_n — многочлен деления круга на n частей (*Alg.*, chap. V, § 11, n° 2). Используя формулу

$$X^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d(X),$$

показать, что

$$\Phi_n(X) = \prod_{d \mid n} (X^{n/d} - 1)^{\mu(d)}.$$

(Применить формулу обращения Мёбиуса к мультипликативной группе поля $\mathbf{Q}(X)$.)

2) Пусть D — расширенная алгебра моноида $\mathbf{N}^*$ (*Alg.*, chap. III, p. 27). Если $n \in \mathbf{N}^*$, то через n^ω обозначим его образ в D, так что $1^\omega = 1$ и $(nm)^\omega = n^\omega m^\omega$ для любых n, m из $\mathbf{N}^*$ [1]). Любой элемент f из D единственным образом записывается в виде $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^\omega$, где $a_n \in K$.

а) Пусть $f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^\omega$ — элемент из D. Показать, что f обратим в D тогда и только тогда, когда коэффициент a_1 обратим в K. В частности, если K — локальное кольцо, то и D локально.

б) Положим $\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} n^\omega$ и $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^\omega$. Показать, что ζ и μ взаимно обратны. Вывести отсюда, что если $s = \sum_n s(n) n^\omega$ и $t = \sum_n t(n) n^\omega$ — два элемента из D, то соотношения $s = \zeta t$ и $t = \mu s$ эквивалентны (вариант формулы обращения Мёбиуса).

в) Пусть P — множество простых чисел. Показать, что семейство элементов $(1 - p^\omega)$ при $p \in P$ мультипликативно в D и что

$$\mu = \prod_{p \in P} (1 - p^\omega) \quad \text{и} \quad \zeta = \prod_{p \in P} \frac{1}{1 - p^\omega}.$$

---

[1]) Часто вместо ω пишут $-s$; тогда элементы алгебры D называются *формальными рядами Дирихле* с коэффициентами в K.

ГЛАВА III

ГРУППЫ ЛИ

На протяжении всей главы K означает либо нормированное поле $\mathbf{R}$ *вещественных чисел, либо нормированное поле* $\mathbf{C}$ *комплексных чисел, либо ультраметрическое полное недискретное поле. Начиная с § 4, мы предполагаем, что K имеет характеристику* 0, *в § 6 — что $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, а в § 7 — что K есть ультраметрическое поле. Если не утверждается противное, все рассматриваемые многообразия, алгебры и векторные пространства определены над K. Напомним, что когда говорится о многообразии класса C^r, то $r \in N_K$, т. е. $r = \omega$, если $K \neq \mathbf{R}$, и $1 \leqslant r \leqslant \omega$, если $K = \mathbf{R}$.*

Соглашения о нормах, нормируемых пространствах и нормированных пространствах — те же, что в *Мн. Св. рез.*

Напомним, что *нормируемой алгеброй* над K называется (не обязательно ассоциативная) алгебра A над K, наделенная топологией $\mathcal{T}$, обладающей следующими свойствами:

1) $\mathcal{T}$ может быть определена некоторой нормой;

2) отображение $(x, y) \mapsto xy$ из $A \times A$ в A непрерывно.

Через $\mathrm{Aut}(A)$ обозначается группа бинепрерывных автоморфизмов алгебры A. Всякая алгебра конечной размерности над K является нормируемой алгеброй относительно канонической топологии. *Нормированной алгеброй* над K называется алгебра A над K, наделенная такой нормой, что $\|xy\| \leqslant \|x\| \|y\|$, каковы бы ни были x, y из A; алгебра A, наделенная топологией, определяемой этой нормой, есть нормируемая алгебра. Если A — нормируемая алгебра, на A существует норма, определяющая ее топологию и превращающая A в нормированную алгебру.

Если G — группа, через e_G, или просто e, обозначается единичный элемент в G. Для $g \in G$ через $\gamma(g)$, $\delta(g)$ и $\mathrm{Int}(g)$ обозначаются отображения $g' \mapsto gg'$, $g' \mapsto g'g^{-1}$ и $g' \mapsto gg'g^{-1}$ из G в G. Если f — отображение из G в множество E, через $\check{f}$ обозначается отображение $g \mapsto f(g^{-1})$ из G в E.

§ 1. Группы Ли

1. Определение группы Ли

Пусть G — множество. Структура группы и структура аналитического K-многообразия на G называются *согласованными*, если выполнено следующее условие:

(GL) отображение $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ из $G \times G$ в G аналитично.

Определение 1. *Группой Ли над K называется множество G, наделенное структурой группы и структурой аналитического K-многообразия, причем эти структуры согласованы.*

Группа Ли над $\mathbf{R}$ (соотв. $\mathbf{C}$, $\mathbf{Q}_p$) называется вещественной (соотв. комплексной, p-адической) группой Ли.

Пусть группа G наделена структурой аналитического многообразия. Для элементов g, h, g_0, h_0 из G справедлива формула

$$gh^{-1} = (g_0 h_0^{-1}) h_0 \left((g_0^{-1} g)(h_0^{-1} h)^{-1} \right) h_0^{-1}. \tag{1}$$

Отсюда следует, что G есть группа Ли тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:

(GL_1) для всякого $g_0 \in G$ отображение $g \mapsto g_0 g$ из G в G аналитично;

(GL_2) для всякого $g_0 \in G$ отображение $g \mapsto g_0 g g_0^{-1}$ из G в G аналитично в некоторой открытой окрестности элемента e;

(GL_3) отображение $(g, h) \mapsto gh^{-1}$ из $G \times G$ в G аналитично в некоторой открытой окрестности элемента (e, e).

Пусть G — группа Ли. Для всякого $g \in G$ отображения $\gamma(g)$ и $\delta(g)$ суть автоморфизмы многообразия G. Отсюда следует, что это многообразие чистое (*Мн. Св. рез.*, 5.1.7). В частности, размерность многообразия G в g равна $\dim G$ для всякого $g \in G$ (напомним, что $\dim G$ есть целое число $\geqslant 0$ или $+\infty$).

Поскольку всякое аналитическое отображение непрерывно, группа Ли является топологической группой относительно топологии, лежащей ниже ее структуры многообразия. Пусть G — множество. Структура топологической группы и структура аналитического K-многообразия на G называются *согласованными*, если структура группы и структура многообразия согласованы, а топология в G есть топология, лежащая ниже структуры многообразия.

Лемма 1. *Пусть G — группа Ли, U — открытая окрестность элемента e, E — полное нормированное пространство, φ: $U \to E$ — карта многообразия G. Существует такая окрестность W элемента e, содержащаяся в U, что $\varphi \mid W$ есть изоморфизм окрестности W (наделенной правой равномерной структурой) на ее образ $\varphi(W)$ (наделенный равномерной структурой, индуцированной равномерной структурой пространства E).*

Можно предположить, что $\varphi(e) = 0$. Пусть $U' = \varphi(U)$ и ψ: $U' \to U$ — отображение, обратное к φ. Пусть V — открытая симметричная окрестность элемента e, такая, что $V^2 \subset U$, и положим $V' = \varphi(V)$. Определим отображения θ_1, θ_2 из $V' \times V'$ в $V' \times U'$ следующим образом:

$$\theta_1(x, y) = \left(x, \varphi\left(\psi(x)\psi(y)^{-1}\right)\right),$$
$$\theta_2(x, y) = \left(x, \varphi\left(\psi(y)^{-1}\psi(x)\right)\right).$$

Легко проверить, что $\theta_2(\theta_1(x, y)) = \theta_1(\theta_2(x, y)) = (x, y)$ для x, y, достаточно близких к 0. С другой стороны, θ_1 и θ_2 аналитичны и, следовательно, строго дифференцируемы в (0, 0). Поэтому (*Мн. Св. рез.*, 1.2.2) существуют окрестность W' точки 0 в V' и константы $a > 0$, $b > 0$, такие, что

$$a\left(\|x_1 - x_2\| + \|\varphi\left(\psi(x_1)\psi(y_1)^{-1}\right) - \varphi\left(\psi(x_2)\psi(y_2)^{-1}\right)\|\right) \leqslant$$
$$\leqslant \|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\| \leqslant$$
$$\leqslant b\left(\|x_1 - x_2\| + \|\varphi\left(\psi(x_1)\psi(y_1)^{-1}\right) - \varphi\left(\psi(x_2)\psi(y_2)^{-1}\right)\|\right),$$

каковы бы ни были x_1, x_2, y_1, y_2 из W'. Полагая $x_1 = x_2 = y_2$, получаем

$$a\varphi\|\left(\psi(x_1)\psi(y_1)^{-1}\right)\| \leqslant \|x_1 - y_1\| \leqslant b\|\varphi\left(\psi(x_1)\psi(y_1)^{-1}\right)\|. \qquad (2)$$

Для $\delta > 0$ обозначим через N_δ множество таких пар $(x, y) \in W' \times W'$, что $\|x - y\| \leqslant \delta$. Множества N_δ образуют фундаментальную систему окружений в W'. Положим $W = \psi(W')$. Пусть M_δ — множество пар $(u, v) \in W \times W$, таких, что $\|\varphi(uv^{-1})\| \leqslant \delta$. Множества M_δ образуют фундаментальную систему окружений в W относительно правой равномерной структуры. Поэтому соотношение (2) показывает, что

$$N_\delta \subset (\varphi \times \varphi)\left(M_{a^{-1}\delta}\right), \quad (\varphi \times \varphi)(M_\delta) \subset N_{b\delta};$$

следовательно, W обладает требуемым свойством.

Предложение 1. *Группа Ли является метризуемой и полной топологической группой.*

Поскольку e обладает открытой окрестностью, гомеоморфной открытому шару некоторого нормированного пространства, он обладает счетной фундаментальной системой окрестностей, пересечение которых есть $\{e\}$. Следовательно, G метризуема (*Общ. топ.*, 1969, гл. III, § 1, следствие предложения 2, и *Общ. Топ.*, гл. IX, § 3, предложение 1). По лемме 1 существует окрестность элемента e, полная относительно правой равномерной структуры, и потому группа G полная (*Общ. топ.*, 1969, гл. III, § 3, предложение 4).

Предложение 2. *Пусть G — группа Ли.*

(i) *Если $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, то G локально связна.*

(ii) *Если K отлично от $\mathbf{R}$ и $\mathbf{C}$, то G раздроблена* (*Общ. топ.*, гл. IX, § 6 определение 5).

(iii) *Предположим, что K локально компактно. Группа G локально компактна тогда и только тогда, когда G имеет конечную размерность.*

(iv) *Если G порождена подпространством, топология которого допускает счетный базис, то топология группы G допускает счетный базис.*

Пусть U — некоторая окрестность элемента e. Существует открытая окрестность U_1 элемента e, содержащаяся в U и гомеоморфная открытому шару нормированного пространства E над K. Если $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, то U_1 связна, что доказывает (i). Предположим, что поле K ультраметрическое. Существует окрестность U_2 элемента e, замкнутая в G и такая, что $U_2 \subset U_1$. Далее, существует окрестность U_3 элемента e, такая, что $U_3 \subset U_2$, и такая, что U_3 открыта и замкнута в U_1. Тогда U_3 замкнута в U_2 и, стало быть, в G и открыта в U_1, а значит, в группе Ли G. Это доказывает утверждение (ii). Для локальной компактности группы G необходимо и достаточно, чтобы E было локально компактно; если K локально компактно, это сводится к тому, чтобы E имело конечную размерность (*Топ. вект. простр.*, гл. I, § 2, теорема 3), откуда следует (iii). Предположим, что G порождена подмножеством V, и положим $W = V \cup V^{-1}$; получаем $G = W \cup W^2 \cup W^3 \cup \ldots$; если в V существует счетное всюду плотное множество, мы видим, что такое же множество существует и в G, и, поскольку G метризуема (предложение 1), топология группы G допускает счетный базис.

Следствие. *Если $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, а G связна и конечномерна, то G локально связна, локально компактна и ее топология допускает счетный базис.*

Лемма 2. *Пусть X — многообразие класса C^r, e — некоторый элемент из X, U и V — его открытые окрестности и m — отображение класса C^r из $U \times U$ в X, удовлетворяющее следующим условиям:*

а) $m(e, x) = m(x, e) = x$ *для всякого* $x \in U$;

б) $V \subset U$, $m(V \times V) \subset U$ *и* $m(m(x, y), z) = m(x, m(y, z))$, *каковы бы ни были* x, y, z *в* V.

Тогда существуют открытая окрестность W элемента e в V и автоморфизм θ многообразия W, такие, что $\theta(e) = e$, $\theta(\theta(x)) = x$ и $m(x, \theta(x)) = m(\theta(x), x) = e$ для всякого $x \in W$.

Имеем $m(e, y) = y$ для всех $y \in U$, следовательно, по теореме о неявной функции существуют открытая окрестность W_1 элемента e в V и отображение θ_1 класса C^r из W_1 в V, такие, что $\theta_1(e) = e$, $m(x, \theta_1(x)) = e$ для всех $x \in W_1$. Аналогично существуют открытая окрестность W_2 элемента e в V и отображение θ_2 класса C^r из W_2 в V, такие, что $\theta_2(e) = e$, $m(\theta_2(x), x) = e$ для всех $x \in W_2$. Для $x \in W_1 \cap W_2$

$$\begin{aligned}\theta_2(x) &= m(\theta_2(x), e) = m(\theta_2(x), m(x, \theta_1(x))) = \\ &= m(m(\theta_2(x), x), \theta_1(x)) = m(e, \theta_1(x)) = \theta_1(x).\end{aligned}$$

Пусть $\theta(x)$ — общее значение отображений θ_1 и θ_2 в точке $x \in W_1 \cap W_2$. Пусть W — множество таких $x \in W_1 \cap W_2$, что $\theta(x) \in W_1 \cap W_2$. Множество W открыто. Для $x \in W$ имеем

$$\theta(\theta(x)) = m(m(x, \theta(x)), \theta(\theta(x))) = m(x, m(\theta(x), \theta(\theta(x)))) = \\ = m(x, e) = x;$$

стало быть, $\theta(x) \in W$. Мы видим, что $\theta \mid W$ определяет автоморфизм многообразия W.

Предложение 3. *Пусть X — аналитическое многообразие и m — ассоциативный аналитический закон композиции на X, допускающий единичный элемент. Множество G обратимых элементов из X открыто в X, и G есть группа Ли относительно закона композиции $m \mid (G \times G)$ и структуры многообразия, индуцированной соответствующей структурой на X.*

Согласно лемме 2, G есть окрестность единичного элемента. Для всякого $g \in G$ отображение $x \mapsto m(g, x)$ есть автоморфизм многообразия X. Стало быть, образ множества G при этом отображении есть некоторая окрестность элемента g, очевидно, содержащаяся в G. Поэтому G открыта в X. Ясно, что условия (GL_1) и (GL_2) выполнены. Условие (GL_3) выполнено в силу леммы 2.

Примеры групп Ли

1) Пусть E — нормируемое полное пространство над K. Отображение $(x, y) \mapsto x - y$ из $E \times E$ в E линейно, непрерывно и, стало быть, аналитично. Поэтому пространство E, наделенное своими структурами аддитивной группы и аналитического многообразия, есть группа Ли.

В частности, K есть группа Ли.

2) Пусть A — ассоциативная нормируемая полная алгебра с единицей над K. Закон умножения $(x, y) \mapsto xy$ из $A \times A$ в A билинеен, непрерывен и, следовательно, аналитичен. Предложение 3 показывает, что группа A^* обратимых элементов алгебры A открыта в A (это следует также из *Top. gén.*, chap IX, § 3, proposition 13) и что A^* есть группа Ли.

Например, пусть E — нормируемое полное пространство над K, и пусть $A = \mathscr{L}(E)$ (*Общ. топ.*, гл. IX, § 3, предложение 5). Тогда A^* есть группа $\mathbf{GL}(E)$ автоморфизмов пространства E. *Тем самым группа* $\mathbf{GL}(E)$ *канонически наделена структурой группы Ли над* K. В частности, группа $\mathbf{GL}(n, K)$, наделенная структурой многообразия, индуцированной соответствующей структурой на $\mathbf{M}_n(K)$, есть группа Ли. При $n = 1$ мы видим, что мультипликативная группа K^* есть группа Ли относительно структуры многообразия, индуцированной соответствующей структурой на K.

3) Пусть G — группа Ли над K. Пусть K' есть $\mathbf{R}$, или $\mathbf{C}$, или ультраметрическое полное недискретное поле, и пусть σ — изоморфизм нормированного поля K' на некоторое нормированное подполе поля K. Тогда группа G, наделенная структурой K' многообразия, полученной сужением поля скаляров, есть группа Ли над K', про которую говорят, что она *получается из группы Ли G сужением поля скаляров* (поля K до поля K' с помощью σ). Например, всякая комплексная группа Ли канонически наделяется структурой вещественной группы Ли. Еще один пример: со всякой комплексной группой Ли связывается комплексная группа Ли, называемая *сопряженной* к G; она получается из G при помощи автоморфизма $z \mapsto \bar{z}$ поля $\mathbf{C}$.

2. Морфизмы групп Ли

Определение 2. *Пусть G и H — группы Ли. Морфизмом групп Ли из G в H (или просто морфизмом из G в H, если это не приводит к недоразумению) называется отображение из G в H, являющееся гомоморфизмом групп и аналитическим отображением. Группа автоморфизмов группы Ли G обозначается через* $\mathrm{Aut}(G)$.

Тождественное отображение группы G есть морфизм. Композиция двух морфизмов является морфизмом. Если $f\colon G \to H$ и $f'\colon H \to G$ суть два взаимно обратных морфизма, то f и f' суть изоморфизмы групп Ли.

Примеры. 1) Пусть G — группа Ли. Для всякого $x \in G$ отображение $\mathrm{Int}(x)$ есть автоморфизм группы Ли G.

2) Пусть G — группа Ли. Через $G^{\vee}$ обозначается группа, противоположная группе G, которая наделяется той же структурой многообразия, что и G. Видно, что $G^{\vee}$ есть группа Ли (называемая группой Ли, *противоположной* группе G) и что отображение $g \mapsto g^{-1}$ есть изоморфизм группы Ли G на группу Ли $G^{\vee}$.

3) Пусть G — группа Ли, E — нормируемое полное пространство. *Линейным аналитическим представлением* группы G в E (или просто линейным представлением группы G в E, если это не приводит к недоразумению) называется морфизм группы Ли G в группу Ли $\mathbf{GL}(E)$, другими словами, такое аналитическое отображение π из G в $\mathbf{GL}(E)$, что $\pi(gg') = \pi(g)\pi(g')$ для g, g' из G. Предположим, что E допускает конечный базис $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ над K; пусть $(e_1^*, e_2^*, \ldots, e_n^*)$ — дуальный базис и ρ — гомоморфизм группы G в группу $\mathbf{GL}(E)$; тогда следующие условия эквивалентны:

(i) ρ есть линейное аналитическое представление;

(ii) каковы бы ни были $x \in E$ и $x' \in E'$, функция $g \mapsto \langle \rho(g)x, x' \rangle$ на G является аналитической;

(iii) каковы бы ни были i и j, функция $g \longmapsto \langle \rho(g) e_i, e_j^* \rangle$ на G является аналитической.

В самом деле, импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) очевидны. С другой стороны, функции $u \longmapsto \langle ue_i, e_j^* \rangle$ образуют систему координат на $\mathscr{L}(E)$; стало быть, их ограничения на $\mathbf{GL}(E)$ образуют систему координат на $\mathbf{GL}(E)$, откуда следует импликация (iii) $\Rightarrow$ (i).

Пусть G — вещественная группа Ли, E — нормируемое полное вещественное пространство, ρ — гомоморфизм группы G в группу $\mathbf{GL}(E)$. Мы увидим в § 8, теорема 1, что если ρ непрерывно (коль скоро $\mathbf{GL}(E)$ наделена топологией, определяемой нормой пространства $\mathscr{L}(E)$), то отображение ρ аналитично. Необходимо, однако, принять во внимание, что это определение непрерывности отлично от рассматриваемого в *Интегр.*, гл. VIII, § 2, определение 1 (ii) (упражнение 1).

4) Пусть G — *вещественная* группа Ли, E — нормируемое полное *комплексное* пространство. *Линейное аналитическое представление группы G в E* есть морфизм группы G в вещественную группу Ли, лежащую ниже комплексной группы Ли $\mathbf{GL}(E)$.

Предложение 4. *Пусть G и H — группы Ли, f — гомоморфизм группы G в группу H. Для аналитичности гомоморфизма f необходимо и достаточно, чтобы существовало такое открытое непустое подмножество U в G, что ограничение $f \mid U$ аналитично.*

Сформулированное условие, очевидно, необходимо. Будем считать его выполненным. Для всякого $x_0 \in G$ имеем $f(x_0 x) = f(x_0) f(x)$, каков бы ни был $x \in U$; стало быть, ограничение $f \mid x_0 U$ аналитично. Но множества вида $x_0 U$ при $x_0 \in G$ образуют открытое покрытие пространства G.

Замечание. Если f — иммерсия в точке e (соотв. субмерсия в e), то, очевидно, f является иммерсией (соотв. субмерсией).

3. Подгруппы Ли

Пусть G — группа Ли, H — подгруппа в G, являющаяся в то же время подмногообразием в G. Тогда отображение $(x, y) \longmapsto xy^{-1}$ из $H \times H$ в G аналитично и, следовательно, аналитично отображение $(x, y) \longmapsto xy^{-1}$ из $H \times H$ в H. (*Мн. Св. рез.*, 5.8.5). Таким образом, множество H, наделенное структурами группы и многообразия, индуцированными соответствующими структурами на G, есть группа Ли.

Определение 3. *Пусть G — группа Ли. Говорят, что подмножество H в G есть подгруппа Ли, если H является подгруппой и подмногообразием в G.*

Открытая подгруппа в G является подгруппой Ли в G. В частности, если G — вещественная или комплексная группа Ли, ее компонента единицы есть подгруппа Ли.

Предложение 5. *Пусть G — группа Ли, H — подгруппа Ли в G.*

(i) *H замкнута в G.*

(ii) *Каноническое вложение подгруппы H в G есть морфизм групп Ли.*

(iii) *Пусть L — группа Ли и f — отображение из L в G, такое, что $f(L) \subset H$. Для того чтобы f было морфизмом из L в H, необходимо и достаточно, чтобы f было морфизмом из L в G.*

В силу *Мн. Св. рез.*, 5.8.3, H локально замкнута. Стало быть, H замкнута (*Общ. топ.*, 1969, гл. III, § 2, предложение 4). Утверждение (ii) очевидно. Утверждение (iii) вытекает из *Мн. Св. рез.*, 5.8.5.

Предложение 6. *Пусть G — группа Ли, H — подгруппа в G. Для того чтобы H была подгруппой Ли в G, необходимо и достаточно, чтобы существовали элемент $h \in H$ и его открытая окрестность U в G, такие, что $H \cap U$ есть подмногообразие в G.*

Условие, очевидно, необходимо. Предположим, что оно выполнено. Для всякого $h' \in H$ сдвиг $\gamma(h'h^{-1})$ является автоморфизмом многообразия G и преобразует подмногообразие $H \cap U$ окрестности U в подмногообразие $(h'h^{-1}H) \cap (h'h^{-1}U)$ окрестности $h'h^{-1}U$. Поскольку $h'h^{-1}H = H$ и $h'h^{-1}U$ есть открытая окрестность элемента h' в G, мы видим, что всякий элемент из H обладает такой открытой окрестностью V, что $V \cap H$ является подмногообразием в G. Стало быть, H есть подмногообразие в G. Ч. Т. Д.

Пусть G — группа Ли, H — подгруппа Ли в G. Если L — подгруппа Ли в H, то L — подгруппа Ли в G в силу *Мн. Св. рез.*, 5.8.6. Пусть M — такая подгруппа Ли в G, что $M \subset H$. Тогда M есть подгруппа Ли в H, ибо ее каноническое вложение в H, очевидно, является иммерсией.

Пусть k — замкнутое недискретное подполе в K. Назовем k-подгруппой Ли в G подгруппу Ли k-группы Ли, лежащей ниже K-группы Ли G.

Замечание. Заменив слово „подмногообразие" на „квазиподмногообразие" в определении 3, мы получим определение *квазиподгрупп Ли* в G. (Для конечномерных групп G их квазиподгруппы Ли суть не что иное, как подгруппы Ли.) Предположим, что K имеет характеристику 0. Предложение 5 останется справедливым с тем же доказательством, если заменить слово „подгруппа Ли" на „квазиподгруппа Ли" и „подмногообразие" на „квазиподмногообразие".

4. Полупрямые произведения групп Ли

Пусть I — *конечное* множество, $(L_i)_{i \in I}$ — семейство групп Ли. Структуры группы и многообразия на $L = \prod_{i \in I} L_i$ согласованы,

и L тем самым наделяется структурой группы Ли. Говорят, что L есть группа Ли, являющаяся *произведением* семейства групп Ли $(L_i)_{i \in I}$.

Пусть L и M — группы Ли, σ — гомоморфизм из L в группу автоморфизмов группы M. Пусть S — внешнее полупрямое произведение группы L на M относительно σ (*Alg*., chap. I, p. 64, definition 2).

Предложение 7. *Если отображение* $(m, l) \mapsto \sigma(l) m$ *из* $M \times L$ *в* M *аналитично, то группа* S, *наделенная структурой многообразия, являющейся произведением соответствующих структур на* M *и* L, *есть группа Ли.*

В самом деле, если l, l' лежат в L, а m, m' — в M, то

$$(m, l)(m', l')^{-1} = mll'^{-1}m'^{-1} = m(\sigma(ll'^{-1})m'^{-1})\,ll'^{-1} = \\ = (m(\sigma(ll'^{-1})m'^{-1}),\ ll'^{-1}),$$

откуда следует предложение.

Если условия предложения 7 выполнены, говорят, что группа Ли S есть (*внешнее*) *полупрямое произведение группы Ли* L *на группу Ли* M *относительно* σ.

Ясно, что каноническое вложение группы L (соотв. M) в S есть изоморфизм группы Ли L (соотв. M) на некоторую подгруппу Ли в S, которую мы отождествляем с L (соотв. M). Каноническое отображение из S на L есть морфизм групп Ли.

Обратно, пусть G — группа Ли, а L, M — две подгруппы Ли, такие, что G является (алгебраическим) полупрямым произведением группы L на группу M (*Alg*., chap. I, p. 65). Положим $\sigma(l)m = lml^{-1}$ для $l \in L$ и $m \in M$. Тогда σ удовлетворяет условию предложения 7. Следовательно, можно образовать группу Ли S, которая представляет собой полупрямое произведение группы Ли L на группу Ли M относительно σ. Отображение j: $(m, l) \mapsto ml$ из S на G аналитично и является изоморфизмом групп. Если j есть изоморфизм групп Ли, говорят, что *группа Ли* G *есть* (*внутреннее*) *полупрямое произведение подгруппы Ли* L *на подгруппу Ли* M, и отождествляют S с G. Для всякого $g \in G$ напишем $g = p(g)q(g)$, где $p(g) \in M$ и $q(g) \in L$. Группа Ли G является полупрямым произведением подгруппы Ли L на подгруппу Ли M тогда и только тогда, когда хотя бы одно из отображений p: $G \to M$ и q: $G \to L$ аналитично, в этом случае аналитическим будет и второе отображение. Другим необходимым и достаточным условием является требование, чтобы $T_e(G)$ было топологической прямой суммой пространств $T_e(M)$ и $T_e(L)$ (ибо если это условие выполнено, отображение j этально в точке e_S.)

Пример. Пусть E — нормируемое пространство, $G = \mathbf{GL}(E)$, T — группа переносов пространства E, A — группа преобразова-

ний пространства E, порожденная группами G и T. Группа A есть алгебраическое полупрямое произведение группы G на группу T. (Если E конечномерно, то A есть аффинная группа пространства E, см. *Alg.*, chap, II, p. 131[1])). Пусть σ — тождественное линейное представление группы G в E и S — внешнее полупрямое произведение группы G на группу E относительно σ. Для всякого $x \in E$ пусть t_x — перенос в E, определенный элементом x. Отображение $(x, u) \mapsto t_x \circ u$ есть изоморфизм Φ группы S на группу A. Отображение $(x, u) \mapsto \sigma(u)x = u(x)$ из $E \times \mathscr{L}(E)$ в E билинейно и непрерывно и, стало быть, аналитично; его ограничение на $E \times G$ поэтому аналитично. Таким образом, группа S, наделенная структурой произведения многообразий E и G, есть группа Ли. Перенесем эту структуру на A с помощью Φ. Тогда A становится группой Ли, являющейся внутренним полупрямым произведением подгруппы Ли G на подгруппу Ли T.

Предложение 8. *Пусть G и H — группы Ли, $p: G \to H$ и $s: H \to G$ такие морфизмы групп Ли, что $p \circ s = \mathrm{id}_H$ и $N = \mathrm{Ker}\, p$. Тогда N есть подгруппа Ли в G; s есть изоморфизм из H на некоторую подгруппу Ли в G и группа Ли G представляет собой внутреннее полупрямое произведение подгруппы Ли $s(H)$ на подгруппу Ли N.*

Имеем $T_e(p) \circ T_e(s) = \mathrm{id}_{T_e(H)}$, следовательно p (соотв. s) есть субмерсия (соотв. иммерсия). В силу *Мн. Св. рез.*, 5.10.5, N есть подгруппа Ли в G. С другой стороны, s является гомеоморфизмом из H на $s(H)$ и, стало быть, s есть изоморфизм из H на некоторую подгруппу Ли в G (*Мн. Св. рез.*, 5.8.3). Наконец, для всякого $g \in G$ имеем $g = (s \circ p)(g) \cdot n$ с $n \in N$; поскольку $s \circ p$ аналитично, группа Ли G является полупрямым произведением подгруппы Ли $s(H)$ на подгруппу Ли N.

5. Фактормногообразия по группе Ли

Пусть G — группа Ли, X — многообразие класса C^r и $(g, x) \mapsto gx$ — закон левого действия (*Alg.*, chap. I, p. 49)[2]) класса C^r группы G на X. Для всякого $g \in G$ обозначим через $\tau(g)$ автоморфизм $x \mapsto gx$ многообразия X, определенный элементом g. Для всякого $x \in X$ обозначим через $\rho(x)$ орбитальное отображение $g \mapsto gx$ из G в X, определенное элементом x. Имеем:

$$\rho(x) = \rho(gx) \circ \delta(g), \qquad \rho(x) = \tau(g) \circ \rho(x) \circ \gamma(g^{-1}), \tag{3}$$

---

[1]) См. также *Алг.*, прил. II, n° 4, стр. 313. — *Прим. ред.*

[2]) В терминологии *Алг.*, гл. I, — внешний закон композиции с областью операторов G. — *Прим. перев.*

каковы бы ни были $g \in G$ и $x \in X$. Следовательно,

$$T_g(\rho(x)) = T_e(\rho(gx)) \circ T_g(\delta(g)), \tag{4}$$

$$T_g(\rho(x)) = T_x(\tau(g)) \circ T_e(\rho(x)) \circ T_g(\gamma(g^{-1})). \tag{5}$$

Предложение 9. *Пусть $x \in X$ и $g_0 \in G$.*

(i) *Если* $\rho(x)$ *есть иммерсия* (соотв. *субмерсия, субиммерсия*) *в* g_0, *то для всякого* $g \in G$ *отображение* $\rho(gx)$ *есть иммерсия* (соотв. *субмерсия, субиммерсия*).

(ii) *Если ранг отображения* $\rho(x)$ *в* g_0 *равен* k, *то для всякого* $g \in G$ *отображение* $\rho(gx)$ *имеет постоянный ранг, равный* k.

Это сразу следует из формул (4) и (5), поскольку $T_g(\delta(g))$, $T_x(\tau(g))$, $T_g(\gamma(g^{-1}))$ суть изоморфизмы.

Следствие. *Пусть* $x \in X$. *Если характеристика поля* K *равна* 0 *и* X *конечномерно, то* $\rho(x)$ *есть субиммерсия. Если к тому же* $\rho(x)$ *инъективно, то* $\rho(x)$ *есть иммерсия.*

Это следует из предложения 9 и *Мн. Св. рез.*, 5.10.6.

Заметим, что если η означает отображение $(g, x) \mapsto gx$ из $G \times X$ в X, то для $g \in G$, $x \in X$, $u \in T_g(G)$, $v \in T_x(X)$

$$T_{(g,x)}(\eta)(u, v) = T_{(g,x)}(\eta)(u, 0) + T_{(g,x)}(\eta)(0, v),$$

т. е.

$$T_{(g,x)}(\eta)(u, v) = T_g(\rho(x))\, u + T_x(\tau(g))\, v. \tag{6}$$

Предложение 10. *Пусть G — группа Ли, X — многообразие класса C^r, и задан закон левого действия класса C^r группы G на X. Предположим, что:*

а) *группа G действует на X собственно и свободно;*

б) *для всякого $x \in X$ отображение $\rho(x)$ есть иммерсия* (*что вытекает из* а), *если* K *имеет характеристику* 0 *и* X *конечномерно*.

Тогда отношение эквивалентности в X, определенное действием группы G, регулярно (*Мн. Св. рез.*, 5.9.5). *На фактормножестве X/G существует одна и только одна структура многообразия, такая, что каноническое отображение π: $X \to X/G$ является субмерсией. Топология, лежащая ниже этой структуры многообразия, есть фактортопология соответствующей топологии на X, она отделима. Наконец, $(X, G, X/G, \pi)$ есть левое главное расслоение*[1]).

Пусть θ — отображение $(g, x) \mapsto (x, gx)$ из $G \times X$ в $X \times X$. Это отображение принадлежит классу C^r. Покажем, что это

[1]) Главные расслоения, определенные в *Мн. Св. рез.*, 6.2.1, суть *правые* главные расслоения. Определение левых главных расслоений получается очевидным образом.

иммерсия. Для $u \in T_g(G)$ и $v \in T_x(X)$ имеем, согласно (6),

$$T_{(g,x)}(\theta)(u, v) = (v, T_g(\rho(x))u + T_x(\tau(g))v). \qquad (7)$$

Но $T_g(\rho(x))$ инъективно по предположению б), поэтому отображение $T_{(g,x)}(\theta)$ инъективно. Его образ является прямой топологической суммой подпространства $H_{g,x}$, образованного векторами $(v, T_x(\tau(g))v)$ для $v \in T_x(X)$, и подпространства $I_{g,x} = \{0\} \times T_g(\rho(x))(T_g(G))$. В силу предположения б) $T_g(\rho(x))(T_g(G))$ допускает топологическое дополнение $J_{g,x}$ в $T_{gx}(X)$. Следовательно, образ отображения $T_{(g,x)}(\theta)$ допускает топологическое дополнение $\{0\} \times J_{g,x}$. Тем самым мы полностью доказали, что θ есть иммерсия из $G \times X$ в $X \times X$.

Поскольку G действует на X свободно, θ инъективно. Пусть C — график отношения эквивалентности R в X, определенного действием группы G. Поскольку G действует собственно, θ есть гомеоморфизм из $G \times X$ на C (*Общ. топ.*, 1969, гл. I, § 10, предложение 2). В силу *Мн. Св. рез.*, 5.8.3, C — подмногообразие в $X \times X$ и θ — изоморфизм многообразия $G \times X$ на многообразие C. Касательное пространство $T_{(x,gx)}(C)$ отождествляется с

$$T_{(g,x)}(\theta)(T_{g,x}(G \times X)) = H_{g,x} \oplus I_{g,x} \subset T_{(x,gx)}(X \times X).$$

Пусть pr_1 и pr_2 — канонические проектирования произведения $X \times X$ на первый и второй сомножители соответственно. Ясно, что $T_{(x,gx)}(\mathrm{pr}_1)$ отображает $H_{g,x}$ на $T_x(X)$ и что ядро отображения $T_{(x,gx)}(\mathrm{pr}_1) \mid T_{(x,gx)}(C)$ есть $I_{g,x}$. Таким образом, $\mathrm{pr}_1 \mid C$ есть субмерсия из C на X. В силу *Мн. Св. рез.*, 5.9.5, R регулярно. Поэтому по определению на фактормножестве X/G существует одна, и только одна, структура многообразия, такая, что π является субмерсией. Нижележащая топология на X/G есть фактортопология топологии на X (*Мн. Св. рез.*, 5.9.4). Эта топология отделима (*Общ. топ.*, 1969, гл. III, § 4, предложение 3).

Для всякого $b \in X/G$ существуют открытая окрестность W точки b и такой морфизм σ: $W \to X$, что $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_W$ (*Мн. Св. рез.*, 5.9.1). Пусть φ — биекция $(g, w) \mapsto g\sigma(w)$ из $G \times W$ на $\pi^{-1}(W)$. Она принадлежит классу C^r. Получаем $\pi(g(\sigma(w)) = w$ и $\theta^{-1}(\sigma(w), g\sigma(w)) = (g, \sigma(w))$; поэтому биекция, обратная к φ, принадлежит классу C^r. Ясно, что $\varphi(gg', w) = g\varphi(g', w)$ для $w \in W$, $g \in G$, $g' \in G$. Следовательно, $(X, G, X/G, \pi)$ есть главное левое расслоение. Ч. Т. Д.

Замечание. Сохраним предыдущие предположения. Пусть, кроме того, H — многообразие класса C^r и $(x, h) \mapsto m(x, h)$ — отображение класса C^r из $X \times H$ в X, такое, что $m(gx, h) =$

$= gm(x, h)$ для $x \in X$, $g \in G$, $h \in H$. Пусть n — отображение из $(X/G) \times H$ в X/G, получающееся из m при факторизации. Покажем, что *n принадлежит классу C^r*. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X \times H & \xrightarrow{m} & X \\ {\scriptstyle \pi\times 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ (X/G) \times H & \xrightarrow{n} & X/G \end{array}$$

Она коммутативна, $\pi \circ m$ принадлежит классу C^r и $\pi \times 1$ является сюръективной субмерсией; достаточно поэтому применить *Мн. Св. рез.*, 5.9.5.

Пусть G — группа Ли, X — многообразие класса C^r и $(g, x) \mapsto xg$ — закон правого действия группы G на X класса C^r. Положим $\tau(g)x = \rho(x)g = xg$ для $g \in G$, $x \in X$. Имеем на этот раз

$$\rho(x) = \rho(xg) \circ \gamma(g^{-1}), \qquad \rho(x) = \tau(g) \circ \rho(x) \circ \delta(g); \tag{3'}$$

поэтому

$$T_g(\rho(x)) = T_e(\rho(xg)) \circ T_g(\gamma(g^{-1})), \tag{4'}$$

$$T_g(\rho(x)) = T_x(\tau(g)) \circ T_e(\rho(x)) \circ T_g(\delta(g)). \tag{5'}$$

С другой стороны, если η означает отображение $(g, x) \mapsto xg$ из $G \times X$ в X, формула (6) остается справедливой. Предложение 9, его следствие и предложение 10 также остаются в силе (если только заменить в последнем „левое главное расслоение“ на „правое главное расслоение“).

6. Однородные пространства и факторгруппы

Предложение 11. *Пусть X — группа Ли, G — подгруппа Ли в X.*

(i) *На однородном фактормножестве X/G существует одна, и только одна, структура аналитического многообразия, такая, что каноническая проекция π из X на X/G есть субмерсия. Закон действия группы X на X/G аналитичен. Для всякого $x \in X$ ядро отображения $T_x(\pi)$ есть образ пространства $T_e(G)$ относительно $T_e(\gamma(x))$.*

(ii) *Если подгруппа G нормальна в X, то X/G является группой Ли относительно структур группы и многообразия, определенных в* (i). *Отображение π есть морфизм групп Ли.*

В силу *Общ. топ.*, 1969, гл. III, § 4, n° 1, пример 1, группа G собственно и свободно действует в X правыми сдвигами. Поэтому первое утверждение в (i) следует из предложения 10 n° 5. Второе утверждение следует из замечания n° 5. Поскольку π — субмерсия, ядро отображения $T_x(\pi)$ есть касательное пространство в x к

$$\pi^{-1}(\pi(x)) = xG = \gamma(x)G;$$

следовательно, оно является образом пространства $T_e(G)$ относительно $T_e(\gamma(x))$.

Предположим, что G нормальна в X. Пусть m — отображение $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ из $(X/G) \times (X/G)$ в X/G. Тогда $(m \circ (\pi \times \pi))(xy) = \pi(xy^{-1})$, каковы бы ни были x, y в X. Следовательно, $m \circ (\pi \times \pi)$ аналитично. Поскольку $\pi \times \pi$ — сюръективная иммерсия, m аналитично (*Мн. Св. рез.*, 5.9.5), откуда следует (ii).

Однородное множество X/G, наделенное структурой многообразия, определенной в (i), называется (*левым*) *однородным факторпространством Ли группы X по G*. Аналогичным образом определяется (правое) однородное пространство Ли $G \setminus X$. Когда подгруппа G нормальна, факторгруппа Ли X/G, определенная в (ii), называется *факторгруппой Ли группы X по G*.

Предложение 12. *Пусть X — группа Ли, Y — непустое аналитическое многообразие, наделенное аналитическим законом левого действия группы X на Y. Для всякого $y \in Y$ пусть $\rho(y)$ — орбитальное отображение, определенное элементом y, и X_y — стабилизатор элемента y в X. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *существует такой $y \in Y$, что $\rho(y)$ есть сюръективная субмерсия;*

(i′) *для всякого $y \in Y$ отображение $\rho(y)$ есть сюръективная субмерсия;*

(ii) *существует $y \in Y$, такой, что X_y есть подгруппа Ли в X, а каноническое отображение из X/X_y в Y есть изоморфизм многообразий;*

(ii′) *для всякой точки $y \in Y$ ее стабилизатор X_y есть подгруппа Ли в X, а каноническое отображение из X/X_y в Y есть изоморфизм многообразий;*

(iii) *отображение $(x, y) \mapsto (y, xy)$ из $X \times Y$ в $Y \times Y$ есть сюръективная субмерсия.*

Поскольку каноническое отображение из X на X/X_y является субмерсией, импликации (i)$\Leftrightarrow$(ii), (i′)$\Leftrightarrow$(ii′) очевидны. Имеем (i)$\Leftrightarrow$(i′) согласно предложению 9 n° 5. Эквивалентность (i′)$\Leftrightarrow$(iii) следует из формулы (7) n° 5.

В условиях предложения 12 говорят, что Y есть (*левое*) *однородное пространство Ли группы X*. Аналогичным образом определяется правое однородное пространство Ли группы X.

Пример. Пусть G — группа Ли. Определим левое действие группы $G \times G$ на G, положив $(g_1, g_2)x = g_1 x g_2^{-1}$. Пусть ρ — орбитальное отображение, отвечающее элементу e. Тогда ограничения отображения $T_{(e,e)}(\rho)$ на $T_{(e,e)}(G \times \{e\}) = T_e(G) \times \{0\}$ и на $T_{(e,e)}(\{e\} \times G) = \{0\} \times T_e(G)$ суть изоморфизмы этих пространств

на $T_e(G)$. Следовательно, $T_{(e,e)}(\rho)$ сюръективно и $\operatorname{Ker} T_{(e,e)}(\rho)$ допускает в качестве топологического дополнения в $T_{(e,e)}(G \times G)$, например, $T_e(G) \times \{0\}$. Тем самым ρ есть субмерсия в (e, e). Поэтому G является левым однородным пространством Ли группы $G \times G$.

Предложение 13. *Пусть G — группа Ли, H — нормальная подгруппа Ли в G, X — многообразие класса C^r и $(g, x) \mapsto gx$ — закон левого действия группы G на X класса C^r. Предположим, что условия* a) *и* б) *предложения* 10 *выполнены.*

(i) *Закон левого действия $(h, x) \mapsto hx$ группы H на X удовлетворяет условиям* a) *и* б) *предложения* 10 (*так что можно рассматривать фактормногообразия X/G и X/H*).

(ii) *Закон левого действия группы G на X определяет при переходе к факторам закон левого действия группы G/H на X/H класса C^r; этот закон удовлетворяет условиям* a) *и* б) *предложения* 10 (*так что можно рассматривать фактормногообразие $(X/H)/(G/H)$*).

(iii) *Каноническое отображение из X на X/H определяет при переходе к факторам биекцию из X/G на $(X/H)/(G/H)$. Эта биекция есть изоморфизм многообразий класса C^r.*

Ясно, что группа H действует на X свободно, она действует собственно в силу *Общ. топ.*, 1969, гл. III, § 4, n° 1, пример 1. Орбитальные отображения из H в X суть иммерсии, поскольку каноническое вложение группы H в G есть иммерсия. Это доказывает (i).

Закон действия группы G на X определяет, очевидно, при переходе к факторам закон левого действия группы G/H на X/H. Этот закон принадлежит классу C^r в силу *Мн. Св. рез.*, 5.9.6. Пусть $g \in G$ и $x \in X$ таковы, что $(Hg)(Hx) = Hx$; тогда $H(gx) = Hx$ и, стало быть, $gx \in Hx$ и $g \in H$; это доказывает, что G/H действует на X/H свободно. Отображение θ: $(g, x) \mapsto (x, gx)$ из $G \times X$ в $X \times X$ замкнуто; с другой стороны, $\theta(Hg \times Hx) = Hx \times H(gx)$; отсюда сразу вытекает, что отображение

$$(Hg, Hx) \mapsto (Hx, H(gx))$$

из $(G/H) \times (X/H)$ в $(X/H) \times (X/H)$ замкнуто; поскольку к тому же G/H действует на X/H свободно, теорема 1с) из *Общ. топ.*, 1969., гл. I, § 10, n° 2, показывает, что G/H действует на X/H собственно.

Пусть π — каноническое отображение из X на X/H, σ — каноническое отображение из G на G/H, $x \in X$ и $y = \pi(x)$:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho(x)"] \arrow[d, "\sigma"'] & X \arrow[d, "\pi"] \\ G/H \arrow[r, "\rho(y)"'] & X/H. \end{tikzcd}$$

Тогда $\pi \circ \rho(x) = \rho(y) \circ \sigma$; поэтому

$$T_x(\pi) \circ T_e(\rho(x)) = T_e(\rho(y)) \circ T_e(\sigma).$$

Пусть элемент $u \in T_e(G/H)$ таков, что $T_e(\rho(y))u = 0$. Существует такой элемент $v \in T_e(G)$, что $u = T_e(\sigma)v$. Тогда $(T_x(\pi))(T_e(\rho(x))v) = 0$, стало быть, вектор $T_e(\rho(x))v$ касателен к Hx (*Мн. Св. рез.*, 5.10.5), и потому он имеет вид $T_e(\rho(x) \mid H)v'$ при некотором $v' \in T_e(H)$. Поскольку $T_e(\rho(x))$ инъективно, отсюда следует, что $v = v'$, а потому $v \in T_e(H)$ и, стало быть, $u = 0$. Таким образом, $T_e(\rho(y))$ инъективно. Образ отображения $T_e(\rho(y))$ равен образу отображения $T_x(\pi) \circ T_e(\rho(x))$; но образ отображения $T_e(\rho(x))$ допускает топологическое дополнение в $T_x(X)$ и содержит ядро отображения $T_x(\pi)$. Мы видим, таким образом, что $\rho(y)$ есть иммерсия, что завершает доказательство утверждения (ii).

Утверждение (iii) вытекает из сказанного выше и из *Мн. Св. рез.*, 5.9.7.

Следствие. *Пусть G — группа Ли, H и L — нормальные подгруппы Ли в G, причем $L \subset H$. Тогда H/L есть нормальная подгруппа Ли в G/L и каноническая биекция из G/H на $(G/L)/(H/L)$ есть изоморфизм групп Ли.*

7. Орбиты

Предложение 14. *Пусть G — группа Ли, X — аналитическое многообразие и $(g, x) \mapsto gx$ — закон левого аналитического действия группы G на X. Пусть $x \in X$. Предположим, что отвечающее ему орбитальное отображение $\rho(x)$ субиммерсивно (это всегда так, если характеристика поля K равна 0 и X конечномерно (следствие предложения 9)). Пусть G_x — стабилизатор элемента x в G.*

(i) *G_x есть подгруппа Ли и $T_e(G_x) = \operatorname{Ker} T_e(\rho(x))$.*

(ii) *Каноническое отображение i_x однородного пространства G/G_x в X есть иммерсия с образом Gx.*

(iii) *Если к тому же орбита Gx локально замкнута и топология группы G допускает счетный базис, то Gx есть подмногообразие в X, i_x есть изоморфизм многообразия G/G_x на многообразие Gx и $T_x(Gx) = \operatorname{Im} T_e(\rho(x))$.*

Прообраз элемента x относительно $\rho(x)$ есть G_x. Поскольку $\rho(x)$ — субиммерсия, G_x — подмногообразие, и для всякого $g \in G$ касательное пространство J к подмногообразию $gG_x = \rho(x)^{-1}(gx)$ в g есть $\operatorname{Ker} T_g(\rho(x))$ (*Мн. Св. рез.*, 5.10.5), откуда следует (i). Пусть π: $G \to G/G_x$ — каноническое отображение. Тогда $i_x \circ \pi = \rho(x)$. Поскольку G/G_x есть фактормногообразие многообразия G, это равенство доказывает аналитичность ото-

бражения i_x. Более того, ядра отображений $T_g(\rho(x))$ и $T_g(\pi)$ оба равны J. Стало быть, $T_{\pi(g)}(i_x)$ инъективно. Образ отображения $T_{\pi(g)}(i_x)$ равен образу отображения $T_g(\rho(x))$ и, следовательно, допускает топологическое дополнение. Это доказывает (ii).

Предположим, что Gx локально замкнуто. Всякая точка из Gx обладает тогда окрестностью в Gx, гомеоморфной замкнутому подпространству некоторого полного метрического пространства, которое является, следовательно, пространством Бэра. Стало быть, Gx есть бэровское пространство (*Общ. топ.*, гл. IX, § 5, предложение 4). Если G имеет счетный базис, i_x есть, следовательно, гомеоморфизм из G/G_x на Gx (*Общ. топ.*, гл. IX, § 5). Тогда в силу (ii) и *Мн. Св. рез.*, 5.8.3, i_x является изоморфизмом многообразия G/G_x на многообразие Gx и

$$T_x(Gx) = \operatorname{Im} T_{\pi(e)}(i_x) = \operatorname{Im} T_e(\rho(x)).$$

Замечание. Пусть G — конечномерная группа Ли, X — многообразие класса C^r и $(g, x) \longmapsto gx$ — закон левого действия группы G на X класса C^r. Тогда предложение 14 остается справедливым. Единственное место, требующее иного доказательства, — это тот факт, что G_x есть подгруппа Ли. Но если $r \neq \omega$, то $K = \mathbf{R}$; поскольку замкнутость подгруппы G_x очевидна, G_x есть подгруппа Ли в силу теоремы 2 § 8.

Следствие. *Пусть G — группа Ли, топология которой допускает счетный базис, X — непустое конечномерное аналитическое многообразие, наделенное законом левого аналитического действия группы G на X. Предположим, что G действует на X транзитивно и K имеет характеристику* 0. *Тогда X есть однородное пространство Ли группы G.*

Пусть $x \in X$. Орбита точки x совпадает с X и потому замкнута; можно, следовательно, применить предложение 14 (iii).

8. Векторные расслоения с операторами

Пусть G — группа Ли, X — многообразие класса C^r и $(g, x) \longmapsto gx$ — закон левого действия группы G на X класса C^r. Пусть E — векторное расслоение класса C^r с базой X и $\pi\colon E \to X$ его проекция на X. Для всякого $x \in X$ пусть E_x — слой расслоения E в x. Пусть $(g, u) \longmapsto gu$ — закон левого действия группы G на E, такой, что π перестановочна с действиями группы G на X и E. Для любого $g \in G$ и любого $x \in X$ ограничение на E_x отображения $u \longmapsto gu$ есть биекция $\psi_{g,x}$ из E_x на E_{gx}. Мы предположим, что для всех $g \in G$ и всех $x \in X$ отображение $\psi_{g,x}$ линейно и непрерывно и, стало быть, является изоморфизмом нормируемого пространства E_x на нормируемое пространство E_{gx}.

Пусть φ — автоморфизм $(g, x) \mapsto (g, gx)$ многообразия $G \times X$. Пусть p — каноническое проектирование произведения $G \times X$ на X и E' — обратный образ расслоения E относительно p. Пусть $\psi\colon E' \to E'$ — отображение, определяемое совокупностью отображений $\psi_{g,x}\colon E'_{(g,x)} \to E'_{(g,gx)}$.

Определение 4. *Если ψ есть φ-морфизм векторных расслоений класса C^r, говорят, что E есть векторное G-расслоение класса C^r.*

Другими словами, E есть векторное G-расслоение класса C^r, если для любой пары $(g_0, x_0) \in G \times X$ выполняется следующее условие: существует открытая окрестность U элемента (g_0, x_0) в $G \times X$, такая, что если отождествить $E' \mid U$ (соотв. $E' \mid \varphi(U)$) с тривиальным векторным расслоением со слоем M (соотв. N) с помощью некоторой векторной карты, то отображение $(g, x) \mapsto \psi_{g,x}$ из U в $\mathscr{L}(M, N)$ принадлежит классу C^r.

Отображение ψ, очевидно, биективно, и из сформулированного выше локального критерия следует, что ψ^{-1} является φ^{-1}-морфизмом векторных расслоений, так что ψ есть φ-*изоморфизм* векторных расслоений.

Тривиальным векторным G-расслоением с базой X называется векторное расслоение $X \times F$ (где F — полное нормируемое пространство), наделенное законом действия $(g, (x, f)) \mapsto (gx, f)$ группы G на $X \times F$.

Возвратимся к предположениям и обозначениям, предшествовавшим определению 4, и пусть, кроме того, τ — векторный функтор класса C^r для изоморфизмов (*Мн. Св. рез.*, 7.6.6). Тогда τE есть векторное расслоение с базой X. Для всякого $x \in X$ его слой $(\tau E)_x$ совпадает с $\tau(E_x)$. Каковы бы ни были нормируемые пространства N_1, N_2, обозначим через $\operatorname{Isom}(N_1, N_2)$ множество изоморфизмов из N_1 на N_2. Если $g \in G$, то

$$\tau(\psi_{g,x}) \in \operatorname{Isom}((\tau E)_x, (\tau E)_{gx}).$$

Совокупность отображений $\tau(\psi_{g,x})$ определяет закон левого действия $(g, u) \mapsto gu$ группы G на τE, и каноническая проекция расслоения τE на X перестановочна с действиями группы G на X и на τE.

Предложение 15. *Если E — векторное G-расслоение класса C^r, то τE есть векторное G-расслоение класса C^r.*

Пусть g_0, x_0, U, M, N — те же, что в тексте, следующем за определением 4. Тогда отображение $(g, x) \mapsto \tau(\psi_{g,x})$ из U в $\mathscr{L}(\tau M, \tau N)$ является композицией отображения $(g, x) \mapsto \psi_{g,x}$ из U в $\mathscr{L}(M, N)$ и отображения $f \mapsto \tau(f)$ из $\operatorname{Isom}(M, N)$ в $\operatorname{Isom}(\tau M, \tau N)$; эти два отображения принадлежат классу C^r, их композиция, следовательно, тоже принадлежит классу C^r, откуда следует

Предложение 16. *Пусть G — группа Ли, X — многообразие класса C^r ($r \geqslant 2$) и $(g, x) \mapsto gx$ — закон левого действия группы G на X класса C^r. Этот закон определяет посредством переноса структуры закон левого действия G на TX, относительно которого TX есть векторное G-расслоение класса C^{r-1}.*

Пусть pr_1 (соотв. pr_2) — каноническая проекция из $G \times X$ на G (соотв. X), и пусть E_1 (соотв. E_2) — обратный образ расслоения TG (соотв. TX) относительно pr_1 (соотв. pr_2). Тогда векторное расслоение $T(G \times X)$ есть прямая сумма расслоений E_1 и E_2. Пусть i: $E_2 \to T(G \times X)$ и q: $T(G \times X) \to E_2$ — канонические морфизмы векторных расслоений, определенные этим разложением в прямую сумму, и φ — отображение $(g, x) \mapsto (g, gx)$ из $G \times X$ в $G \times X$. Тогда отображение, которое обозначалось в определении 4 через ψ (при этом надо положить $E = TX$), есть не что иное, как $q \circ T(\varphi) \circ i$. Но $T(\varphi)$ есть φ-морфизм векторных расслоений класса C^{r-1} (*Мн. Св. рез.*, 8.1.2).

Следствие. *Если τ — векторный функтор класса C^r для изоморфизмов, то $\tau(TX)$ есть векторное G-расслоение класса C^{r-1}.*

Это вытекает из предложений 15 и 16.

Замечание 1. Если τ — векторный функтор класса C^r *в конечной размерности* для изоморфизмов и E имеет конечный ранг, то τE определяется тем же образом и остается справедливым предложение 15; следствие предложения 16 остается справедливым, коль скоро X имеет конечную размерность.

Примеры. Примем вновь предположения и обозначения предложения 16, и пусть F — нормируемое полное пространство. Тогда $\mathscr{L}((TX)^p; F)$ есть векторное G-расслоение класса C^{r-1}, то же самое верно для $\mathrm{Alt}^p(TX; F)$, если K имеет характеристику 0 или если X конечномерно (см. *Мн. Св. рез.*, 7.7, 7.8). Если X конечномерно, то $\bigotimes^p (TX) \otimes \bigotimes^q (TX)^*$ есть векторное G-расслоение класса C^{r-1}.

Предложение 17. *Пусть G — группа Ли, X — ее левое однородное пространство Ли, x_0 — точка в X, G_0 — ее стабилизатор в G, E и E' — левые векторные G-расслоения класса C^r с базой X, E_0 (соотв. E'_0) — слой в точке x_0 расслоения E (соотв. E'), f — элемент из $\mathscr{L}(E_0, E'_0)$, такой, что $f(gu) = gf(u)$ для всех $u \in E_0$ и всех $g \in G_0$. Тогда существует один, и только один, морфизм из E в E', перестановочный с действием группы G и продолжающий f.*

Единственность этого морфизма очевидна. Докажем его существование. Пусть $g, g' \in G$ и $u \in E_0$ таковы, что $gu = g'u$. Тогда $g'^{-1}g \in G_0$ и $g'^{-1}gu = u$ и, стало быть, $g'^{-1}gf(u) = f(u)$,

т. е. $gf(u) = g'f(u)$. Таким образом, мы определим отображение φ из E в E', положив $\varphi(gu) = gf(u)$. Ясно, что это отображение продолжает f и что оно перестановочно с действиями группы G. Покажем, что φ есть морфизм векторных расслоений класса C^r. Пусть $x_1 \in X$. Существуют открытая окрестность V точки x_1 в X и подмногообразие W в G, такие, что отображение $g \mapsto gx_0$ является изоморфизмом θ класса C^r из W на V. Уменьшив V и W, можно предполагать, что:

1) $E \mid V$ (соотв. $E' \mid V$) отождествляется с тривиальным векторным расслоением со слоем M (соотв. M');

2) если через ψ_g (соотв. ψ'_g) обозначено отображение $u \mapsto gu$ из E_0 (соотв. E'_0) в E_{gx_0} (соотв E'_{gx_0}), то отображения $g \mapsto \psi_g$ и $g \mapsto \psi_g^{-1}$ (соотв. $g \mapsto \psi'_g$ и $g \mapsto \psi_g'^{-1}$) из W в $\mathscr{L}(E_0, M)$ и в $\mathscr{L}(M, E_0)$ (соотв. $\mathscr{L}(E'_0, M')$ и $\mathscr{L}(M', E'_0)$) принадлежат классу C^r.

Для $x \in V$ обозначим через φ_x: $M \to M'$ ограничение отображения φ на $E_x = M$. Тогда φ_x получается композицией следующих отображений:

1) отображения $(\psi_{\theta^{-1}x})^{-1}$ из M в E_0;

2) отображения f из E_0 в E'_0;

3) отображения $\psi'_{\theta^{-1}x}$ из E'_0 в M'.

Мы видим, таким образом, что отображение $x \mapsto \varphi_x$ из V в $\mathscr{L}(M, M')$ принадлежит классу C^r.

Следствие 1. *Пусть $E_0^{G_0}$ — множество элементов из E_0, инвариантных относительно G_0. Для произвольного $u \in E_0^{G_0}$ пусть σ_u — отображение из X в E, определенное равенством $\sigma_u(gx_0) = gu$ для всякого $g \in G$.*

(i) *G-инвариантные сечения*[1]) *расслоения E принадлежат классу C^r.*

(ii) *$u \mapsto \sigma_u$ есть биекция из $E_0^{G_0}$ на множество G-инвариантных сечений расслоения E.*

Утверждение (ii) очевидно. Для доказательства утверждения (i) достаточно проверить, что любое сечение σ_u принадлежит классу C^r. Пусть E' — тривиальное векторное G-расслоение с базой X и слоем $E_0^{G_0}$. Пусть f — каноническая инъекция слоя $E_0^{G_0}$ в E_0. В силу предложения 17 существует морфизм φ из E' в E, перестановочный с действием G и продолжающий f. Если $u \in E_0^{G_0}$ и $g \in G$, то

$$\sigma_u(gx_0) = gu = gf(u) = \varphi(gu) = \varphi((u, gx_0))$$

[1]) Мы называем здесь *сечением* расслоения E отображение σ (не обязательно класса C^r) из X в E, такое, что $p \circ \sigma = \mathrm{Id}_X$, где p обозначает проектирование из E на X.

и, следовательно, $\sigma_u(x) = \varphi((u, x))$ для всякого $x \in X$, что доказывает наше утверждение.

* Например, пусть G — вещественная конечномерная группа Ли, G_0 — компактная подгруппа Ли в G и X — однородное пространство G/G_0. Обозначим через x_0 канонический образ элемента e в X. Существует билинейная симметрическая положительная невырожденная форма на $T_{x_0}(X)$, инвариантная относительно G_0 (*Интегр*., гл. VII, § 3, предложение 1). Применив вышеизложенное к $(TX)^* \otimes (TX)^*$, мы видим, что на X существует аналитическая риманова метрика, инвариантная относительно G. *

Следствие 2. *Предположим, что G_0 тривиально действует на E_0. Пусть E — тривиальное G-расслоение с базой X и слоем E_0. Существует один, и только один, изоморфизм из E на E', перестановочный с действием группы G и продолжающий* Id_{E_0}.

Это сразу следует из предложения 17.

Замечание 2. В этом пункте можно всюду заменить левые законы действия на правые.

9. Локальное определение группы Ли

Предложение 18. *Пусть G — группа, U и V — два подмножества в G, содержащие e. Предположим, что U наделено структурой аналитического многообразия, удовлетворяющей следующим условиям:*

(i) $V = V^{-1}$, $V^2 \subset U$, V *открыто в* U;

(ii) *отображение* $(x, y) \mapsto xy^{-1}$ *из* $V \times V$ *в* U *аналитично*;

(iii) *для всякого* $g \in G$ *существует открытая окрестность* V' *элемента* e *в* V, *такая, что* $gV'g^{-1} \subset U$ *и отображение* $x \mapsto gxg^{-1}$ *из* V' *в* U *аналитично.*

Тогда на G существует одна, и только одна, структура аналитического многообразия, обладающая следующими свойствами:

α) *G, наделенная этой структурой, есть группа Ли;*

β) *V открыто в G;*

γ) *структуры многообразия на G и U индуцируют одну и ту же структуру на V.*

а) Пусть A, открытое подмножество в V, и v_0, элемент из V, таковы, что $v_0A \subset V$. Тогда v_0A есть множество таких $v \in V$, что $v_0^{-1}v \in A$, и потому оно открыто в V (следует принять во внимание (ii)). Кроме того, из (ii) следует, что отображения $v \mapsto v_0v$ из A на v_0A и $v \mapsto v_0^{-1}v$ из v_0A на A являются взаимно обратными аналитическими биекциями и потому аналитическими изоморфизмами.

б) Выберем открытую окрестность W элемента e в V, такую, что $W = W^{-1}$, $W^3 \subset V$ и существует карта (W, φ, E) на много-

образии U с областью определения W. Для всякого $g \in G$ обозначим через φ_g отображение $h \mapsto \varphi(g^{-1}h)$ из gW в E. Покажем, что карты φ_g на G аналитически согласованы. Пусть g_1, g_2 из G таковы, что $g_1 W \cap g_2 W \neq \varnothing$, так что $g_2^{-1}g_1$ и $g_1^{-1}g_2$ принадлежат W^2. В силу а) множество $W \cap g_1^{-1}g_2 W$ открыто в W; поэтому

$$\varphi_{g_1}(g_1 W \cap g_2 W) = \varphi(W \cap g_1^{-1}g_2 W)$$

есть открытое подмножество D в E. Для $d \in D$ получаем

$$(\varphi_{g_2} \circ \varphi_{g_1}^{-1})(d) = \varphi(g_2^{-1}g_1\varphi^{-1}(d));$$

в силу п. а) мы видим, что $\varphi_{g_2} \circ \varphi_{g_1}^{-1}$ аналитично.

в) Согласно б) на G существует такая структура аналитического многообразия, что $(\varphi_g)_{g \in G}$ есть атлас на G. Для всякого $g_0 \in G$ отображение $g \mapsto g_0 g$ $(g \in G)$ оставляет этот атлас инвариантным и является, следовательно, автоморфизмом этой структуры многообразия на G. В частности, условие (GL_1) выполнено.

г) Пусть $v_0 \in V$. В силу (ii) существует такая открытая окрестность A элемента e в W, что $v_0 A \subset V$. Это показывает, что V открыто в G. Согласно а), отображение $v \mapsto v_0 v$ из A на $v_0 A$ есть аналитический изоморфизм относительно структур A и $v_0 A$, индуцированных аналитической структурой на U. Приняв во внимание в), мы видим, что структуры многообразия на G и U индуцируют одну и ту же структуру на $v_0 A$ и, стало быть, наконец, на V.

д) Приняв во внимание г), (ii) и (iii), мы видим, что условия (GL_2) и (GL_3) выполнены. Следовательно, G есть группа Ли.

е) Если структура многообразия на G согласована со структурой группы на G и такова, что V есть открытое подмногообразие в G, то $(\varphi_g)_{g \in G}$ — атлас на G. Отсюда вытекает утверждение единственности предложения.

Предложение 19. *Пусть G — топологическая группа, H — группа Ли, f — гомоморфизм группы G в группу H. Предположим, что существуют открытая окрестность U элемента e_G в G, карта (V, φ, E) на многообразии H в e_H и замкнутое векторное подпространство F в E, допускающее топологическое дополнение, такие, что $f(U) \subset V$ и $(\varphi \circ f)|U$ есть гомеоморфизм из U на $\varphi(V) \cap F$. Тогда на G существует единственная структура многообразия, такая, что f есть иммерсия; эта структура является обратным образом относительно f структуры многообразия на H. Относительно нее G есть группа Ли.*

Поскольку сдвиги в группе G (соотв. H) суть гомеоморфизмы (соотв. аналитические изоморфизмы), f удовлетворяет условию (R) из *Мн. Св. рез.*, 5.8.1. Первые два утверждения предло-

жения следуют тогда из *Мн. Св. рез.*, там же. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} G\times G & \xrightarrow{m} & G \\ {\scriptstyle f\times f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ H\times H & \xrightarrow{n} & H \end{array}$$

где $m(x, y) = xy^{-1}$ (соотв. $n(xy) = xy^{-1}$) для x, y из G (соотв. H). Тогда $n\circ(f\times f)$ аналитично; значит, $f\circ m$ аналитично, а потому аналитично и m, так как f есть иммерсия. Таким образом, G есть группа Ли.

Говорят, что структура группы Ли на G является обратным образом структуры группы Ли на H относительно f.

Следствие. *Пусть G — топологическая группа, N — дискретная нормальная подгруппа в G, π — каноническое отображение группы G на G/N. Предположим, что на G/N задана структура аналитического многообразия, согласованная со структурой топологической группы на G/N. Тогда на G существует одна, и только одна, структура многообразия, такая, что π есть иммерсия; эта структура является обратным образом относительно π структуры многообразия на G/N. Относительно этой структуры π этально, G — группа Ли и G/N — факторгруппа Ли группы G по N.*

Замечание. Пусть H — вещественная или комплексная связная группа Ли, $\widehat{H}$ — ее универсальная накрывающая[1]), π — каноническое отображение из $\widehat{H}$ на H. Говоря об $\widehat{H}$ как о группе Ли, мы всегда будем иметь в виду структуру, являющуюся обратным образом соответствующей структуры на H относительно π.

10. Групускулы

Определение 5. *Групускулой Ли[2]) над K называется система (G, e, θ, m), удовлетворяющая следующим условиям:*

(i) G *— аналитическое многообразие над K;*

(ii) $e\in G$;

(iii) θ *— аналитическое отображение из G в G;*

(iv) m *— аналитическое отображение некоторого открытого подмножества Ω многообразия $G\times G$ в G;*

---

[1]) См. *Top. gén.*, chap. XI; в ожидании появления этой главы см., например, Понтрягин Л. С., Непрерывные группы, 3-е издание, „Наука", М., 1973, или Hochschild G., The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965.

[2]) В русской литературе принят термин „(аналитическая) локальная группа Ли"; см., например, цитированную в предыдущем примечании книгу Л. С. Понтрягина, стр. 290—291. — *Прим. перев.*

(v) *для всякого* $g \in G$ *имеем* $(e, g) \in \Omega$, $(g, e) \in \Omega$, $m(e, g) = m(g, e) = g$;

(vi) *для всякого* $g \in G$ *имеем* $(g, \theta(g)) \in \Omega$, $(\theta(g), g) \in \Omega$, $m(g, \theta(g)) = m(\theta(g), g) = e$;

(vii) *если* g, h, k — *такие элементы из* G, *что* $(g, h) \in \Omega$, $(h, k) \in \Omega$, $(m(g, h), k) \in \Omega$, $(g, m(h, k)) \in \Omega$, *то* $m(m(g, h), k) = m(g, m(h, k))$.

Говорят, что e есть единичный элемент групускулы. Часто пишут gh вместо $m(g, h)$ и (допуская вольность в обозначениях) g^{-1} вместо $\theta(g)$.

Группа Ли G есть групускула Ли при очевидном выборе e, θ, m.

Пусть G — групускула Ли. Имеем $ee^{-1} = e$, т. е.

$$e^{-1} = e. \tag{8}$$

Для всякого $g \in G$

$$g = eg = \left((g^{-1})^{-1} g^{-1}\right)g = (g^{-1})^{-1}(g^{-1}g) = (g^{-1})^{-1}e,$$

т. е.

$$(g^{-1})^{-1} = g. \tag{9}$$

Подмножество в G, инвариантное относительно отображения $g \mapsto g^{-1}$, называется симметричным.

Многообразие G с отмеченной точкой e, наделенное отображением $g \mapsto g^{-1}$ и отображением $(g, h) \mapsto hg$, есть групускула Ли $G^{\vee}$, называемая противоположной к G.

Групускула Ли G называется коммутативной, если для любой пары $(g, h) \in G \times G$, такой, что произведение gh определено, произведение hg также определено и равно gh.

Пусть G — групускула Ли. Множество пар $(g, h) \in G \times G$, для которых gh определено, есть окрестность точки (e, e). С другой стороны, отображения $(g, h) \mapsto gh$ и $g \mapsto g^{-1}$ непрерывны. Стало быть, $(gh)k = g(hk)$ для всех g, h, k, достаточно близких к e. Таким же образом $(h^{-1}g^{-1})(gh) = h^{-1}(eh) = h^{-1}h = e$ для g, h, достаточно близких к e, откуда, умножая справа на $(gh)^{-1}$, получаем

$$(gh)^{-1} = h^{-1}g^{-1} \tag{10}$$

для g, h, достаточно близких к e.

Предложение 20. *Пусть* G — *групускула Ли и* $g \in G$. *Существуют открытая окрестность* U *элемента* e *и открытая окрестность* V *элемента* g, *обладающие следующими свойствами*:

а) ug *определено для всякого* $u \in U$;

б) vg^{-1} *определено для всякого* $v \in V$;

в) *отображения* $u \mapsto ug$, $v \mapsto vg^{-1}$ *суть взаимно обратные аналитические изоморфизмы из* U *на* V *и из* V *на* U.

Поскольку область определения произведения открыта в $G\times G$, существуют открытая окрестность U элемента e и открытая окрестность V элемента g со свойствами а) и б). Положим $\eta(u)=ug$ для $u\in U$, $\eta'(v)=vg^{-1}$ для $v\in V$. Уменьшив U и V, можно предполагать, что $(ug)g^{-1}=u$ и $(vg^{-1})g=v$ для $u\in U$ и $v\in V$. Тогда η и η' инъективны. Снова уменьшив U, можно предположить, что $\eta(U)\subset V$. Тогда $\eta'(V)\supset U$, а $\eta(U)$ есть прообраз окрестности U относительно η' и, следовательно, открытая окрестность элемента g в V. Замена окрестности V на $\eta(U)$ приводит, наконец, к случаю, когда η и η' суть взаимно обратные и аналитические биекции. Ч.Т.Д.

Пусть G_1, G_2 — две групускулы Ли с единичными элементами e_1, e_2. Говорят, что отображение f из G_1 в G_2 является *морфизмом*, если f удовлетворяет следующим условиям:

(i) f аналитично;

(ii) $f(e_1)=e_2$;

(iii) если g, h из G_1 таковы, что произведение gh определено, то произведение $f(g)f(h)$ определено и равно $f(gh)$.

Пусть $g\in G_1$. Поскольку gg^{-1} определено и равно e_1, $f(g)f(g^{-1})$ определено и равно e_2; следовательно,

$$f(g)^{-1}=f(g)^{-1}(f(g)f(g^{-1}))=(f(g)^{-1}f(g))f(g^{-1}),$$

т. е.

$$f(g)^{-1}=f(g^{-1}). \tag{11}$$

Композиция двух морфизмов есть морфизм.

Если $f\colon G_1\to G_2$ и $f'\colon G_2\to G_1$ суть взаимно обратные морфизмы, то они являются изоморфизмами (вследствие как раз формулы (11)).

Пусть G_1, G_2 — две групускулы Ли, f — отображение из G_1 в G_2, удовлетворяющее приведенным выше условиям (ii) и (iii) и аналитическое в некоторой открытой окрестности элемента e_1. С учетом предложения 20, как и в доказательстве предложения 4, показывается, что f есть морфизм.

Пусть (G, e, θ, m) — групускула Ли, Ω — область определения отображения m. Пусть H — подмногообразие в G, содержащее e и устойчивое относительно θ. Предположим, что множество Ω_1 таких пар $(x, y)\in\Omega\cap(H\times H)$, что $m(x, y)\in H$, открыто в $H\times H$. Тогда $(H, e, \theta, |H, m|\Omega_1)$ есть групускула Ли. Такая групускула Ли называется *подгрупускулой Ли* в G. Каноническая инъекция из H в G есть морфизм. Если $f\colon L\to G$ — такой морфизм групускул Ли, что $f(L)\subset H$, то $f\colon L\to H$ является морфизмом групускул Ли.

Предположим, что K имеет характеристику 0. Заменим предположение, что H есть подмногообразие в G, предположением, что H есть

квазиподмногообразие в G. Утверждение предыдущего абзаца остается справедливым (см. *Мн. Св. рез.*, 5.8.5). Говорят тогда, что H есть квазиподгрупускула Ли в G.

Если G — групускула Ли с единичным элементом e, то всякая открытая симметричная окрестность элемента e в G является подгрупускулой Ли в G. (Это применяется, в частности, когда G есть группа Ли.) Пусть H — подгрупускула Ли в G; если H — окрестность элемента e в G, то H открыта в G в силу предложения 20.

Очевидным образом определяется групускула Ли, являющаяся *произведением* конечного числа групускул Ли.

Предложение 21. *Пусть G, H — две групускулы Ли, φ — морфизм из G в H. Следующие условия эквивалентны*:

(i) φ — *этальный морфизм в точке e*;

(ii) *существуют открытые подгрупускулы G', H' в G, H, такие, что $\varphi|G'$ есть изоморфизм из G' на H'.*

Импликация (ii)$\Rightarrow$(i) очевидна. Предположим, что φ — этальный морфизм в точке e. Существует такая открытая подгрупускула Ли G_1 в G, что $\varphi(G_1)$ открыто в H и $\varphi|G_1$ есть изоморфизм многообразия G_1 на многообразие $\varphi(G_1)$. Далее, существует такая открытая подгрупускула Ли G' в G_1, что произведение в G двух элементов из G' всегда определено и принадлежит G_1. Если g, g' из G' таковы, что $gg' \in G'$, то $\varphi(g)\varphi(g') = \varphi(gg') \in \varphi(G')$; если g, g' из G' таковы, что $gg' \in G_1 - G'$, то $\varphi(g)\varphi(g') = \varphi(gg') \in \varphi(G_1) - \varphi(G')$. Стало быть, $\varphi|G'$ есть изоморфизм групускулы Ли G' на открытую подгрупускулу Ли $\varphi(G')$ в H.

Если условия предположения 21 выполнены, говорят, что G и H локально изоморфны.

Предложение 22. *Пусть H — группа Ли, U — подгрупускула Ли в H, N — множество таких $g \in H$, что U и gUg^{-1} имеют одинаковый росток в точке e* (*Общ. топ.*, 1968, гл. I, § 6, n° 10). *Тогда N является подгруппой в H, содержащей U. На N существует одна, и только одна, структура аналитического многообразия, обладающая следующими свойствами*:

(i) *N, наделенная этой структурой, есть группа Ли*;

(ii) *U — открытое подмногообразие в N*;

(iii) *каноническое вложение подгруппы N в H есть иммерсия.*

Ясно, что N — подгруппа в H. Если $g \in U$, то $ge \in U$ и $geg^{-1} \in U$. Поэтому $gu \in U$ и $gug^{-1} \in U$ для элементов u из U, достаточно близких к e; следовательно, росток множества gUg^{-1} в точке e содержится в ростке множества U. Заменяя g на g^{-1}, видим, что ростки множеств gUg^{-1} и U в точке e одинаковы. Значит, $U \subset N$.

Пусть V — такая открытая окрестность элемента e в U, что $V=V^{-1}$, $V^2 \subset U$. Условия (i), (ii), (iii) предложения 18 из n° 9 (где G заменено на N) выполнены. Следовательно, на N существует структура аналитического многообразия, обладающая следующими свойствами: α) N, наделенная этой структурой, есть группа Ли; β) V открыто в N; γ) структуры многообразия на N и U индуцируют одну и ту же структуру на V. Поскольку V — подмногообразие в H, каноническая инъекция группы N в H является иммерсией в точке e, а следовательно, и в любой точке группы N. Пусть $u \in U$. Существует такая открытая окрестность V' элемента e в V, что отображение $v \mapsto uv$ есть аналитический изоморфизм из V' на некоторую открытую окрестность элемента u в U (предложение 20) и одновременно на некоторую открытую окрестность элемента u в N. Стало быть, U открыто в N, а тождественное отображение из U в U есть изоморфизм относительно данной структуры многообразия на U и структуры открытого подмногообразия в N; другими словами, U есть открытое подмногообразие в N.

Наконец, рассмотрим на N структуру аналитического многообразия, обладающую свойствами (i) и (ii) предложения, и пусть N^* — получаемая таким образом группа Ли. Тогда тождественное отображение из N в N^* есть этальный морфизм в точке e и, следовательно, изоморфизм групп Ли. Это доказывает утверждение единственности.

Пусть H — группа Ли, U — квазиподгрупускула Ли в H, N — множество таких $g \in H$, что U и gUg^{-1} имеют одинаковый росток в e. Если K имеет характеристику 0, то на G существует одна, и только одна, структура многообразия со свойствами (i) и (ii) предложения 22. Доказательство то же, что для предложения 22.

Следствие. *Сохраним обозначения предложения* 22. *Пусть G — подгруппа в H, порожденная множеством U. Тогда G — открытая подгруппа в N. На G существует одна, и только одна, структура группы Ли, такая, что U есть открытое подмногообразие в G, а каноническая инъекция подгруппы G в H есть иммерсия.*

Замечание. Сохраним обозначения предложения 22 и его следствия. Пусть K имеет характеристику 0, H конечномерна и топология на U допускает счетный базис. Даже при всех этих предположениях G может оказаться незамкнутой в H (упражнение 3). Но *если G замкнута, она является подгруппой Ли в H*. В самом деле, отображение $(g, h) \mapsto gh$ определяет левое аналитическое действие группы G на H. Орбита элемента e есть G. Наше утверждение следует тогда из предложений 2 (iv) и 14 (iii).

11. Куски законов действия

Пусть (G, e, θ, m)—групускула Ли, X—многообразие класса C^r.

Определение 6. *Куском закона левого действия класса C^r групускулы G на X называется отображение ψ, определенное в некотором открытом подмножестве Ω в $G \times X$, которое содержит $\{e\} \times X$, принимающее значения в X и обладающее следующими свойствами:*

(i) *ψ принадлежит классу C^r;*

(ii) *для всякого $x \in X$ имеем $\psi(e, x) = x$;*

(iii) *существует такая окрестность Ω_1 подмножества $\{e\} \times \{e\} \times X$ в $G \times G \times X$, что для всякого $(g, g', x) \in \Omega_1$ элементы $m(g, g')$, $\psi(g', x)$, $\psi(m(g, g'), x)$, $\psi(g, \psi(g', x))$ определены и $\psi(g, \psi(g', x)) = \psi(m(g, g'), x)$.*

Аналогичным образом определяются куски законов правого действия класса G^r.

Часто вместо $\psi(g, x)$ пишут gx.

Пусть G' — подгрупускула Ли в G и X' — подмногообразие в X. Предположим, что множество Ω' тех $(g, x) \in \Omega \cap (G' \times X')$, для которых $\psi(g, x) \in X'$, открыто в $G' \times X'$ (это условие всегда выполнено, если X' открыто в X). Тогда $\psi | \Omega'$ есть кусок закона левого действия класса C^r групускулы G' на X'; говорят, что он получается ограничением отображения ψ на $G' \times X'$.

Предложение 23. *Пусть (G, e, θ, m) — групускула Ли, X — многообразие класса C^r, x_0 — точка из X, Ω — открытая окрестность точки (e, x_0) в $G \times X$, ψ — отображение из Ω в X, обладающее следующими свойствами:*

(i) *ψ принадлежит классу C^r;*

(ii) *$\psi(e, x)$ равно x для точек x, достаточно близких к x_0;*

(iii) *$\varphi(m(g, g'), x) = \psi(g, \psi(g', x))$ для любой тройки (g, g', x), достаточно близкой к (e, e, x_0).*

Тогда существуют открытая окрестность X' точки x_0 в X и открытое подмножество Ω' в $\Omega \cap (G \times X')$, такие, что $\psi | \Omega'$ есть кусок левого действия класса C^r групускулы G на X'.

Существуют открытая окрестность X' точки x_0 в X и открытая окрестность G' элемента e в G, такие, что $\psi(e, x) = x$ для всякого $x \in X'$ и $\psi(g, \psi(g', x)) = \psi(m(g, g'), x)$ для $(g, g', x) \in G' \times G' \times X'$. Пусть Ω' — множество пар $(g, x) \in \Omega \cap (G' \times X')$, таких, что $\psi(g, x) \in X'$. Тогда Ω' открыто в $G \times X'$, и X', Ω' обладают указанными в предложении свойствами.

Лемма 3. Пусть X — нормальное пространство, $(X_i)_{i \in I}$ — его открытое локально конечное покрытие. Для всех пар $(i, j) \in I \times I$ и всякого $x \in X_i \cap X_j$ пусть $V_{ij}(x)$ — окрестность точки x,

содержащаяся в $X_i \cap X_j$. *Тогда для любой точки* $x \in X$ *можно так выбрать ее окрестность* $V(x)$, *что будут выполнены следующие условия*:

а) *из* $x \in X_i \cap X_j$ *следует* $V(x) \subset V_{ij}(x)$;

б) *если* $V(x)$ *и* $V(y)$ *пересекаются, то существует такой индекс* $i \in I$, *что* $V(x) \cup V(y) \subset X_i$.

Существует такое открытое покрытие $(X'_i)_{i \in I}$ пространства X, что $\overline{X}'_i \subset X_i$ для всякого $i \in I$ (*Общ. топ.*, гл. IX, § 4, теорема 3). Пусть $x \in X$. Пусть $V_1(x)$ — пересечение множеств $V_{ij}(x)$ и тех множеств X'_k, которые содержат x; это открытая окрестность точки x. Пусть $V_2(x)$ — окрестность точки x, содержащаяся в $V_1(x)$ и пересекающаяся только с конечным числом множеств X_i. Тогда $V_2(x)$ пересекается лишь с конечным числом множеств $\overline{X}'_i$ и, стало быть, множество

$$V(x) = V_2(x) \cap \bigcap_{i \in I,\, x \notin \overline{X}'_i} (X - \overline{X}'_i)$$

есть окрестность точки x. Если $x \in X_i \cap X_j$, то $V_1(x) \subset X_i \cap X_j$ и, следовательно, $V(x) \subset X_i \cap X_j$. Пусть x, y лежат в X и $V(x)$ и $V(y)$ пересекаются. Существует такой $i \in I$, что $x \in X'_i$. Тогда $V_1(x) \subset X'_i$, а потому $V(x) \subset X'_i$; следовательно, $V(y) \cap \cap \overline{X}'_i \neq \varnothing$. Тогда $y \in \overline{X}'_i$ по определению множества $V(y)$, откуда $y \in X_i$ и $V(y) \subset X_i$. Таким образом, X_i содержит $V(x)$ и $V(y)$.

Предложение 24. *Пусть* G — *групускула Ли*, X — *многообразие класса* C^r, $(X_i)_{i \in I}$ — *его открытое локально конечное покрытие. Для всякого индекса* $i \in I$ *пусть* ψ_i — *кусок закона левого действия класса* C^r *групускулы* G *на* X_i. *Предположим, что топологическое пространство, лежащее ниже многообразия* X, *нормально и для всех* $(i, j) \in I \times I$ *и всякого* $x \in X_i \cap X_j$ *куски* ψ_i *и* ψ_j *совпадают в некоторой окрестности точки* (e, x). *Существует такой кусок* ψ *закона левого действия класса* C^r *групускулы* G *на* X, *что для всякого* $i \in I$ *и всякого* $x \in X_i$ *куски* ψ_i *и* ψ *совпадают в некоторой окрестности точки* (e, x).

Для произвольных $(i, j) \in I \times I$ и $x \in X_i \cap X_j$ выберем такую открытую окрестность $V_{ij}(x)$ точки x в $X_i \cap X_j$, что ψ_i и ψ_j определены и совпадают в некоторой окрестности подмножества $\{e\} \times V_{ij}(x)$ в $G \times X$. Для точки $x \in X$ выберем ее открытую окрестность $V(x)$ в X таким образом, чтобы выполнялись условия а) и б) леммы 3. Пусть I_x — множество таких $i \in I$, что $x \in X_i$. Это конечное множество. Пусть U_x — множество таких пар $(g, y) \in G \times V(x)$, что ψ_i для всех $i \in I_x$ определены

и совпадают в некоторой окрестности точки (g, y). Тогда U_x открыто и $(e, x) \in U_x$. Ограничение всех кусков ψ_i для $i \in I_x$ на U_x одно и то же (обозначим его через ψ_x). Пусть x, y лежат в X. Если U_x и U_y пересекаются, то $V(x)$ и $V(y)$ пересекаются и, стало быть, существует такой индекс $i \in I$, что

$$V(x) \cup V(y) \subset X_i.$$

Тогда $i \in I_x$, $i \in I_y$, $\psi_i | U_x = \psi_x$, $\psi_i | U_y = \psi_y$, а потому $\psi_x | (U_x \cap U_y) = \psi_y | (U_x \cap U_y)$. Таким образом, совокупность отображений ψ_x задает отображение ψ из $U = \bigcup_{x \in X} U_x$ в X, а U есть открытая окрестность множества $\{e\} \times X$ в $G \times X$. Ясно, что ψ принадлежит классу C^r и $\psi(e, x) = x$ для всех $x \in X$. Для всякого индекса $i \in I$ и всякого $x \in X_i$ отображение ψ совпадает с ψ_x, и, стало быть, с ψ_i в некоторой окрестности точки (e, x); следовательно, ψ удовлетворяет условию (iii) определения 6.

§ 2. Группа векторов, касательных к группе Ли

1. *Касательные законы композиции*

Пусть X и Y — многообразия класса C^r. Известно (*Мн. Св. рез.*, 8.1.4), что $X \times Y$ есть многообразие класса C^r и что отображение $(T(\mathrm{pr}_1), T(\mathrm{pr}_2))$, являющееся произведением отображений, касательных к каноническим проекциям, есть изоморфизм класса C^{r-1} из $T(X \times Y)$ на $T(X) \times T(Y)$[1]). Этот изоморфизм согласуется с их структурами векторных расслоений с базой $X \times Y$ и позволяет отождествить $T(X \times Y)$ с $T(X) \times T(Y)$. Пусть $a \in X$, $b \in Y$, $u \in T_a(X)$, $v \in T_b(Y)$; предыдущее отождествление позволяет рассматривать (u, v) как элемент из $T_{(a, b)}(X \times Y)$; имеем

$$(u, v) = (u, 0) + (0, v),$$

и $(u, 0)$ (соотв. $(0, v)$) есть образ вектора u (соотв. v) относительно отображения, касательного к иммерсии $x \longmapsto (x, b)$ (соотв. $y \longmapsto (a, y)$) из X (соотв. Y) в $X \times Y$. Мы будем обозначать через 0_a нулевой элемент из $T_a(X)$ (если необходимо указать явно a).

Пусть теперь X, Y, Z — многообразия класса C^r и f — отображение класса C^r из $X \times Y$ в Z. С учетом предыдущего отождествления касательное отображение является отображе-

[1]) Для $r = 1$ это означает, что $(T(\mathrm{pr}_1), T(\mathrm{pr}_2))$ есть гомеоморфизм из $T(X \times Y)$ на $T(X) \times T(Y)$.

нием класса C^{r-1} из $T(X)\times T(Y)$ в $T(Z)$. Для $u\in T_a(X)$ и $v\in T_b(Y)$

$$T(f)(u,\ v)=T(f)(u,\ 0_b)+T(f)(0_a,\ v), \tag{1}$$

$$T(f)(0_a,\ 0_b)=0_{f(a,\ b)}. \tag{2}$$

С другой стороны, отображение $y\mapsto f(a,\ y)$ есть композиция иммерсии $y\mapsto(a,\ y)$ и отображения f; отсюда вытекает, что

$T(f)(0,\ v)$ есть образ вектора v при отображении, касательном к $y\mapsto f(a,\ y)$. (3)

Аналогично

$T(f)(u,\ 0)$ есть образ вектора u при отображении, касательном к $x\mapsto f(x,\ b)$. (4)

Если отображение f из $X\times Y$ в Z обозначено через $(x,\ y)\mapsto xy$, то через uv часто обозначается элемент $T(f)(u,\ v)$ для $u\in T(X)$, $v\in T(Y)$.

Пусть X — многообразие класса C^r и m: $X\times X\to X$ — закон композиции класса C^r на X. Тогда $T(m)$ есть закон композиции класса C^{r-1} на $T(X)$. Он называется *законом композиции, касательным к* m. Каноническая проекция p из $T(X)$ на X согласована с законами m и $T(m)$; другими словами,

$$p\circ T(m)=m\circ(p\times p). \tag{5}$$

Из (2) следует, что

$$T(m)(0_x,\ 0_y)=0_{m(x,\ y)}, \tag{6}$$

каковы бы ни были x, y в X; другими словами, нулевое сечение $x\mapsto 0_x$ расслоения $T(X)$ согласовано с законами m и $T(m)$.

Предложение 1. *Пусть X — многообразие класса C^r и m — закон композиции класса C^r на X. Если m ассоциативен* (соотв. *коммутативен*), *то $T(m)$ ассоциативен* (соотв. *коммутативен*).

Если m ассоциативен, то $m\circ(m\times \mathrm{Id}_X)=m\circ(\mathrm{Id}_X\times m)$, откуда

$$T(m)\circ(T(m)\times \mathrm{Id}_{T(X)})=T(m)\circ(\mathrm{Id}_{T(X)}\times T(m))$$

и, следовательно, $T(m)$ ассоциативен. Пусть s — отображение $(x,\ y)\mapsto(y,\ x)$ произведения $X\times X$ в $X\times X$. Если m коммутативен, то $m\circ s=m$ и потому

$$T(m)\circ T(s)=T(m).$$

Но $T(s)$ есть отображение $(u,\ v)\mapsto(v,\ u)$ из $T(X)\times T(X)$ в $T(X)\times T(X)$. Стало быть, $T(m)$ коммутативен.

Предложение 2. *Пусть X — многообразие класса C^r, m — закон композиции класса C^r на X, e — единичный элемент для m.*

(i) *Вектор 0_e есть единичный элемент для $T(m)$.*

(ii) *$T_e(X)$ устойчиво относительно $T(m)$, и закон композиции, индуцированный на $T_e(X)$ законом $T(m)$, является операцией сложения в векторном пространстве $T_e(X)$.*

(iii) *Пусть U — открытое подмножество в X и α — отображение класса C^r из U в X, такое, что для всякого $x \in U$ элемент $\alpha(x)$ обратен к x относительно m. Тогда для всякого $u \in T(U)$ элемент $T(\alpha)u$ есть обратный элемент к u относительно $T(m)$.*

Свойства (3) и (4) показывают, что $T(m)(0_e, u) = T(m)(u, 0_e) = u$ для всякого $u \in T(X)$, откуда следует (i). Для u, v из $T_e(X)$

$$T(m)(u, v) = T(m)(u, 0_e) + T(m)(0_e, v) = u + v,$$

откуда следует (ii). Наконец, соотношения $m(x, \alpha(x)) = m(\alpha(x), x) = e$ для всех $x \in U$ влекут за собой

$$T(m)(u, T(\alpha)(u)) = T(m)(T(\alpha)u, u) = 0_e$$

для любого $u \in T(U)$, откуда следует (iii).

Предложение 3. *Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_p$, Y — многообразия класса C^r, i — целое число из $[1, p]$, m_i (соотв. n) — закон композиции класса C^r на X_i (соотв. Y), u — отображение класса C^r из $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_p$ в Y. Если u дистрибутивно по отношению к переменной с индексом i, то $T(u)$ дистрибутивно по отношению к переменной с индексом i.*

Доказательство аналогично доказательству предложения 1.

2. Группа касательных векторов к группе Ли

Предложение 4. *Пусть G — группа Ли. Тогда многообразие $T(G)$, наделенное законом композиции, касательным к закону умножения в G, есть группа Ли. Единичным элементом в $T(G)$ является вектор 0_e.*

Это следует из предложений 1 и 2.

Предложение 5. *Пусть G и H — группы Ли, f — морфизм из G в H. Тогда $T(f)$ есть морфизм группы Ли $T(G)$ в группу Ли $T(H)$.*

Известно, что $T(f)$ аналитично. С другой стороны, пусть m (соотв. n) — умножение в G (соотв. H). Имеем $f \circ m = n \circ (f \times f)$, откуда следует равенство

$$T(f) \circ T(m) = T(n) \circ (T(f) \times T(f)),$$

выражающее тот факт, что $T(f)$ — гомоморфизм групп.

Следствие. *Пусть* $G_1, \ldots, G_n$ — *группы Ли. Канонический изоморфизм многообразия* $T(G_1 \times \ldots \times G_n)$ *на многообразие* $T(G_1) \times \ldots \times T(G_n)$ *есть изоморфизм групп Ли.*

В самом деле, pr_i есть морфизм из $G_1 \times \ldots \times G_n$ в G_i; стало быть, $T(\mathrm{pr}_i)$ есть морфизм из $T(G_1 \times \ldots \times G_n)$ в $T(G_i)$.

Предложение 6. *Пусть* G — *группа Ли.*

(i) *Каноническая проекция* p: $T(G) \to G$ *есть морфизм групп Ли.*

(ii) *Ядром проекции* p *служит* $T_e(G)$. *Это — подгруппа Ли в* $T(G)$. *Структура группы Ли, индуцированная на* $T_e(G)$ *структурой группы Ли* $T(G)$, *совпадает со структурой группы Ли нормируемого полного пространства* $T_e(G)$.

(iii) *Нулевое сечение* s *есть изоморфизм группы Ли* G *на подгруппу Ли* $s(G)$ *в* $T(G)$ (*эта подгруппа отождествляется с* G).

(iv) *Группа Ли* $T(G)$ *есть полупрямое произведение подгруппы* G *на* $T_e(G)$.

Утверждение (i) следует из (5). Утверждение (ii) очевидно, если принять во внимание предложение 2 (ii). Утверждения (iii) и (iv) вытекают из (6) и из предложения 8 § 1. Ч. Т. Д.

Пусть $u \in T(G)$ и $g \in G$. В силу (3) и (4) произведения ug, gu, вычисленные в группе $T(G)$, суть образы элемента u относительно $T(\delta(g^{-1}))$, $T(\gamma(g))$ соответственно. Из следствия 2 предложения 17 § 1 вытекает, что отображение $(g, u) \mapsto gu$ из $G \times T_e(G)$ в $T(G)$ есть изоморфизм тривиального векторного расслоения $G \times T_e(G)$ с базой G на векторное расслоение $T(G)$. Обратный изоморфизм называется *левой тривиализацией* расслоения $T(G)$. Рассматривая отображение $(g, u) \mapsto ug$, точно так же определяем *правую тривиализацию* расслоения $T(G)$.

Предложение 7. *Пусть* G — *группа Ли,* M — *многообразие класса* C^r, f *и* g — *отображения класса* C^r *из* M *в* G *и, стало быть,* fg — *отображение класса* C^r *из* M *в* G. *Пусть* $m \in M$, $x = f(m)$, $y = g(m)$, $u \in T_m(M)$. *Имеем*

$$T(fg)\,u = T(f)\,u \,.\, y + x \,.\, T(g)\,u.$$

Пусть m — умножение в G. Тогда $fg = m \circ (f, g)$. Но

$$T(f, g)(u) = (T(f)\,u,\ T(g)\,u)$$

и, следовательно, $T(fg)\,u = T(f)\,u \,.\, T(g)\,u$. Достаточно теперь применить (1), где f заменено на m.

Следствие. *Пусть* $n \in \mathbf{Z}$. *Отображение, касательное в* e *к отображению* $g \mapsto g^n$ *из* G *в* G, *есть отображение* $x \mapsto nx$ *из* $T_e(G)$ *в* $T_e(G)$.

Для $n \geqslant 0$ это доказывается индукцией по n с помощью предложения 7. С другой стороны, касательное отображение к отображению $g \mapsto g^{-1}$ в точке e есть отображение $x \mapsto -x$ (n° 1, предложение 2).

Пусть G — группа Ли, X — многообразие класса C^r и $(g, x) \mapsto gx$ — закон левого действия класса C^r группы G на X. Рассуждая, как в предложении 1, получаем отсюда закон левого действия класса C^{r-1} группы $T(G)$ на $T(X)$, который обозначим также через $(u, v) \mapsto uv$. Отождествляя G (соотв. X) с образом нулевого сечения расслоения $T(G)$ (соотв. $T(X)$), мы видим, согласно (6), что закон левого действия группы $T(G)$ на $T(X)$ является продолжением закона левого действия группы G на X. Каковы бы ни были $u \in T_g(G)$ и $v \in T_x(X)$, получаем в силу (1)

$$uv = gv + ux. \tag{7}$$

Если $g \in G$ и $v \in T_x(X)$, то gv есть, согласно (3), образ элемента v относительно отображения, касательного к отображению $y \mapsto gy$ из X в X в точке x. Это касательное отображение есть изоморфизм из $T_x(X)$ на $T_{gx}(X)$. В частности,

$$g(v + v') = gv + gv', \quad g(\lambda v) = \lambda(gv) \text{ для } v, v' \text{ из } T_x(X), \ \lambda \in K. \tag{8}$$

Если $x \in X$ и $u \in T_g(G)$, то ux есть в силу (4) образ элемента u относительно отображения, касательного в g к отображению $h \mapsto hx$ из G в X. Следовательно,

$$(u + u')x = ux + u'x, \quad (\lambda u)x = \lambda(ux) \text{ для } u, u' \in T_g(G), \ \lambda \in K. \tag{9}$$

Изложенное выше применяется в случае, когда группа Ли G действует сама на себе левыми (соотв. правыми) сдвигами. Соответствующий закон действия группы $T(G)$ на $T(G)$ определяется левыми (соотв. правыми) сдвигами группы Ли $T(G)$. Формулы (7), (8), (9), таким образом, справедливы в $T(G)$.

Предложение 8. *Пусть G_1 и G_2 — группы Ли, X_1 и X_2 — многообразия класса C^r, f_i — закон левого действия класса C^r группы G_i на X_i ($i = 1, 2$). Пусть φ — морфизм из G_1 в G_2, ψ — некоторый φ-морфизм из X_1 в X_2. Тогда $T(\psi)$ есть $T(\varphi)$-морфизм из $T(X_1)$ в $T(X_2)$.*

Действительно, $f_2 \circ (\varphi \times \psi) = \psi \circ f_1$, откуда

$$T(f_2) \circ (T(\varphi) \times T(\psi)) = T(\psi) \circ T(f_1).$$

Пусть G — группа Ли, X — многообразие класса C^r и $(g, x) \mapsto gx$ — закон левого действия класса C^r группы G на X. Пусть I — открытое подмножество в K, содержащее 0, и γ: $I \to G$ — такое отображение класса C^r, что $\gamma(0) = e$. Пусть $a = T_0(\gamma)1 \in T_e(G)$ и $x \in X$. Учитывая (4), получаем, что ax

есть образ касательного вектора 1 к I в точке 0 относительно отображения, касательного к $\lambda \mapsto \gamma(\lambda) x$. Следовательно, *векторное поле $x \mapsto ax$ на X есть векторное поле, определенное отображением $(\lambda, x) \mapsto \gamma(\lambda) x$ в смысле Мн. Св. рез.*, 8.4.5.

3. *Случай групускул*

Пусть (G, e, θ, m) — групускула Ли, Ω — область определения закона композиции m. Тогда $T(\Omega)$ отождествляется с некоторым открытым подмножеством в $T(G) \times T(G)$ и $T(m)$ есть аналитическое отображение из $T(\Omega)$ в $T(G)$. Как в n° 2, проверяется, что $(T(G), 0_e, T(\theta), T(m))$ является групускулой Ли. Для законов умножения в G и в $T(G)$ часто используется мультипликативная запись. Каноническая проекция из $T(G)$ в G есть морфизм групускул Ли. Ограничение $T_e(m)$ на $T_e(G) \times T_e(G)$ задает операцию сложения в векторном пространстве $T_e(G)$. Нулевое сечение расслоения $T(G)$ является изоморфизмом групускулы Ли G на некоторую подгрупускулу Ли в $T(G)$, которая отождествляется с G. Если f — морфизм из G в групускулу Ли H, то $T(f)$: $T(G) \to T(H)$ есть морфизм групускул Ли.

Отображение φ: $(g, u) \mapsto gu$ из $G \times T_e(G)$ в $T(G)$ представляет собой изоморфизм тривиального векторного расслоения $G \times T_e(G)$ с базой G на векторное расслоение $T(G)$; действительно, φ и φ^{-1} аналитичны и являются морфизмами расслоений, а потому достаточно применить *Мн. Св. рез.*, 7.2.1. (Можно было бы также приспособить доказательство в n° 2.) Изоморфизм φ^{-1} называется левой тривиализацией расслоения $T(G)$. Изоморфизм, обратный к отображению $(g, u) \mapsto ug$, называется правой тривиализацией.

Пусть X — многообразие класса C^r, ψ — кусок левого закона действия класса C^r групускулы G на X. Тогда $T(\psi)$ есть кусок закона левого действия класса C^{r-1} групускулы $T(G)$ на $T(X)$, продолжающий ψ. Формулы (7), (8), (9) остаются в силе, если gx определено. Если I — открытое подмножество в K, содержащее 0, γ: $I \to G$ — такое отображение класса C^r, что $\gamma(0) = e$, и $a = T_0(\gamma) 1$, то векторное поле $x \mapsto ax$, определенное на X, есть векторное поле, определенное отображением $(\lambda, x) \mapsto \gamma(\lambda) x$ в смысле *Мн. Св. рез.*, 8.4.5.

§ 3. Переход от группы Ли к ее алгебре Ли

1. *Свертка точечных распределений на группе Ли*

Определение 1. *Пусть G — группа Ли, g и g' — два элемента из G, и пусть $t \in T_g^{(\infty)}(G)$, $t' \in T_{g'}^{(\infty)}(G)$ — два точечных распределения на G в точках g и g'* (*Мн. Св. рез.*, 13.2.1). *Сверткой элементов t и t', обозначаемой через $t * t'$, называется*

образ элемента $t \otimes t'$ *относительно отображения* $(h, h') \longmapsto hh'$ *из* $G \times G$ *в* G (*Мн. Св. рез.*, 13.2.3).

Предложение 1. (i) *Если* $t \in T_g^{(s)}(G)$ *и* $t' \in T_{g'}^{(s')}(G)$, *то* $t * t' \in T_{gg'}^{(s+s')}(G)$.

(ii) *Если* t *или* t' *не имеет свободного члена, то* $t * t'$ *не имеет свободного члена.*

(iii) $\varepsilon_g * \varepsilon_{g'} = \varepsilon_{gg'}$.

(iv) *Пусть* $t \in T_g^{(s)}(G)$, $t' \in T_{g'}^{(s')}(G)$ *и* f — *функция класса* $C^{s+s'}$ *в некоторой открытой окрестности точки* gg' *со значениями в некотором полинормированном отделимом пространстве. Имеем:*

$$\langle t * t', f\rangle = \langle t', h' \longmapsto \langle t, h \longmapsto f(hh')\rangle\rangle = \langle t, h \longmapsto \langle t', h' \longmapsto f(hh')\rangle\rangle.$$

Это следует из *Мн. Св. рез.*, 13.4.1, 13.2.3 и 13.4.4.

Предположим, что $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$ и G конечномерна. Тогда G локально компактна. Если t, t' — точечные меры, то определение свертки $t * t'$ согласуется с определением в *Интегр.*, гл. VIII, § 1. Мы увидим позднее, что свертка мер и свертка точечных распределений являются двумя частными случаями свертки не обязательно точечных распределений.

Пусть $\mathcal{T}^{(\infty)}(G)$ — прямая сумма пространств $T_g^{(\infty)}(G)$ для $g \in G$ (см. *Мн. Св. рез.*, 13.6.1). Определим свертку в $\mathcal{T}^{(\infty)}(G)$ как билинейное отображение из $\mathcal{T}^{(\infty)}(G) \times \mathcal{T}^{(\infty)}(G)$ в $\mathcal{T}^{(\infty)}(G)$, продолжающее свертку из определения 1. Обозначим ее также через $*$. Таким образом, $\mathcal{T}^{(\infty)}(G)$ наделено структурой алгебры, фильтрованной подпространствами $\mathcal{T}^{(s)}(G)$. Подалгебра $\mathcal{T}^{(0)}(G) = \bigoplus_{g \in G} T_g^{(0)}(G)$ отождествляется с групповой алгеброй $K^{(G)}$ группы G над K.

Предложение 2. *Алгебра* $\mathcal{T}^{(\infty)}(G)$ *ассоциативна. Она коммутативна тогда и только тогда, когда* G *коммутативна.*

Пусть $t \in \mathcal{T}^{(\infty)}(G)$, $t' \in \mathcal{T}^{(\infty)}(G)$, $t'' \in \mathcal{T}^{(\infty)}(G)$. Тогда $t * (t' * t'')$ является образом элемента $t \otimes t' \otimes t''$ относительно отображения $(g, g', g'') \longmapsto g(g'g'')$ из $G \times G \times G$ в G, а $(t * t') * t''$ — образом элемента $t \otimes t' \otimes t''$ относительно отображения $(g, g', g'') \longmapsto (gg')g''$ из $G \times G \times G$ в G. Следовательно, $(t * t') * t'' = t * (t' * t'')$. Аналогично проверяется, что, если G коммутативна, то $t * t' = t' * t$. Если свертка коммутативна, то G коммутативна в силу предложения 1 (iii).

Предложение 3. *Если* $t \in \mathcal{T}^{(\infty)}(G)$ *и* $g \in G$, *то* $\gamma(g)_* t = \varepsilon_g * t$, $\delta(g)_* t = t * \varepsilon_{g^{-1}}$, $(\operatorname{Int} g)_* t = \varepsilon_g * t * \varepsilon_{g^{-1}}$. *В частности,* ε_e *есть единичный элемент в* $\mathcal{T}^{(\infty)}(G)$.

Рассмотрим следующую диаграмму: $G \xrightarrow{\varphi} G \times G \xrightarrow{\psi} G$,

где φ есть отображение $h \mapsto (g, h)$ и ψ есть отображение $(h', h) \mapsto h'h$. Имеем $\gamma(g) = \psi \circ \varphi$ и, следовательно, $\gamma(g)_* t = \psi_*(\varphi_*(t))$. Однако $\varphi_*(t) = \varepsilon_g \otimes t$; стало быть, $\psi_*(\varphi_*(t)) = \varepsilon_g * t$. Аналогично рассуждаем для $\delta(g)_* t$. Наконец, $\operatorname{Int} g = \gamma(g) \circ \delta(g)$ и, следовательно, $(\operatorname{Int} g)_* = \gamma(g)_* \circ \delta(g)_*$.

Таким образом, видно, что для $t \in T(G)$ элементы $\varepsilon_g * t$ и $t * \varepsilon_g$ равны произведениям gt и tg соответственно, вычисленным в группе $T(G)$ (§ 2, n° 2). Необходимо учитывать, что для t, t' из $T(G)$ произведение tt' в смысле § 2, вообще говоря, отлично от $t * t'$.

Определение 2. *Пусть G — группа Ли. Подалгебра в $\mathscr{T}^{(\infty)}(G)$, образованная распределениями с носителем, содержащимся в $\{e\}$, обозначается через $U(G)$.*

Эта алгебра фильтрована подпространствами

$$U_s(G) = U(G) \cap \mathscr{T}^{(s)}(G) = T_e^{(s)}(G).$$

Полагаем $U^+(G) = T_e^{(\infty)+}(G)$, $U_s^+(G) = U^+(G) \cap U_s(G)$ (см. *Мн. Св. рез.*, 13.2.1). Напомним, что $U_0(G)$ отождествляется с K, а $U_1^+(G)$ — с касательным пространством $T_e(G)$. В $U(G)$ подпространство $U^+(G)$ представляет собой двусторонний идеал, дополнительный к $U_0(G)$.

Пример. Пусть E — нормируемое полное пространство, рассматриваемое как группа Ли. Тогда векторное пространство $U(E)$ канонически отождествляется с векторным пространством $\mathsf{TS}(E)$ (*Мн. Св. рез.*, 13.2.4). Пусть m: $E \times E \to E$ — сложение в E. Тогда

$$m_*: \mathsf{TS}(E \times E) \to \mathsf{TS}(E)$$

равно $\mathsf{TS}(m)$ (*Мн. Св. рез.*, 13.2.4). Для t, t' из $U(E) = \mathsf{TS}(E)$ образ $t * t'$ симметрического тензорного произведения $t \otimes t'$ относительно m_* равен, таким образом, $\mathsf{TS}(m)(t \otimes t')$. В силу *Alg.*, chap. IV, § 5, n° 6, proposition 7, n^elle^ éd., этот образ есть не что иное, как произведение tt' в алгебре $\mathsf{TS}(E)$. Тем самым алгебра $U(E)$ отождествляется с алгеброй $\mathsf{TS}(E)$.

Предложение 4. *Рассмотрим билинейное отображение $(u, v) \mapsto u * v$ (соотв. $(u, v) \mapsto v * u$) из $U(G) \times K^{(G)}$ в $\mathscr{T}^{(\infty)}(G)$. Соответствующее линейное отображение из $U(G) \otimes K^{(G)}$ в $\mathscr{T}^{(\infty)}(G)$ есть изоморфизм векторных пространств.*

Действительно, $K^{(G)}$ есть прямая сумма пространств $K\varepsilon_x$ для $x \in G$. С другой стороны, отображение $u \mapsto u * \varepsilon_g$ (соотв.

$u \mapsto \varepsilon_g * u$) есть изоморфизм векторного пространства $U(G) = T_e^{(\infty)}(G)$ на векторное пространство $T_g^{(\infty)}(G)$ в силу предложения 3. Наконец, $\mathscr{T}^{(\infty)}(G)$ есть прямая сумма пространств $T_g^{(\infty)}(G)$ для $g \in G$. Ч. Т. Д.

Пусть X — многообразие класса C^r ($r \geqslant \infty$) и $x \in X$. В *Мн. Св. рез.*, 13.3.1, были определены каноническая фильтрация на векторном пространстве $T_x^{(\infty)}(X)$ и канонический изоморфизм $i_{X, x}$ ассоциированного градуированного векторного пространства на градуированное векторное пространство $\mathsf{TS}(T_x(X))$. В частности, положим $T_e(G) = L$; тогда $i_{G, e}$ есть изоморфизм градуированного векторного пространства $\operatorname{gr} U(G)$ на градуированное векторное пространство $\mathsf{TS}(L)$. Но $U(G)$ — фильтрованная алгебра, поэтому $\operatorname{gr} U(G)$ наделяется структурой градуированной алгебры.

Предложение 5. *Изоморфизм* $i_{G, e}$: $\operatorname{gr} U(G) \to \mathsf{TS}(L)$ *есть изоморфизм алгебр.*

Пусть p — отображение $(t, t') \mapsto t \otimes t'$ из $U(G) \times U(G)$ в $U(G \times G)$, c — отображение $(t, t') \mapsto t * t'$ из $U(G) \times U(G)$ в $U(G)$ и m — отображение $(g, g') \mapsto gg'$ из $G \times G$ в G. В силу определения 1

$$c = m_* \circ p. \tag{1}$$

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{gr} U(G) \times \operatorname{gr} U(G) \arrow[r, "\operatorname{gr}(p)"] \arrow[d, "i_{G,e} \times i_{G,e}"'] & \operatorname{gr} U(G \times G) \arrow[r, "\operatorname{gr}(m_*)"] \arrow[d, "i_{G \times G, e}"] & \operatorname{gr} U(G) \arrow[d, "i_{G,e}"] \\
\mathsf{TS}(L) \times \mathsf{TS}(L) \arrow[r, "q"] & \mathsf{TS}(L \times L) \arrow[r, "\mathsf{TS}(T(m))"] & \mathsf{TS}(L)
\end{tikzcd}$$

где отображение q получается из канонического изоморфизма пространства $\mathsf{TS}(L) \otimes \mathsf{TS}(L)$ на $\mathsf{TS}(L \times L)$. В силу *Мн. Св. рез.*, 13.4.6 и 13.3.5, оба квадрата диаграммы коммутативны. Поэтому ввиду (1) диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{gr} U(G) \times \operatorname{gr} U(G) \arrow[r, "\operatorname{gr}(c)"] \arrow[d, "i_{G,e} \times i_{G,e}"'] & \operatorname{gr} U(G) \arrow[d, "i_{G,e}"] \\
\mathsf{TS}(L) \times \mathsf{TS}(L) \arrow[r, "\mathsf{TS}(T(m)) \circ q"] & \mathsf{TS}(L)
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Однако $T(m)$: $L \times L \to L$ преобразует (x, y) в $x + y$ (§ 2, n° 1, предложение 2 (ii)). В силу *Alg.*, chap. IV, § 5, n° 6, proposition 7, n$^{\text{elle}}$ éd., $\mathsf{TS}(T(m)) \circ q$ есть, стало быть, умножение в алгебре $\mathsf{TS}(L)$.

2. Свойства функториальности

Предложение 6. *Пусть G, H — группы Ли, φ — морфизм из G в H. Для t, t' из $\mathscr{T}^{(\infty)}(G)$ имеем $\varphi_*(t * t') = \varphi_*(t) * \varphi_*(t')$.*

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{m} & G \\ {\scriptstyle \varphi\times\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ H \times H & \xrightarrow{n} & H \end{array}$$

где $m(g, g') = gg'$, $n(h, h') = hh'$. Эта диаграмма коммутативна. Следовательно,

$$\varphi_*(t * t') = \varphi_*(m_*(t \otimes t')) = n_*((\varphi \times \varphi)_*(t \otimes t')) =$$
$$= n_*(\varphi_*(t) \otimes \varphi_*(t')) = \varphi_*(t) * \varphi_*(t').$$

Группы Ли G и $G^\vee$ имеют одно и то же нижележащее многообразие; стало быть, векторные пространства $\mathscr{T}^{(\infty)}(G)$ и $\mathscr{T}^{(\infty)}(G^\vee)$ совпадают друг с другом. Пусть θ — отображение $g \mapsto g^{-1}$, являющееся изоморфизмом группы Ли G на группу Ли $G^\vee$. Тогда θ_* есть автоморфизм векторного пространства $\mathscr{T}^{(\infty)}(G)$, который мы обозначим через $t \mapsto t^\vee$. Имеем $(\varepsilon_g)^\vee = \varepsilon_{g^{-1}}$. Если $t \in T_e(G)$, то

$$t^\vee = -t \quad (\S\ 2,\ \text{предложение } 2). \tag{2}$$

Пример. Предположим, что G — группа Ли, определенная нормируемым полным пространством E. Тогда $U(G)$ отождествляется с $\mathsf{TS}(E)$ и ограничение отображения θ_* на $U(G)$ отождествляется с $\mathsf{TS}(T_e(\theta))$ (*Мн. Св. рез.*, 13.2.4). Следовательно, если $t \in \mathsf{TS}^s(E)$, то $t^\vee = (-1)^s t$.

Предложение 7. *Пусть G — группа Ли и t, t' лежат в $\mathscr{T}^{(\infty)}(G)$.*

(i) *Произведение $t * t'$, вычисленное в $G^\vee$, равно произведению $t' * t$, вычисленному в G.*

(ii) *Имеем $(t * t')^\vee = t'^\vee * t^\vee$.*

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "n"'] & & G \times G \arrow[dl, "m"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

где $s(g, g') = (g', g)$, $m(g, g') = gg'$, $n(g, g') = g'g$, каковы бы ни были g, g' в G. Эта диаграмма коммутативна. Стало быть, $n_*(t \otimes t') = m_*(s_*(t \otimes t')) = m_*(t' \otimes t)$. Это равенство есть не что иное, как (i). Утверждение (ii) следует из (i) и предложения 6.

Предложение 8. *Пусть G, H — группы Ли, φ — морфизм из G в H. Если $t \in \mathscr{T}^{(\infty)}(G)$, то $\varphi_*(t^\vee) = (\varphi_*(t))^\vee$.*

Пусть θ (соотв. θ') — отображение $g \mapsto g^{-1}$ из G в G (соотв. из H в H). Имеем $\varphi \circ \theta = \theta' \circ \varphi$, откуда $\varphi_*(\theta_*(t)) = \theta'_*(\varphi_*(t))$.

Предложение 9. *Пусть $G_1, \ldots, G_n$ — группы Ли и $G = G_1 \times \ldots \times G_n$. Если векторные пространства $\mathscr{T}^{(\infty)}(G)$ и $\mathscr{T}^{(\infty)}(G_1) \otimes \ldots \otimes \mathscr{T}^{(\infty)}(G_n)$ канонически отождествлены, то алгебра $\mathscr{T}^{(\infty)}(G)$ является тензорным произведением алгебр $\mathscr{T}^{(\infty)}(G_1), \ldots, \mathscr{T}^{(\infty)}(G_n)$. Если $t_i \in \mathscr{T}^{(\infty)}(G_i)$ для $i = 1, \ldots, n$, то*

$$(t_1 \otimes \ldots \otimes t_n)^\vee = t_1^\vee \otimes \ldots \otimes t_n^\vee.$$

Достаточно рассмотреть случай $n = 2$. Пусть t_1, t'_1 лежат в $\mathscr{T}^{(\infty)}(G_1)$, а t_2, t'_2 — в $\mathscr{T}^{(\infty)}(G_2)$. Надо показать, что $(t_1 \otimes t_2) * (t'_1 \otimes t'_2) = (t_1 * t'_1) \otimes (t_2 * t'_2)$ и $(t_1 \otimes t_2)^\vee = t_1^\vee \otimes t_2^\vee$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
(G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "n"'] & & G_1 \times G_2 \\
& (G_1 \times G_1) \times (G_2 \times G_2) \arrow[ur, "p_1 \times p_2"'] &
\end{tikzcd}$$

где $m((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) = (x_1 x'_1, x_2 x'_2)$, $n((x_1, x_2), (x'_1, x'_2)) = ((x_1, x'_1), (x_2, x'_2))$, $p_1(x_1, x'_1) = x_1 x'_1$, $p_2(x_2, x'_2) = x_2 x'_2$. Эта диаграмма коммутативна. Следовательно,

$$m_*((t_1 \otimes t_2) \otimes (t'_1 \otimes t'_2)) = (p_1 \times p_2)_* (n_*((t_1 \otimes t_2) \otimes (t'_1 \otimes t'_2))),$$

т. е.

$$\begin{aligned}(t_1 \otimes t_2) * (t'_1 \otimes t'_2) &= (p_1 \times p_2)_* ((t_1 \otimes t'_1) \otimes (t_2 \otimes t'_2)) = \\ &= p_{1*}(t_1 \otimes t'_1) \otimes p_{2*}(t_2 \otimes t'_2) = \\ &= (t_1 * t'_1) \otimes (t_2 * t'_2).\end{aligned}$$

Аналогичным образом доказывается, что $(t_1 \otimes t_2)^\vee = t_1^\vee \otimes t_2^\vee$.

Предложение 10. *Пусть H — подгруппа Ли в G и i: $H \to G$ — каноническая инъекция. Тогда i_* есть инъективный гомоморфизм алгебры $\mathscr{T}^{(\infty)}(H)$ в алгебру $\mathscr{T}^{(\infty)}(G)$ и $i_*(t^\vee) = (i_*(t))^\vee$ для всякого $t \in \mathscr{T}^{(\infty)}(H)$.*

Это следует из предложений 6, 8 и *Мн. Св. рез.*, 13.2.3.

Алгебра $\mathscr{T}^{(\infty)}(H)$ отождествляется с подалгеброй алгебры $\mathscr{T}^{(\infty)}(G)$ при помощи изоморфизма из предложения 10.

Замечание. Предложение 10 остается справедливым, если H — квазиподгруппа Ли.

Напомним (*Мн. Св. рез.*, 13.5.1), что если V — аналитическое многообразие над K, то $\mathcal{T}^{(\infty)}(V)$ канонически наделено структурой коалгебры над K с коединицей; коединица есть линейное отображение из $\mathcal{T}^{(\infty)}(V)$ в K, ставящее в соответствие всякому элементу из $T_x^{(\infty)}(V)$ его свободный член.

Предложение 11. *Пусть G — группа Ли.*

(i) *Коалгебра $\mathcal{T}^{(\infty)}(G)$, наделенная сверткой, является биалгеброй* (*Alg.*, chap. III, p. 149) [1].

(ii) *Пусть c — копроизведение в $\mathcal{T}^{(\infty)}(G)$, $t \in \mathcal{T}^{(\infty)}(G)$ и $c(t) = \sum_{i=1}^{n} t_i \otimes t_i'$. Тогда $c(t^\vee) = \sum_{i=1}^{n} t_i^\vee \otimes t_i'^\vee$.*

Докажем (i). В определении биалгебр условие 1° следует из предложений 2 и 3, а условие 2° — из *Мн. Св. рез.*, 13.5.1.

Пусть d — отображение $g \mapsto (g, g)$ из G в $G \times G$. Имеем $c = d_*$, и, стало быть, c есть морфизм алгебр (предложения 6 и 9), что составляет условие 3°. Пусть $t \in T_g^{(\infty)}(G)$, $t' \in T_{g'}^{(\infty)}(G)$ не имеют свободных членов и λ, λ' лежат в K; тогда $\varepsilon_g \otimes t'$, $t \otimes \varepsilon_{g'}$, $t \otimes t'$ не имеют свободных членов (*Мн. Св. рез.*, 13.4.1), а потому свободный член элемента $(\lambda\varepsilon_g + t) * (\lambda'\varepsilon_{g'} + t')$ есть $\lambda\lambda'$; следовательно, условие 4° выполнено.

Докажем (ii). В силу предложений 8 и 9

$$c(t^\vee) = d_*(t^\vee) = (d_*(t))^\vee = \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \otimes t_i'\right)^\vee = \sum_{i=1}^{n} t_i^\vee \otimes t_i'^\vee.$$

Предложение 12. *Пусть G, H — две группы Ли, φ — морфизм из G в H. Тогда φ_* есть морфизм биалгебр из $\mathcal{T}^{(\infty)}(G)$ в $\mathcal{T}^{(\infty)}(H)$.*

Это следует из предложения 6 и из *Мн. Св. рез.*, 13.5.1.

Пусть G — группа Ли. Ограничение свертки и копроизведения на $U(G)$ определяют на $U(G)$ структуру биалгебры. Имеем $U(G)^\vee = U(G)$. Если φ: $G \to H$ — морфизм групп Ли, то через $U(\varphi)$ обозначается отображение $t \mapsto \varphi_*(t)$ из $U(G)$ в $U(H)$; это морфизм биалгебр. Если ψ: $H \to L$ — другой морфизм групп Ли, то $U(\psi \circ \varphi) = U(\psi) \circ U(\varphi)$. Если φ — иммерсия (соотв. субмерсия), то $U(\varphi)$ инъективно (соотв. сюръективно) в силу *Мн. Св. рез.*, 13.2.3. В частности, если H — подгруппа Ли в G, то $U(H)$ отождествляется с подалгеброй в $U(G)$, причем копроизведение в $U(H)$ есть ограничение копроизведения в $U(G)$. Если H

---

[1]) См. также стр. 480. — *Прим. перев.*

открыта в G, то $U(H) = U(G)$. Если G_1, G_2 — группы Ли, то $U(G_1 \times G_2)$ отождествляется с $U(G_1) \otimes U(G_2)$. Примитивные элементы в $U(G)$ суть элементы из $T_e(G)$ (*Мн. Св. рез.*, 13.5.3).

Пусть опять φ: $G \to H$ — морфизм групп Ли. Если отождествить $\operatorname{gr} U(G)$ с $\mathsf{TS}(T_e(G))$ и $\operatorname{gr} U(H)$ с $\mathsf{TS}(T_e(H))$, то $\operatorname{gr} U(\varphi)$ отождествляется с $\mathsf{TS}(T_e(\varphi))$ (*Мн. Св. рез.*, 13.3.5). Применим это к изоморфизму $g \mapsto g^{-1}$ из G на $G^{\vee}$; тогда $T_e(\varphi) = -1$ и, стало быть,

$$t \in U_s(G) \Rightarrow t^{\vee} \equiv (-1)^s t \bmod U_{s-1}(G). \tag{3}$$

3. *Случай группы, действующей на многообразии*

Пусть G — группа Ли, X — многообразие класса C^r и f — закон левого действия класса C^r группы G на X. Если $t \in T_g^{(s)}(G)$, $u \in T_x^{(s')}(X)$ и $s + s' \leqslant r$, то через $t * u$ обозначается образ элемента $t \otimes u$ относительно f_*. Произведение $*$ продолжается до билинейного отображения из $\mathcal{T}^{(s)}(G) \times \mathcal{T}^{(s')}(X)$ в $\mathcal{T}^{(s+s')}(X)$, которое мы также обозначим через $*$. Предложение 1 n° 1 распространяется с очевидными изменениями на эту ситуацию.

Когда G действует сама на себе левыми сдвигами, мы вновь получаем определение n° 1.

Предложение 13. *Пусть элементы* $t \in \mathcal{T}^{(s)}(G)$, $t' \in \mathcal{T}^{(s')}(G)$, $u \in \mathcal{T}^{(s'')}(X)$ *таковы, что* $s + s' + s'' \leqslant r$. *Тогда* $(t * t') * u = t * (t' * u)$.

Это доказывается так же, как и предложение 2 n° 1.

В частности, если $r \geqslant \infty$, то векторное пространство $\mathcal{T}^{(\infty)}(X)$ является левым модулем над алгеброй $\mathcal{T}^{(\infty)}(G)$ относительно произведения $*$.

Предложение 14. (i) *Пусть* $g_0 \in G$ *и* $\tau(g_0)$ — *отображение* $x \mapsto f(g_0, x)$ *из* X *в* X. *Если* $u \in \mathcal{T}^{(r)}(X)$, *то* $\tau(g_0)_* u = \varepsilon_{g_0} * u$.

(ii) *Пусть* $x_0 \in X$ *и* $\rho(x_0)$ — *отображение* $g \mapsto f(g, x_0)$ *из* G *в* X. *Если* $t \in T^{(r)}(G)$, *то* $\rho(x_0)_* t = t * \varepsilon_{x_0}$.

Это доказывается так же, как и предложение 3 n° 1.

В частности, если $u \in T(X)$ и $t \in T(G)$, то $\varepsilon_{g_0} * u$ и $t * \varepsilon_{x_0}$ равны произведениям $g_0 u$, $t x_0$, определенным в n° 2 § 2.

Предложение 15. *Пусть* G (*соотв.* G') — *группа Ли,* X (соотв. X') — *многообразие класса* C^r. *Допустим, что задан закон левого действия класса* C^r *группы* G (соотв. G') *на* X (соотв. X'). *Пусть* φ — *морфизм из* G *в* G', ψ — *некоторый* φ-*морфизм из* X *в* X', *а элементы* $t \in \mathcal{T}^{(s)}(G)$, $u \in \mathcal{T}^{(s')}(X)$ *таковы, что* $s + s' \leqslant r$. *Тогда* $\psi_*(t * u) = \varphi_*(t) * \psi_*(u)$.

Это доказывается так же, как и предложение 6 n° 2.

Замечание. Пусть f — закон правого действия класса C^r группы G на X. Если $t \in \mathcal{T}^{(s)}(G)$ и $u \in \mathcal{T}^{(s')}(X)$, где $s + s' \leqslant r$, то через $u * t$ обозначается образ элемента $u \otimes t$ относительно f_*. Предложения 13, 14 и 15 очевидным образом переносятся в эту ситуацию.

Предложение 16. *Пусть G, G' — группы Ли, X — многообразие класса C^r; предположим, что G* (соотв. G') *действует слева* (соотв. *справа*) *на X, причем $(gx)g' = g(xg')$, каковы бы ни были $x \in X$, $g \in G$, $g' \in G$. Пусть $t \in \mathcal{T}^{(s)}(G)$, $t' \in \mathcal{T}^{(s')}(G')$, $t'' \in \mathcal{T}^{(s'')}(X)$, где $s + s' + s'' \leqslant r$. Тогда*

$$(t * t'') * t' = t * (t'' * t').$$

В самом деле, элемент $(t * t'') * t'$ (соотв. $t * (t'' * t')$) есть образ элемента $t \otimes t'' \otimes t'$ относительно отображения $(g, x, g') \mapsto (gx)g'$ (соотв. $g(xg')$) из $G \times X \times G'$ в X.

4. Свертка точечных распределений и функций

Пусть G — группа Ли, X — многообразие класса C^r и $(g, x) \mapsto gx$ — закон левого действия класса C^r группы G на X. Для всякого $x \in X$ обозначим через $\rho(x)$ соответствующее орбитальное отображение.

Определение 3. *Пусть $t \in \mathcal{T}^{(s)}(G)$, где $s \leqslant r$, и пусть $f\colon X \to F$ — функция класса C^r со значениями в отделимом полинормированном пространстве (например, $F = K$). Сверткой элементов t и f, обозначаемой через $t * f$, называется функция на X со значениями в F, определяемая формулой*

$$(t * f)(x) = \langle t^\vee * \varepsilon_x, f \rangle.$$

Имеем

$$\begin{aligned}(t * f)(x) &= \langle \rho(x)_*(t^\vee), f \rangle \quad (\text{n° 3, предложение 14 (ii)}) = \\ &= \langle t^\vee, f \circ \rho(x) \rangle \quad (\textit{Мн. Св. рез.}, 13.2.3) = \\ &= \langle t, (f \circ \rho(x))^\vee \rangle \quad (\textit{Мн. Св. рез.}, 13.2.3). \qquad (4)\end{aligned}$$

Отметим также, что определение 3 записывается в более симметричной форме:

$$\langle \varepsilon_x, t * f \rangle = \langle t^\vee * \varepsilon_x, f \rangle. \qquad (5)$$

Функция $(g, x) \mapsto f(gx) = (f \circ \rho(x))(g)$ на $G \times X$ принадлежит классу C^r. В силу *Мн. Св. рез.*, 13.4.4, функция $x \mapsto \langle t^\vee, f \circ \rho(x) \rangle$ принадлежит классу C^{r-s}, если $s < \infty$. Другими словами, если $s \leqslant \infty$, то $t * f$ *принадлежит классу* C^{r-s}.

Ясно, что $t * f$ линейно зависит от t и f.

Формула (4) влечет за собой, в частности, формулу ($g \in G$)

$$(\varepsilon_g * f)(x) = f(g^{-1}x), \tag{6}$$

т. е.

$$\varepsilon_g * f = \gamma(g) f. \tag{7}$$

Предположим, что $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, что G и X конечномерны и X наделено положительной мерой, инвариантной относительно G. Определение элемента $\varepsilon_g * f$ согласуется с определением из *Интегр.*, гл. VIII, § 4, n° 1 (см. формулу (2) *там же*).

Предложение 17. *Пусть $t \in \mathscr{T}^{(s)}(G)$, $t' \in \mathscr{T}^{(s')}(X)$ и $f \colon X \to F$ — функция класса C^r, где $s + s' \leqslant r$. Тогда*

$$\langle t', t * f\rangle = \langle t^\vee * t', f\rangle.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \langle t', t * f\rangle &= \langle t', x \mapsto \langle t, g \mapsto f(g^{-1}x)\rangle\rangle \quad (\text{в силу } (4)) = \\ &= \langle t \otimes t', (g, x) \mapsto f(g^{-1}x)\rangle \quad (\textit{Мн. Св. рез.}, 13.4.4) = \\ &= \langle t^\vee \otimes t', (g, x) \mapsto f(gx)\rangle \quad (\textit{Мн. Св. рез.}, 13.2.3) = \\ &= \langle t^\vee * t', f\rangle. \end{aligned}$$

Предложение 18. *Пусть элементы $t \in \mathscr{T}^{(s)}(G)$, $t' \in \mathscr{T}^{(s')}(G)$ и функция $f \colon X \to F$, принадлежащая классу C^r, таковы, что $s + s' \leqslant r$. Тогда*

$$(t * t') * f = t * (t' * f).$$

Действительно, для всякого $x \in X$

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_x, (t * t') * f\rangle &= \langle (t * t')^\vee * \varepsilon_x, f\rangle \quad (\text{в силу } (5)) = \\ &= \langle t'^\vee * (t^\vee * \varepsilon_x), f\rangle \quad (\text{предложения 2 и 7}) = \\ &= \langle t^\vee * \varepsilon_x, t' * f\rangle \quad (\text{предложение 17}) = \\ &= \langle \varepsilon_x, t * (t' * f)\rangle \quad (\text{предложение 17}). \text{ Ч. Т. Д.} \end{aligned}$$

Если $r \geqslant \infty$, то мы видим, что пространство функций класса C^∞ на X со значениями в F есть левый модуль над алгеброй $\mathscr{T}^{(\infty)}(G)$.

Предложение 19. *Пусть $t \in \mathscr{T}^{(s)}(G)$, где $s \leqslant r$, и f* (соотв. f') — *функция класса C^r на X со значениями в отделимом полинормированном пространстве F* (соотв. F'). *Пусть $(u, u') \mapsto uu'$ — билинейное непрерывное отображение из $F \times F'$ в отделимое полинормированное пространство F'', так что ff' есть функция класса C^r на X со значениями в F'', $\sum_{i=1}^{n} t_i \otimes t'_i$ — образ элемента t в $\mathscr{T}^{(s)}(G) \otimes \mathscr{T}^{(s)}(G)$ относительно копроизведения. Тогда*

$$t * (ff') = \sum_{i=1}^{n} (t_i * f)(t'_i * f').$$

Действительно, пусть $x \in X$, и, как всегда, через $\rho(x)$ обозначено орбитальное отображение для точки x. Имеем

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon_x, t * (ff')\rangle &= \langle t^\vee, (ff') \circ \rho(x)\rangle \quad (\text{в силу } (4)) = \\ &= \langle t^\vee, (f \circ \rho(x))(f' \circ \rho(x))\rangle = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle t_i^\vee, f \circ \rho(x)\rangle \langle t_i'^\vee, f' \circ \rho(x)\rangle \quad (\textit{Мн. Св. рез.}, 13.5.2) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle \varepsilon_x, t_i * f\rangle \langle \varepsilon_x, t_i' * f'\rangle \quad (\text{в силу } (4)).\end{aligned}$$

Замечание 1. Пусть G — группа Ли, X — многообразие класса C^r и $(x, g) \mapsto xg$ — закон правого действия класса C^r группы G на X. Если $t \in \mathcal{T}^{(s)}(G)$ (где $s \leqslant r$) и $f\colon X \to F$ — функция класса C^r на X, то через $f * t$ обозначается функция на X, определяемая условием

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon_x, f * t\rangle &= \langle \varepsilon_x * t^\vee, f\rangle = \\ &= \langle \rho(x)_* (t^\vee), f\rangle = \\ &= \langle t^\vee, f \circ \rho(x)\rangle = \\ &= \langle t, (f \circ \rho(x))^\vee\rangle. \qquad (8)\end{aligned}$$

В частности,

$$(f * \varepsilon_g)(x) = f(xg^{-1}), \qquad (9)$$

т. е.

$$f * \varepsilon_g = \delta(g)^{-1} f. \qquad (10)$$

Предложения 17, 18 и 19 в очевидных обозначениях превращаются в равенства

$$\langle t', f * t\rangle = \langle t' * t^\vee, f\rangle, \qquad (11)$$

$$f * (t * t') = (f * t) * t', \qquad (12)$$

$$(ff') * t = \sum_{i=1}^{n} (f * t_i)(f' * t_i'). \qquad (13)$$

Предложение 20. *Пусть G, G' — группы Ли, X — многообразие класса C^r и $(g, x) \mapsto gx$* (соотв. $(x, g') \mapsto xg'$) *— закон левого* (соотв. *правого*) *действия класса C^r группы G* (соотв. G') *на X. Предположим, что $(gx)g' = g(xg')$, каковы бы ни были $x \in X$, $g \in G$, $g' \in G'$. Пусть элементы $t \in \mathcal{T}^{(s)}(G)$, $t' \in \mathcal{T}^{(s')}(G')$ и функция $f\colon X \to F$ класса C^r таковы, что $s + s' \leqslant r$. Тогда*

$$(t * f) * t' = t * (f * t').$$

Действительно, для всякого $x \in X$

$$\begin{aligned}\langle \varepsilon_x, (t * f) * t' \rangle &= \langle \varepsilon_x * t'^{\vee}, t * f \rangle && \text{(в силу (8))} = \\ &= \langle t^{\vee} * (\varepsilon_x * t'^{\vee}), f \rangle && \text{(предложение 17)} = \\ &= \langle t^{\vee} * \varepsilon_x, f * t' \rangle && \text{(предложение 2 и (11))} = \\ &= \langle \varepsilon_x, t * (f * t') \rangle && \text{(в силу (5)). Ч. Т. Д.}\end{aligned}$$

В частности, рассмотрим действие группы G на самой себе левыми и правыми сдвигами. Если f: $G \to F$ — функция класса C^r на G и $t \in \mathscr{T}^{(s)}(G)$ (с $s \leqslant r$), то $t * f$ и $f * t$ являются (при $s < \infty$) функциями класса C^{r-s} на G. Пусть, кроме того, $t' \in \mathscr{T}^{(s')}(G)$ с $s + s' \leqslant r$. Тогда

$$(t * f) * t' = t * (f * t'). \tag{14}$$

В частности, $\mathscr{C}^{\infty}(G)$ является $(\mathscr{T}^{(\infty)}(G), \mathscr{T}^{(\infty)}(G))$-бимодулем. Формулы (5) и (8) включают в себя как частные случаи равенства

$$\langle t, f \rangle = \langle \varepsilon_e, t^{\vee} * f \rangle = \langle \varepsilon_e, f * t^{\vee} \rangle. \tag{15}$$

Замечание 2. Пусть $(g, x) \mapsto gx$ — закон левого действия класса C^r группы G на X. Пусть $t \in U_s(G)$ (где $s \leqslant r$), Ω — открытое подмножество в X и f: $\Omega \to F$ — функция класса C^r. Тогда по-прежнему можно определить $t * f$ формулами (4) или (5); это функция, определенная на Ω, со значениями в F и класса C^{r-s}, если $s < \infty$. Результаты настоящего пункта очевидным образом распространяются на эту ситуацию.

5. *Поля точечных распределений, определенные действием группы на многообразии*

Пусть $(g, x) \mapsto \lambda(g, x) = gx$ — закон левого действия класса C^r группы G на X. Пусть $s \leqslant r$ и $t \in U_s(G)$. Для всякого $x \in X$ имеем $t * \varepsilon_x \in T_x^{(s)}(X)$. Отображение $x \mapsto t * \varepsilon_x$ называется *полем точечных распределений, определенным элементом* t *и действием группы* G *на* X; оно обозначается иногда через D_t^{λ} или просто через D_t. Пусть Ω — открытое подмножество в X и F — отделимое полинормированное пространство. Если f: $\Omega \to F$ принадлежит классу C^r и $s \leqslant r$, то функция $t^{\vee} * f$ на Ω обозначается также через $D_t f$. Следовательно,

$$(D_t f)(x) = \langle t * \varepsilon_x, f \rangle. \tag{16}$$

Если $s < \infty$, то $D_t f \in \mathscr{C}^{r-s}(\Omega, F)$ в силу n° 4. Таким образом, $f \mapsto D_t f$ есть отображение из $\mathscr{C}^r(\Omega, F)$ в $\mathscr{C}^{r-s}(\Omega, F)$ (которое часто, допуская вольность в обозначениях, обозначают через D_t).

Если $t \in U_s(G)$, $t' \in U_{s'}(G)$ и $s + s' \leqslant r$, то в силу предложения 18 n° 4
$$D_{t * t'} f = D_{t'}(D_t f); \tag{17}$$
поэтому, допуская указанную выше вольность в обозначениях, получаем
$$D_{t * t'} = D_{t'} \circ D_t. \tag{18}$$

Предположим, что G и X конечномерны. Отображение $(t, x) \longmapsto t \otimes \varepsilon_x$ из $T^{(s)}(G) \times X$ в векторное расслоение $T^{(s)}(G \times X)$ (см. *Мн. Св. рез.*, 13.2.5) принадлежит классу C^{r-s}. Стало быть (*Мн. Св. рез.*, 13.2.5), отображение $(t, x) \longmapsto t * \varepsilon_x$ из $T^{(s)}(G) \times X$ в векторное расслоение $T^{(s)}(X)$ принадлежит классу C^{r-s}. В частности, D_t есть дифференциальный оператор порядка $\leqslant s$ и класса C^{r-s} в смысле *Мн. Св. рез.*, 14.1.6. Согласно формуле (16), функция $D_t f$ является тогда результатом действия на функцию f этого дифференциального оператора (*Мн. Св. рез.*, 14.1.4).

Отбросим предположение, что G и X конечномерны. Пусть ψ — автоморфизм многообразия X и Δ — поле точечных распределений на X. В соответствии с общими определениями преобразованием поля Δ посредством автоморфизма ψ называется поле точечных распределений на X, значение которого в точке $\psi(x)$ есть $\psi_*(\Delta(x))$; это отображение обозначается через $\psi(\Delta)$. Если $g \in G$ и $\tau(g)$ обозначает автоморфизм $x \longmapsto gx$ многообразия X, то преобразование поля Δ посредством автоморфизма $\tau(g)$ называется также преобразованием поля Δ элементом g.

Предложение 21. *Пусть ψ — автоморфизм многообразия X, коммутирующий с действием группы G. Тогда поле D_t инвариантно относительно ψ.*

Действительно, для всякого $x \in X$
$$\begin{aligned}(\psi(D_t))(\psi(x)) &= \psi_*(D_t(x)) = \psi_*(t * \varepsilon_x) = \\ &= t * \psi_*(\varepsilon_x) \quad (\text{предложение } 15) = \\ &= t * \varepsilon_{\psi(x)} = D_t(\psi(x)).\end{aligned}$$

Предложение 22. *Если $g \in G$, то преобразование поля D_t элементом g есть $D_{\varepsilon_g * t * \varepsilon_{g^{-1}}}$.*

Действительно, значение этого преобразования в точке gx есть
$$\begin{aligned}\tau(g)_*(D_t(x)) &= \tau(g)_*(t * \varepsilon_x) = \\ &= \varepsilon_g * (t * \varepsilon_x) \quad (\text{предложение } 14 \text{ (i)}) = \\ &= (\varepsilon_g * t * \varepsilon_{g^{-1}}) * \varepsilon_{gx} \quad (\text{предложения } 1 \text{ и } 2) = \\ &= D_{\varepsilon_g * t * \varepsilon_{g^{-1}}}(gx). \text{ Ч. Т. Д.}\end{aligned}$$

Пусть $(x, g) \mapsto \mu(x, g) = xg$ — закон правого действия класса C^r группы G на X. Пусть $s \leqslant r$ и $t \in U_s(G)$. Для всякого $x \in X$ имеем $\varepsilon_x * t \in T_x^{(s)}(X)$. Отображение $x \mapsto \varepsilon_x * t$ называется полем распределений, определенным элементом t и действием группы G на X; оно обозначается через D_t^{μ} или просто через D_t. Пусть Ω — открытое подмножество в X. Если $f\colon \Omega \to F$ принадлежит классу C^r, то функция $f * t^{\vee}$ обозначается символом $D_t f$. Следовательно,

$$(D_t f)(x) = \langle \varepsilon_x * t, f \rangle \tag{19}$$

и, в очевидных обозначениях,

$$D_{t * t'} f = D_t(D_{t'} f), \tag{20}$$

$$D_{t * t'} = D_t \circ D_{t'}. \tag{21}$$

Предложение 21 остается справедливым. Пусть $g \in G$. Преобразование поля D_t элементом g (т. е. автоморфизмом $x \mapsto xg$ многообразия X) есть $D_{\varepsilon_{g^{-1}} * t * \varepsilon_g}$.

6. *Инвариантные поля точечных распределений на группе Ли*

Определение 4. *Пусть G — группа Ли. Поле распределений на G называется левоинвариантным* (соотв. *правоинвариантным*), *если оно инвариантно относительно левых* (соотв. *правых*) *сдвигов группы G.*

Другими словами, поле распределений $g \mapsto \Delta_g$ на G левоинвариантно, если

$$\Delta_{gg'} = \gamma(g)_* \Delta_{g'} \quad \text{для} \quad g, g' \text{ из } G,$$

или, что то же самое, если

$$\Delta_{gg'} = \varepsilon_g * \Delta_{g'} \quad \text{для} \quad g, g' \text{ из } G.$$

Оно правоинвариантно, если

$$\Delta_{gg'} = \delta(g'^{-1})_* \Delta_g \quad \text{для} \quad g, g' \text{ из } G,$$

или, что то же самое, если

$$\Delta_{gg'} = \Delta_g * \varepsilon_{g'} \quad \text{для} \quad g, g' \text{ из } G.$$

Определение 5. *Пусть G — группа Ли и $t \in U(G)$. Через L_t обозначается поле распределений $g \mapsto \varepsilon_g * t$ на G, а через R_t — поле распределений $g \mapsto t * \varepsilon_g$ на G.*

Другими словами, L_t (соотв. R_t) есть поле распределений, определенное элементом t и действием группы G справа (соотв. слева) на G посредством отображения $(g, g') \mapsto gg'$. Пусть Ω — открытое подмножество в G и F — отделимое полинормирован-

ное пространство; если $f \in \mathscr{C}^\omega(\Omega, F)$, то $L_t f = f * t^\vee \in \mathscr{C}^\omega(\Omega, F)$ и $R_t f = t^\vee * f \in \mathscr{C}^\omega(\Omega, F)$ (n° 5). Если G конечномерна, то дифференциальные операторы L_t и R_t принадлежат классу C^ω (n° 5).

Предложение 23. (i) *Отображение* $t \mapsto L_t$ (соотв. $t \mapsto R_t$) *есть изоморфизм векторного пространства* $U(G)$ *на векторное пространство левоинвариантных* (соотв. *правоинвариантных*) *полей распределений на* G.

(ii) *Для* t, t' *из* $U(G)$ *имеем* $L_{t * t'} = L_t \circ L_{t'}$, $R_{t * t'} = R_{t'} \circ R_t$, $L_t \circ R_{t'} = R_{t'} \circ L_t$ (*если допустить вольность в обозначениях, как в* n° 5).

(iii) *Если* θ — *отображение* $g \mapsto g^{-1}$ *из* G *на* G, *то* $\theta(L_t) = R_{t^\vee}$.

(iv) *Если* $t \in U(G)$ *и* $g \in G$, *то* $(L_t)_g = \left(R_{\varepsilon_g * t * \varepsilon_{g-1}}\right)_g$.

Любой правый сдвиг в G коммутирует с любым левым сдвигом. В силу предложения 21 n° 5 поле L_t, следовательно, левоинвариантно. Поскольку $(L_t)_e = t$, отображение $t \mapsto L_t$ инъективно. Пусть Δ — поле левоинвариантных распределений на G и $t = \Delta_e$; тогда поля Δ и L_t принимают одно и то же значение в e и левоинвариантны; стало быть, $\Delta = L_t$. Это доказывает (i) для L_t; аналогично рассуждаем для R_t. Формулы $L_{t * t'} = L_t \circ L_{t'}$, $R_{t * t'} = R_{t'} \circ R_t$ следуют из (21) и (18). Пусть $t \in U_s(G)$, $t' \in U_{s'}(G)$, $f \in \mathscr{C}^r(\Omega, F)$, где Ω открыто в G и $s + s' \leqslant r$; получаем

$$L_t R_{t'}(f) = L_t(t'^\vee * f) = (t'^\vee * f) * t^\vee =$$
$$= t'^\vee * (f * t^\vee) \quad (\text{предложение } 20) = R_{t'} L_t f$$

и, стало быть, $L_t \circ R_{t'} = R_{t'} \circ L_t$. Поскольку θ является изоморфизмом из G на $G^\vee$, $\theta(L_t)$ есть правоинвариантное поле распределений на G; его значение в e равно $\theta_*(t) = t^\vee$; значит, $\theta(L_t) = R_{t^\vee}$. Наконец,

$$(L_t)_g = \varepsilon_g * t = (\varepsilon_g * t * \varepsilon_{g-1}) * \varepsilon_g = \left(R_{\varepsilon_g * t * \varepsilon_{g-1}}\right)_g.$$

Z *Замечание* 1. Отметим, что для определения левоинвариантных полей распределений мы рассматриваем действие группы G на себе *правыми* сдвигами.

Замечание 2. Предположим, что G конечномерна. Отображение

$$(t, g) \mapsto (R_t)_g = t * \varepsilon_g$$

из $U_s(G) \times G$ в $T^{(s)}(G)$ есть изоморфизм аналитических векторных расслоений; в самом деле, это отображение биективно, линейно на каждом слое и аналитично (n° 5). С другой стороны, пусть φ: $T^{(s)}(G) \to U_s(G) \times G$ есть обратное отображение; если

$t \in T_g^{(s)}(G)$, то $\varphi(t) = (t * \varepsilon_{g^{-1}}, g)$ и, стало быть, φ аналитично. Изоморфизм φ называется правой тривиализацией расслоения $T^{(s)}(G)$. Таким же образом рассмотрим отображение $(t, g) \mapsto (L_t)_g = \varepsilon_g * t$ из $U_s(G) \times G$ в $T^{(s)}(G)$; обратный изоморфизм называется левой тривиализацией расслоения $T^{(s)}(G)$. При ограничении на $T(G)$ мы снова получаем правую и левую тривиализации расслоения $T(G)$ (§ 2, n° 2).

7. Алгебра Ли группы Ли

Пусть G — группа Ли. В $U(G)$, как во всякой ассоциативной алгебре, полагаем $[t, t'] = t * t' - t' * t$. Поскольку $T_e(G)$ является множеством примитивных элементов в $U(G)$, имеем $[T_e(G), T_e(G)] \subset T_e(G)$ (гл. II, § 1, n° 2, предложение 4). Ограничение операции коммутирования на $T_e(G)$ определяет, следовательно, в $T_e(G)$ структуру алгебры Ли.

Лемма 1. *Пусть X и X' — полные нормируемые пространства, X_0 — открытая окрестность точки 0 в X, f — такое аналитическое отображение окрестности X_0 в X', что $f(0) = 0$. Пусть $f = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots$ — разложение в степенной ряд функции f в точке 0, где f_i — однородный непрерывный многочлен степени i на X со значениями в X'. Пусть t — элемент из $\mathsf{TS}^2(X)$, рассматриваемый как точечное распределение на X, носитель которого содержится в $\{0\}$. Пусть $t' = f_*(t) \in \mathsf{TS}(X')$. Однородной компонентой степени 1 элемента t' является $\langle f_2, t\rangle$.*

Обозначим через t_1' эту компоненту. Для всякого линейного непрерывного отображения u пространства X' в некоторое полинормированное пространство получаем

$$\begin{aligned} u(t_1') &= \langle t', u\rangle \quad (\text{поскольку } u \text{ линейно и непрерывно}) = \\ &= \langle t, u \circ f\rangle \quad (\textit{Мн. Св. рез.}, 13.2.3) = \\ &= \langle t, u \circ f_2\rangle \quad (\text{поскольку } t \in \mathsf{TS}^2(X)) = \\ &= u(\langle t, f_2\rangle) \quad (\textit{Мн. Св. рез.}, 13.2.2), \end{aligned}$$

откуда вытекает утверждение леммы.

Предложение 24. *Пусть G — группа Ли, (U, φ, E) — такая карта на E, что $\varphi(e) = 0$, и V — такая окрестность элемента e, что $V^2 \subset U$. Пусть m — аналитическое отображение $(a, b) \mapsto \varphi(\varphi^{-1}(a)\varphi^{-1}(b))$ из $\varphi(V) \times \varphi(V)$ в E. Пусть $m = \sum_{i, j \geqslant 0} m_{i, j}$ — разложение отображения m в степенной ряд в точке $(0, 0)$, где m_{ij} — биоднородный непрерывный полином бистепени (i, j) на $E \times E$ со значениями в E.*

(i) $m_{i,0} = m_{0,j} = 0$, *каковы бы ни были* $i \neq 1$ *и* $j \neq 1$.

(ii) $m_{1,0}(a, b) = a$ *и* $m_{0,1}(a, b) = b$, *каковы бы ни были* $a \in E$, $b \in E$.

(iii) *Пусть* ψ: $T_e(G) \to E$ — *дифференциал отображения* φ *в* e. *Каковы бы ни были* u, v *из* $T_e(G)$,

$$\psi([u, v]) = m_{1,1}(\psi(u), \psi(v)) - m_{1,1}(\psi(v), \psi(u)).$$

Имеем $m(a, 0) = a$, $m(0, b) = b$, каковы бы ни были a, b из $\varphi(V)$, что доказывает (i) и (ii). Пусть u, v принадлежат $T_e(G)$. Отождествим $T_0(E)$ с E и, стало быть, ψ с $T_e(\varphi)$. Образы элементов u и v относительно $T_e(\varphi)$ суть $\psi(u)$ и $\psi(v)$. Точечное распределение, являющееся тензорным произведением этих образов, есть симметрическое произведение элементов $(\psi(u), 0)$ и $(0, \psi(v))$ в $\mathsf{TS}(E \times E) = \mathsf{TS}(E) \otimes \mathsf{TS}(E)$, т. е.

$$(\psi(u), 0) \otimes (0, \psi(v)) + (0, \psi(v)) \otimes (\psi(u), 0).$$

Значит, $\psi_*(u * v)$ является образом предыдущего элемента при отображении m из $\varphi(V) \times \varphi(V)$ в E. Его компонента степени 1 в $\mathsf{TS}(E)$ есть в силу леммы 1

$$x = \langle m_{1,1},\ (\psi(u), 0) \otimes (0, \psi(v)) + (0, \psi(v)) \otimes (\psi(u), 0)\rangle.$$

Определим билинейное отображение n: $(E \times E)^2 \to E$ формулой

$$n((a, b), (a', b')) = m_{1,1}(a, b').$$

Имеем $n((a, b), (a, b)) = m_{1,1}(a, b)$ и, следовательно,

$$x = \langle n,\ (\psi(u), 0) \otimes (0, \psi(v)) + (0, \psi(v)) \otimes (\psi(u), 0)\rangle =$$
$$= m_{1,1}(\psi(u), \psi(v)) + m_{1,1}(0, 0) = m_{1,1}(\psi(u), \psi(v)).$$

Аналогично, $\psi_*(v * u)$ допускает $m_{1,1}(\psi(v), \psi(u))$ в качестве компоненты степени 1 в $\mathsf{TS}(E)$. Поскольку $\psi([u, v])$ имеет степень 1, это доказывает (iii).

Следствие. *Нормируемое пространство* $T_e(G)$, *наделенное операцией коммутирования, является нормируемой алгеброй Ли.*

Определение 6. *Нормируемое пространство* $T_e(G)$, *наделенное операцией коммутирования, называется нормируемой алгеброй Ли группы* G *или просто алгеброй Ли группы* G; *оно обозначается через* $L(G)$.

Предложение 25. *Пусть* G — *группа Ли*, $E(G)$ — *универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли* $L(G)$. *Каноническое вложение*

пространства $L(G)$ *в* $U(G)$ *определяет гомоморфизм* η *алгебры* $E(G)$ *в алгебру* $U(G)$. *Если* K *имеет характеристику* 0, η *есть изоморфизм биалгебр.*

Действительно, биалгебра $U(G)$ кокоммутативна (*Мн. Св. рез.*, 13.5.1), и фильтрация $(U_s(G))$ согласована со структурой биалгебры. Множество примитивных элементов в $U(G)$ есть $L(G)$. Достаточно тогда применить теорему 1 гл. II, § 1, n° 6.

Если K имеет характеристику 0, мы будем с этого момента отождествлять $U(G)$ с универсальной обертывающей алгеброй алгебры Ли $L(G)$. В силу (2) и предложения 7 (ii) отображение $t \mapsto t^\vee$ из $U(G)$ в $U(G)$ отождествляется с главным антиавтоморфизмом алгебры $U(G)$ (гл. I, § 2, n° 4).

Предложение 26. *Предположим, что* K *имеет характеристику* $p > 0$. *Для всякого* $a \in L(G)$ *имеем* $a^p \in L(G)$ *и* $\operatorname{ad}(a^p) = (\operatorname{ad} a)^p$ (*степень* a^p *вычисляется в* $U(G)$).

Если $a \in L(G)$, то a примитивен в $U(G)$, а потому a^p примитивен в $U(G)$ (гл. I, § 1, n° 2, *замечание* 1); значит, $a^p \in L(G)$. Пусть σ_a (соотв. τ_a) — линейное отображение $x \mapsto a * x$ (соотв. $x \mapsto x * a$) из $U(G)$ в $U(G)$. Для всякого $x \in U(G)$ имеем $(\operatorname{ad} a)(x) = (\sigma_a - \tau_a)(x)$; стало быть, $(\operatorname{ad} a)^p = (\sigma_a - \tau_a)^p$. Но σ_a и τ_a коммутируют друг с другом и, следовательно, $(\sigma_a - \tau_a)^p = (\sigma_a)^p - (\tau_a)^p = \sigma_{a^p} - \tau_{a^p}$, откуда следует второе утверждение.

Определение 7. *Пусть* X — *многообразие класса* C^r $(r \geqslant 2)$, $\mathfrak{g}$ — *полная нормируемая алгебра Ли. Инфинитезимальным законом левого* (соотв. *правого*) *действия класса* C^{r-1} *алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *на* X *называется отображение* $a \mapsto D_a$ *из* $\mathfrak{g}$ *в множество векторных полей на* X, *обладающее следующими свойствами*:

а) *отображение* $(a, x) \mapsto D_a(x)$ *есть морфизм класса* C^{r-1} *тривиального векторного расслоения* $\mathfrak{g} \times X$ *в векторное расслоение* $T(X)$;

б) $[D_a, D_b] = -D_{[a, b]}$ (соотв. $[D_a, D_b] = D_{[a, b]}$), *каковы бы ни были* a, b *из* $\mathfrak{g}$.

В частности, всякое векторное поле D_a принадлежит классу C^{r-1}.

Замечание. Пусть X — многообразие класса C^r, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли конечной размерности, $a \mapsto D_a$ — линейное отображение из $\mathfrak{g}$ в векторное пространство векторных полей класса C^{r-1} на X. Тогда условие а) определения 7 выполнено. Действительно, рассматривая базис в $\mathfrak{g}$ и применяя *Мн. Св. рез.*, 7.7.1, мы сводим все к случаю, когда $\dim \mathfrak{g} = 1$, и наше утверждение тогда очевидно.

Предложение 27. *Пусть* G — *группа Ли*, X — *многообразие класса* C^r. *Предположим, что задан закон левого* (соотв. *правого*) *действия класса* C^r *группы* G *на* X. *Для всякого* $a \in L(G)$ *пусть* D_a *есть поле точечных распределений, определенное элементом* a *на* X.

(i) *Отображение* $(a, x) \mapsto D_a(x)$ *является морфизмом класса* C^{r-1} *тривиального векторного расслоения* $L(G) \times X$ *в векторное расслоение* $T(X)$.

(ii) *Пусть* I — *открытое подмножество в* K, *содержащее* 0, *и* $\gamma\colon I \to G$ — *такое отображение класса* C^r, *что* $\gamma(0) = e$. *Пусть* $a = T_0(\gamma)\,1 \in L(G)$. *Если* f — *функция класса* C^r *на некотором открытом подмножестве в* X, *то*

$$(D_a f)(x) = \lim_{k \in K^*,\, k \to 0} k^{-1}(f(\gamma(k)\,x) - f(x)), \text{ \textit{если} } G \text{ \textit{действует слева}},$$

$$(D_a f)(x) = \lim_{k \in K^*,\, k \to 0} k^{-1}(f(x\gamma(k)) - f(x)), \text{ \textit{если} } G \text{ \textit{действует справа}}.$$

(iii) *Если* $r \geqslant 2$, *то отображение* $a \mapsto D_a$ *есть инфинитезимальный закон левого* (соотв. *правого*) *действия класса* C^{r-1} *алгебры Ли* $L(G)$ *на* X.

Предположим, что G действует слева на X. Пусть $\varphi\colon G \times X \to X$ — этот закон действия. Тогда $T(\varphi)$ есть φ-морфизм класса C^{r-1} векторного расслоения $T(G) \times T(X)$ в векторное расслоение $T(X)$ (*Мн. Св. рез.*, 8.1.2). Индуцированное векторное расслоение $(T(G) \times T(X)) \,|\, (\{e\} \times X)$ отождествляется с $E = L(G) \times T(X)$. Стало быть, $T(\varphi)\,|\,E$ есть морфизм класса C^{r-1} векторных расслоений. Для $(a, x) \in L(G) \times X$ имеем $T(\varphi)(a, x) = D_a(x)$, откуда следует (i).

Формула, выражающая $(D_a f)(x)$, вытекает из сказанного в конце n° 2 § 2 и из *Мн. Св. рез.*, 8.4.5.

Предположим, что $r \geqslant 2$. Пусть a, b лежат в $L(G)$ и f — функция класса C^r на некотором открытом подмножестве из X. Имеем

$$\begin{aligned} D_{[a,\, b]} f &= D_b(D_a f) - D_a(D_b f) && \text{(в силу (17))} = \\ &= [D_a, D_a]\, f && \text{(\textit{Мн. Св. рез.}, 8.5.3).} \end{aligned}$$

Пусть $x \in X$. Взяв в качестве f отображение, задаваемое какой-нибудь картой на X, область определения которой содержит точку x, получаем из этих равенств $D_{[a,\, b]}(x) = [D_b, D_a](x)$, откуда следует (iii). Аналогично рассуждаем в случае, когда G действует на X справа. Ч. Т. Д.

Если $r \geqslant 2$, отображение $a \mapsto D_a$ называется инфинитезимальным законом действия, *ассоциированным* с данным законом действия.

8. Свойства функториальности алгебры Ли

Пусть G и H — группы Ли, φ — морфизм из G в H. Ограничение отображения $U(\varphi)$ на пространство $L(G)$ (которое есть не что иное, как $T_e(\varphi)$) является непрерывным морфизмом пространства $L(G)$ в $L(H)$; мы обозначаем его через $L(\varphi)$. Если ψ — морфизм из H в некоторую группу Ли, то $L(\psi \circ \varphi) = L(\psi) \circ L(\varphi)$.

Для того чтобы φ был иммерсией, необходимо и достаточно, чтобы $L(\varphi)$ был изоморфизмом из $L(G)$ на некоторую подалгебру Ли в $L(H)$, допускающую топологическое дополнение. В частности, если G — подгруппа Ли в H и φ — каноническая инъекция, то $L(G)$ отождествляется с некоторой подалгеброй Ли в $L(H)$ при помощи $L(\varphi)$. В еще более частном случае, когда G — открытая подгруппа в H, имеем $L(G) = L(H)$.

Если G — квазиподгруппа Ли в H, то $L(G)$ также отождествляется с замкнутой подалгеброй Ли в $L(H)$.

Для того чтобы φ был субмерсией, необходимо и достаточно, чтобы $L(\varphi)$ был сюръективен и его ядро допускало топологическое дополнение. В этом случае ядро N морфизма φ является подгруппой Ли в G и $L(N) = \operatorname{Ker} L(\varphi)$. В частности, если H — факторгруппа Ли группы G по нормальной подгруппе Ли P, то $L(P)$ есть идеал в $L(G)$, и если φ — каноническая сюръекция из G на H, то $L(G/P)$ отождествляется с $L(G)/L(P)$ при помощи морфизма, получающегося из морфизма $L(\varphi)$ посредством перехода к фактору.

Пусть I — конечное множество, $(G_i)_{i \in I}$ — семейство групп Ли, G — их произведение, p_i — канонический морфизм из G на G_i. Тогда $(L(p_i))_{i \in I}$ является морфизмом алгебры Ли $L(G)$ в алгебру Ли $\prod_{i \in I} L(G_i)$ и изоморфизмом нормируемых пространств. Мы отождествляем, значит, $L(G)$ с $\prod_{i \in I} L(G_i)$ посредством $L(p_i)_{i \in I}$.

Предложение 28. *Пусть G и H — группы Ли, φ — морфизм из G в H. Предположим, что K имеет характеристику* 0 *и H конечномерна.*

(i) *Ядро N морфизма φ есть подгруппа Ли в G и* $L(N) = \operatorname{Ker} L(\varphi)$.

(ii) *Морфизм ψ из G/N в H, получающийся из φ посредством перехода к фактору, является иммерсией.*

(iii) *Если $\varphi(G)$ замкнуто в H и топология в G имеет счетный базис, то $\varphi(G)$ есть подгруппа Ли в H, ψ есть изоморфизм группы Ли G/N на группу Ли $\varphi(G)$ и* $L(\varphi(G)) = \operatorname{Im} L(\varphi)$.

Зададим левое действие группы G на H с помощью отображения $(g, h) \mapsto \varphi(g)h$. Достаточно применить к орбите элемента e предложение 14 § 1, n°7.

Предложение 29. *Пусть G и H — группы Ли, φ — морфизм из G в H. Предположим, что K имеет характеристику 0 и группа H конечномерна. Если H' — подгруппа Ли в H, то $G' = \varphi^{-1}(H')$ есть подгруппа Ли в G и $L(G') = L(\varphi)^{-1}(L(H'))$.*

Пусть π — каноническое отображение из H в однородное пространство $X = H/H'$. Зададим действие группы G слева на X с помощью отображения $(g, x) \mapsto \varphi(g)x$. Стабилизатором элемента $\pi(e)$ служит подгруппа G', являющаяся, стало быть, подгруппой Ли в G (§ 1, n°7, предложение 14). Орбитальное отображение для элемента $\pi(e)$ есть $\pi \circ \varphi$. В силу предложения 14 § 1 $L(G')$ есть ядро морфизма $L(\pi \circ \varphi) = T_e(\pi) \circ L(\varphi)$. Ядром морфизма $T_e(\pi)$ является $L(H')$ (§ 1, n°6, предложение 11 (i)), и, стало быть, $\operatorname{Ker} L(\pi \circ \varphi) = L(\varphi)^{-1}(L(H'))$.

Следствие 1. *Пусть G, H — группы Ли, φ_1 и φ_2 — морфизмы из G в H. Предположим, что K имеет характеристику 0 и H конечномерна. Множество таких $g \in G$, что $\varphi_1(g) = \varphi_2(g)$, является подгруппой Ли G' в G, а $L(G')$ представляет собой множество тех $x \in L(G)$, для которых $L(\varphi_1)x = L(\varphi_2)x$.*

Положим $\varphi(g) = (\varphi_1(g), \varphi_2(g))$ для всякого $g \in G$, так что φ есть морфизм из G в $H \times H$. Пусть Δ — диагональная подгруппа в $H \times H$. Тогда $G' = \varphi^{-1}(\Delta)$ и $L(\varphi)x = (L(\varphi_1)x, L(\varphi_2)x)$ для каждого $x \in L(G)$. Достаточно применить теперь предложение 29.

Следствие 2. *Пусть G — конечномерная группа Ли, G_1 и G_2 — две подгруппы Ли в G. Предположим, что характеристика поля K равна 0. Тогда $G_1 \cap G_2$ есть подгруппа Ли в G с алгеброй Ли $L(G_1) \cap L(G_2)$.*

Применяем предложение 29 к каноническому вложению подгруппы G_1 в G и к подгруппе G_2.

Следствие 3. *Пусть G, G', H — группы Ли, $\varphi\colon G \to H$ и $\varphi'\colon G' \to H$ — морфизмы групп Ли. Предположим, что K имеет характеристику 0 и H конечномерна. Пусть F — множество тех $(g, g') \in G \times G'$, для которых $\varphi(g) = \varphi'(g')$. Тогда F есть подгруппа Ли в $G \times G'$ и $L(F)$ есть множество таких $(x, x') \in L(G) \times L(G')$, что $L(\varphi)x = L(\varphi')x'$.*

Применяем следствие 1 к морфизмам $(g, g') \mapsto \varphi(g)$ и $(g, g') \mapsto \varphi'(g')$ из $G \times G'$ в H.

Предложение 30. *Пусть G — конечномерная группа Ли со счетным базисом, H и H' — подгруппы Ли в G. Предположим, что K имеет характеристику 0 и HH' локально замкнуто в G.*

(i) *HH' есть подмногообразие в G и* $T_e(HH') = L(H) + L(H')$.

(ii) *Предположим, что всякий элемент из H перестановочен со всяким элементом из H'. Тогда HH' есть подгруппа Ли в G. Пусть φ — отображение $(h, h') \mapsto hh'$ из $H \times H'$ на HH'. Ядро морфизма φ есть множество пар (m, m^{-1}), где $m \in H \cap H'$, и морфизм из $(H \times H')/\operatorname{Ker}\varphi$ на HH', получающийся из φ переходом к фактору, является изоморфизмом групп Ли.*

Зададим левое действие группы $H \times H'$ на G с помощью отображения $((h, h'), g) \mapsto hgh'^{-1}$. Орбитальное отображение ρ для e есть $(h, h') \mapsto hh'^{-1}$. В силу предложения 14 (iii) из § 1, n° 7, HH' является подмногообразием в G и $T_e(HH') = \operatorname{Im} T_e(\rho)$. Однако

$$T_e(\rho)(L(H) \times \{0\}) = L(H) \quad \text{и} \quad T_e(\rho)(\{0\} \times L(H')) = L(H');$$

стало быть, $T_e(HH') = L(H) + L(H')$. Предположим, что всякий элемент из H перестановочен со всяким элементом из H'. Тогда HH' есть подгруппа в G. В силу (i) это подгруппа Ли в G. Оставшаяся часть утверждения следует из предложения 28.

Предложение 31. *Пусть G — конечномерная группа Ли со счетным базисом, H — нормальная подгруппа Ли в G, A — подгруппа Ли в G. Предположим, что K имеет характеристику* 0 *и AH замкнуто. Пусть φ — канонический морфизм из G на G/H. Тогда канонические отображения*

$$A/(H \cap A) \to \varphi(A), \quad AH/H \to \varphi(A)$$

суть изоморфизмы групп Ли.

В силу предложения 30 AH есть подгруппа Ли в G. В силу следствия 2 предложения 29 $H \cap A$ есть подгруппа Ли в G. Таким образом, можно говорить о группах Ли AH/H и $A/(H \cap A)$. С другой стороны, $\varphi(A)$, будучи каноническим образом подмножества AH в G/H, замкнуто и, стало быть, является подгруппой Ли в G/H (предложение 28 (iii)). Предложение 28, примененное к сквозным морфизмам $A \to G \to G/H$ и $AH \to G \to G/H$, показывает, что канонические отображения, указанные в предложении, суть изоморфизмы групп Ли.

Предложение 32. *Пусть G и H — группы Ли, k — замкнутое недискретное подполе в K, φ — морфизм из G в H как групп Ли над k. Предположим, что K имеет характеристику* 0. *Если $L(\varphi)$ является K-линейным морфизмом, то φ есть морфизм структур групп Ли над K.*

Для всякого $g \in G$

$$T_g(\varphi) = T_e(\gamma(\varphi(g))) \circ L(\varphi) \circ T_g(\gamma(g)^{-1}),$$

следовательно, отображение $T_g(\varphi)$ является K-линейным. Предложение следует тогда из *Мн. Св. рез.*, 5.14.6.

9. Алгебра Ли группы обратимых элементов алгебры

Пусть A — ассоциативная полная нормируемая алгебра с единичным элементом e и A^* — группа обратимых элементов из A. Мы видели (§ 1, n° 1), что A^* — открытое подмногообразие в A и группа Ли. Пусть G — группа Ли, f — морфизм группы Ли G в группу Ли A^*. Можно рассматривать f как аналитическое отображение из G в полное нормируемое пространство A. Стало быть, если $t \in \mathscr{T}^{(\infty)}(G)$, то можно образовать выражение $\langle t, f\rangle$, которое является элементом из A.

Предложение 33. *Отображение* $t \mapsto \langle t, f\rangle$ *есть морфизм алгебры* $\mathscr{T}^{(\infty)}(G)$ *в алгебру* A.

Достаточно проверить, что если t и t' — точечные распределения на G, то $\langle t * t', f\rangle = \langle t, f\rangle \langle t', f\rangle$. Однако

$$\begin{aligned}\langle t * t', f\rangle &= \langle t \otimes t', (g, g') \mapsto f(gg')\rangle = \\ &= \langle t \otimes t', (g, g') \mapsto f(g) f(g')\rangle = \\ &= \langle t, f\rangle \langle t', f\rangle \quad (\textit{Мн. Св. рез.}, 13.4.3). \text{ Ч. Т. Д.}\end{aligned}$$

Морфизм из предложения 33 называется морфизмом, *ассоциированным* с f.

Возьмем в качестве G саму группу A^* и в качестве f — тождественное отображение ι группы A^*. Мы получаем морфизм (именуемый *каноническим*) алгебры $\mathscr{T}^{(\infty)}(A^*)$ в алгебру A. Касательное пространство $T_e(A^*)$ канонически отождествляется с A, и если $t \in T_e(A^*)$, то из определения этого отождествления вытекает, что $\langle t, \iota\rangle = t$. Коль скоро это так, предложение 33 влечет за собой следующее

Следствие. *Каноническое отображение* ζ *из* $L(A^*)$ *в* A *есть изоморфизм алгебры Ли* $L(A^*)$ *на алгебру Ли* A. *Другими словами,*

$$\zeta([a, b]) = \zeta(a)\zeta(b) - \zeta(b)\zeta(a),$$

каковы бы ни были a, b *из* $L(A^*)$. *Если* K *имеет характеристику* $p > 0$, *то* $\zeta(a^p) = \zeta(a)^p$ *для всех* $a \in L(A^*)$.

С этого момента мы отождествляем $L(A^*)$ и A при помощи изоморфизма ζ.

Канонический морфизм из $\mathscr{T}^{(\infty)}(A^*)$ в A был получен в качестве частного случая морфизма из предложения 33. Но можно рассуждать в обратном порядке.

Предложение 34. *Пусть* H — *группа Ли,* A — *ассоциативная полная нормируемая алгебра с единицей,* φ: $H \to A^*$ — *морфизм групп Ли. Ассоциированный морфизм* φ' *из* $\mathscr{T}^{(\infty)}(H)$ *в* A *полу-*

чается в результате композиции морфизма φ_* *и канонического морфизма из* $\mathcal{T}^{(\infty)}(A^*)$ *в* A. *В частности*, $\varphi'(x) = L(\varphi)(x)$ *для всякого* $x \in L(H)$.

Действительно, пусть i — тождественное отображение из A в A. Для любого $t \in \mathcal{T}^{(\infty)}(H)$ имеем

$$\varphi'(t) = \langle t, \varphi\rangle = \langle t, i \circ \varphi\rangle =$$
$$= \langle \varphi_*(t), i\rangle \quad (\textit{Мн. Св. рез.}, \ 13.2.3).$$

10. Алгебры Ли некоторых линейных групп

Пусть E — полное нормируемое пространство. Тогда $\mathcal{L}(E)$ есть полная нормируемая алгебра с единицей и $\mathbf{GL}(E)$ есть группа Ли. Согласно следствию из предложения 33 n° 9, при каноническом отождествлении пространства $T_1(\mathbf{GL}(E))$ с $\mathcal{L}(E)$ структура алгебры Ли в $L(\mathbf{GL}(E))$ задается коммутатором $(x, y) \mapsto xy - yx$ двух элементов из $\mathcal{L}(E)$. В частности, $L(\mathbf{GL}(n, K))$ канонически отождествляется с $\mathfrak{gl}(n, K)$ (гл. I, § 1, n° 2).

Предложение 35. *Пусть* E — *конечномерное векторное пространство. Пусть* φ — *морфизм* $g \mapsto \det g$ *группы Ли* $\mathbf{GL}(E)$ *в группу Ли* K^*. *Отображение* $L(\varphi)$ *из* $\mathcal{L}(E)$ *в* K *есть отображение* $x \mapsto \operatorname{Tr} x$. *Ядро* $\mathbf{SL}(E)$ *морфизма* φ *является подгруппой Ли в* $\mathbf{GL}(E)$ *с алгеброй Ли* $\mathfrak{sl}(E)$.

Выберем норму и базис в E. Разложение определителя показывает, что

$$\det(1 + u) \in 1 + \operatorname{Tr} u + o(\|u\|),$$

когда u стремится к 0 в $\mathcal{L}(E)$. Стало быть, ввиду предложения 34, n° 9, для $x \in \mathcal{L}(E) = L(\mathbf{GL}(E))$ имеем

$$L(\varphi)(x) = \langle x, \varphi\rangle = \operatorname{Tr}(x).$$

Отсюда следует, что φ есть субмерсия. Следовательно, $\operatorname{Ker}\varphi = \mathbf{SL}(E)$ есть подгруппа Ли в $\mathbf{GL}(E)$, алгеброй Ли которой является $\operatorname{Ker} L(\varphi) = \mathfrak{sl}(E)$. Ч. Т. Д.

Пусть $E_1, \ldots, E_n$ — полные нормируемые пространства и E — их прямая сумма. Любой элемент $x \in \mathcal{L}(E)$ представляется матрицей

$$(x_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}, \text{ где } x_{ij} \in \mathcal{L}(E_i, E_j).$$

Предложение 36. *Пусть* I — *подмножество множества* $\{1, 2, \ldots \ldots, n\}$, G — *подгруппа в* $\mathbf{GL}(E)$, *образованная такими* $g = (g_{ij})_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n} \in \mathbf{GL}(E)$, *что* $g_{ij} = 0$ *при* $i < j$ *и* $g_{ii} = 1$ *при*

$i \in I$. Тогда G является подгруппой Ли в $\mathbf{GL}(E)$, *а* $L(G)$ *есть множество таких* $x = (x_{ij})_{1 \leqslant i,\ j \leqslant n} \in \mathscr{L}(E)$, *что* $x_{ij} = 0$ *при* $i < j$ *и* $x_{ii} = 0$ *при* $i \in I$.

Пусть S — множество тех $(x_{ij}) \in \mathscr{L}(E)$, для которых $x_{ij} = 0$ при $i < j$ и $x_{ii} = 0$ при $i \in I$. Тогда G представляет собой пересечение группы $\mathbf{GL}(E)$ с аффинным подпространством $1 + S$ в $\mathscr{L}(E)$. Стало быть, G является подмногообразием в $\mathbf{GL}(E)$ и касательное пространство к G в 1 отождествляется с S. Ч. Т. Д.

В частности, в $\mathbf{GL}(n, K)$ нижняя расширенная треугольная подгруппа и нижняя строго треугольная подгруппа, определенные так же, как в *Интегр.*, гл. VII, § 3, n° 3, суть подгруппы Ли с алгебрами Ли $\mathfrak{t}(n, K)$ и $\mathfrak{n}(n, K)$ (гл. I, § 1, n° 2).

Предложение 37. *Пусть A — ассоциативная полная нормируемая алгебра с единицей, $x \mapsto x^\iota$ — линейное непрерывное отображение из A в A, такое, что $(x^\iota)^\iota = x$, $(xy)^\iota = y^\iota x^\iota$, каковы бы ни были x, y из A. Предположим, что K имеет характеристику $\neq 2$, и G — подгруппа в A^*, образованная элементами $x \in A$, для которых $xx^\iota = x^\iota x = 1$. Тогда G является подгруппой Ли в A^* и $L(G)$ есть множество таких $y \in A$, что $y^\iota = -y$.*

Пусть S (соотв. S') — множество таких элементов $y \in A$, что $y = y^\iota$ (соотв. $y = -y^\iota$). Тогда S, S' суть замкнутые векторные подпространства в A. Формула

$$y = \frac{1}{2}(y + y^\iota) + \frac{1}{2}(y - y^\iota)$$

показывает, что A является прямой топологической суммой подпространств S и S'. Пусть f — отображение из A в S, определенное формулой $f(x) = xx^\iota$. Это отображение аналитично. Для всякого $y \in A$ имеем $f(1 + y) = 1 + y + y^\iota + yy^\iota$; выберем норму в A, согласованную с ее структурой алгебры. Тогда

$$f(1 + y) \in 1 + y + y^\iota + o(\|y\|) \text{ для } y \text{, стремящегося к } 0.$$

Таким образом, $T_1(f)(y) = y + y^\iota$, так что f есть субмерсия в 1. Следовательно, существует такая открытая окрестность U элемента 1 в A, что $U \cap G$ есть подмногообразие в U. Стало быть (§ 1, n° 3, предложение 6), G является подгруппой Ли в A^*. Кроме того, $L(G) = T_e(G) = \operatorname{Ker} T_1(f)$.

Следствие 1. *Предположим, что K имеет характеристику $\neq 2$. Пусть E — конечномерное векторное пространство над K и φ — билинейная симметрическая* (соотв. *знакопеременная*) *невырожденная форма на E. Для любого $u \in \mathscr{L}(E)$ пусть u^* — эле-*

мент, сопряженный к и относительно φ, *и* G — *ортогональная* (соотв. *симметрическая*) *группа для* φ. *Тогда* G *является подгруппой Ли в* $\mathbf{GL}(E)$, *а* $L(G)$ *есть множество таких* $x \in \mathscr{L}(E)$, *что* $x^* = -x$.

Применяем предложение 37 с $A = \mathscr{L}(E)$ и $x^\iota = x^*$.

Замечание. Пусть B — базис в E и J — матрица формы φ относительно B. Тогда $L(G)$ есть множество тех элементов из $\mathscr{L}(E)$, для каждого из которых его матрица X относительно B удовлетворяет равенству

$$^tX = -JXJ^{-1}.$$

Это следует из *Алг.*, гл. IX, § 1, формула (50).

Следствие 2. *Пусть* E — *комплексное* (соотв. *вещественное*) *гильбертово пространство,* U — *унитарная группа пространства* E. *Тогда* U *является вещественной подгруппой Ли в* $\mathbf{GL}(E)$ *и* $L(U)$ *есть множество таких* $x \in \mathscr{L}(E)$, *что* $x^* = -x$.

Применяем предложение 37, полагая $A = \mathscr{L}(E)$ (мы рассматриваем ее здесь как алгебру над $\mathbf{R}$) и $x^\iota = x^*$.

Следствие 3. *Пусть* E — *конечномерное комплексное векторное пространство,* φ — *невырожденная полуторалинейная эрмитова форма на* E, U — *унитарная группа формы* φ. *Тогда* U *есть вещественная подгруппа Ли в* $\mathbf{GL}(E)$ *и* $L(U)$ *есть множество таких* $x \in \mathscr{L}(E)$, *что элемент* ix *эрмитов.*

Если $E \neq \{0\}$, то U *не* является подгруппой Ли комплексной группы Ли $\mathbf{GL}(E)$, поскольку $L(U)$ не есть комплексное векторное подпространство в $\mathscr{L}(E)$.

11. Линейные представления

Пусть G — группа Ли, E — полное нормируемое пространство, π — линейное аналитическое представление группы G в E (§ 1, n° 2). Ассоциированный морфизм $t \longmapsto \langle t, \pi \rangle$ из $\mathscr{T}^{(\infty)}(G)$ в $\mathscr{L}(E)$ является морфизмом алгебр (n° 9, предложение 33), и его ограничение на $L(G)$ есть $L(\pi)$. Стало быть, $L(\pi)$ есть представление алгебры Ли $L(G)$ в E (гл. I, § 3, определение 1).

Предложение 38. *Рассмотрим левое действие группы* G *на* E, *заданное отображением* $(g, x) \longmapsto \pi(g)x$. *Пусть* $b \in E$ *и* $\rho(b)$ — *соответствующее орбитальное отображение. Отождествим канонически* $T_b(E)$ *с* E. *Для всякого* $t \in L(G)$

$$(L(\pi)t)(b) = \langle t, \rho(b) \rangle = \rho(b)_* t = t * \varepsilon_b.$$

В частности, векторное поле, определенное элементом t *на* E, *есть* $b \longmapsto (L(\pi)t)(b)$.

Имеем $L(\pi)t = \langle t, \pi\rangle$ (n° 9, предложение 34). Поскольку отображение $A \mapsto Ab$ из $\mathscr{L}(E)$ в E линейно и непрерывно, выводим отсюда, что

$$\begin{aligned}(L(\pi)t)(b) &= \langle t, g \mapsto \pi(g)b\rangle = \\ &= \langle t, \mathrm{Id}_E \circ \rho(b)\rangle = \\ &= \langle \rho(b)_* t, \mathrm{Id}_E\rangle \quad (\textit{Мн. Св. рез.}, 13.2.3) = \\ &= \rho(b)_* t.\end{aligned}$$

Наконец, $\rho(b)_* t = t * \varepsilon_b$ (n° 3, предложение 14 (ii)).

Предложение 39. *Предположим, что K имеет характеристику 0. Пусть G — группа Ли, E — конечномерное векторное пространство, π — линейное аналитическое представление группы G в E и E_1, E_2 — такие векторные подпространства в E, что $E_2 \subset E_1$. Множество G_1 таких элементов $g \in G$, что $\pi(g)x \equiv x \pmod{E_2}$ для всякого $x \in E_1$, есть подгруппа Ли в G и $L(G_1)$ есть множество таких элементов $a \in L(G)$, что $L(\pi)a$ отображает E_1 в E_2.*

Это следует из предложений 29 (n° 8) и 36 (n° 10).

Следствие 1. *В обозначениях предложения 39 множество элементов $g \in G$, таких, что $\pi(g)E_1 \subset E_1$, является подгруппой Ли в G, и ее алгебра Ли есть множество таких элементов $a \in L(G)$, что $L(\pi)a$ отображает E_1 в E_1.*

Надо применить предложение 39 с $E_1 = E_2$.

Следствие 2. *Пусть G, E и π такие же, как в предложении 39, и F — подмножество в E. Множество таких $g \in G$, что $\pi(g)x = x$ для всякого $x \in F$, есть подгруппа Ли в G, и ее алгебра Ли является множеством таких $a \in L(G)$, что $(L(\pi)a)(x) = 0$ для любого $x \in F$.*

Применяем предложение 39, где $E_2 = \{0\}$ и E_1 — векторное подпространство в E, порожденное множеством F. Ч. Т. Д.

Пусть $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ — линейные аналитические представления группы G. Ясно, что прямая сумма π представлений π_i (*Алг.*, гл. VIII, § 13, n° 1) есть линейное аналитическое представление группы G и что $L(\pi)$ есть прямая сумма представлений $L(\pi_1), L(\pi_2), \ldots, L(\pi_n)$ (гл. I, § 3, n° 1).

Предложение 40. *Пусть G — группа Ли, E — полное нормируемое пространство, π — линейное аналитическое представление группы G в E, F — замкнутое векторное подпространство в E, устойчивое относительно $\pi(G)$. Предположим, что либо K имеет характеристику 0, либо F есть прямое слагаемое в E.*

(i) *Подпредставление* π_1 *и факторпредставление* π_2 *представления* π, *определенные подпространством* F, *суть аналитические представления.*

(ii) F *устойчиво относительно* $L(\pi)(L(G))$.

(iii) *Пусть* ρ_1 *и* ρ_2 — *соответственно подпредставление и факторпредставление представления* $L(\pi)$, *определенные подпространством* F. *Тогда* $L(\pi_1) = \rho_1$, $L(\pi_2) = \rho_2$.

Пусть A — множество таких $u \in \mathscr{L}(E)$, что $u(F) \subset F$. Тогда A является замкнутым векторным подпространством в $\mathscr{L}(E)$ и π принимает значения в A. В силу предположений относительно K и F отображение π': $G \to A$, имеющее тот же график, что и π, аналитично (*Мн. Св. рез.*, 5.8.5). Канонические отображения θ_1: $A \to \mathscr{L}(F)$ и θ_2: $A \to \mathscr{L}(E/F)$ линейны, непрерывны и, стало быть, аналитичны. Это доказывает (i). Отображения $T_e(\pi)$ и $T_e(\pi')$ имеют одинаковый график, а потому $L(\pi)(L(G)) \subset A$, что доказывает (ii). Наконец,

$$T_e(\pi_1) = T_e(\theta_1 \circ \pi') = \theta_1 \circ T_e(\pi') = \rho_1,$$
$$T_e(\pi_2) = T_e(\theta_2 \circ \pi') = \theta_2 \circ T_e(\pi') = \rho_2.$$

Предложение 41. *Пусть* G — *группа Ли,* $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n, \pi$ — *линейные аналитические представления группы* G *в полных нормируемых пространствах* $E_1, E_2, \ldots, E_n, E$. *Пусть* $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_1 x_2 \ldots x_n$ — *непрерывное полилинейное отображение из* $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ *в* E. *Предположим, что*

$$\pi(g)(x_1 x_2 \ldots x_n) = (\pi_1(g) x_1)(\pi_2(g) x_2) \ldots (\pi_n(g) x_n),$$

каковы бы ни были $g \in G$, $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$. *Тогда*

$$(L(\pi) a)(x_1 x_2 \ldots x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_1 x_2 \ldots x_{i-1} ((L(\pi_i) a) x_i) x_{i+1} \ldots x_n,$$

каковы бы ни были $a \in L(G)$, $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$.

Произведем вычисление, например, для $n = 2$. Имеем

$$\begin{aligned}(L(\pi) a)(x_1 x_2) &= \langle a, g \mapsto \pi(g)(x_1 x_2)\rangle \quad (\text{предложение } 38) = \\ &= \langle a, (g \mapsto \pi_1(g) x_1)(g \mapsto \pi_2(g) x_2)\rangle = \\ &= \langle a, g \mapsto \pi_1(g) x_1\rangle . x_2 + x_1 . \langle a, g \mapsto \pi_2(g) x_2\rangle \\ &\qquad\qquad (\textit{Мн. Св. рез.},\ 5.5.6) = \\ &= ((L(\pi_1) a) x_1) . x_2 + x_1 . ((L(\pi_2) a) x_2) \quad (\text{предложение } 38).\end{aligned}$$

Следствие 1. *Пусть* G — *группа Ли,* $E_1, \ldots, E_{n+1}$ — *полные нормируемые пространства,* $\pi_1, \ldots, \pi_{n+1}$ — *линейные аналитические представления группы* G *в* $E_1, \ldots, E_{n+1}$. *Пусть* $E = \mathscr{L}(E_1, \ldots$

$\ldots, E_n; E_{n+1})$ — полное нормируемое пространство непрерывных полилинейных отображений из $E_1 \times \ldots \times E_n$ в E_{n+1} (Общ. топ., гл. X, § 3, n° 2). *Для всякого $g \in G$ пусть $\pi(g)$ — автоморфизм пространства E, определенный формулой*

$$(\pi(g) u)(x_1, \ldots, x_n) = \pi_{n+1}(g)\left(u\left(\pi_1(g)^{-1} x_1, \ldots, \pi_n(g)^{-1} x_n\right)\right).$$

Тогда π есть линейное аналитическое представление группы G в E и

$$((L(\pi) a) u)(x_1, \ldots, x_n) = \\ = -\sum_{i=1}^{n} u(x_1, \ldots, x_{i-1}, (L(\pi_i) a) x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) + \\ + (L(\pi_{n+1}) a)(u(x_1, \ldots, x_n)),$$

каковы бы ни были $a \in L(G)$, $u \in E$, $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$.

Любой элемент $(A_1, \ldots, A_{n+1})$ из $\mathscr{L}(E_1) \times \ldots \times \mathscr{L}(E_{n+1})$ определяет непрерывный эндоморфизм $\theta(A_1, \ldots, A_{n+1})$ пространства E формулой

$$(\theta(A_1, \ldots, A_{n+1}) u)(x_1, \ldots, x_n) = A_{n+1}(u(A_1 x_1, \ldots, A_n x_n)).$$

Отображение θ из $\mathscr{L}(E_1) \times \ldots \times \mathscr{L}(E_{n+1})$ в $\mathscr{L}(E)$ полилинейно и непрерывно. Для всякого $g \in G$

$$\pi(g) = \theta(\pi_1(g^{-1}), \ldots, \pi_n(g^{-1}), \pi_{n+1}(g))$$

и, стало быть, π аналитично. Применим предложение 41 к отображению

$$(x_1, \ldots, x_n, u) \mapsto u(x_1, \ldots, x_n)$$

из $E_1 \times \ldots \times E_n \times E$ в E_{n+1}. Имеем

$$\pi_{n+1}(g)(u(x_1, \ldots, x_n)) = (\pi(g) u)(\pi_1(g) x_1, \ldots, \pi_n(g) x_n),$$

а потому

$$(L(\pi_{n+1}) a)(u(x_1, \ldots, x_n)) = \\ = \sum_{i=1}^{n} u(x_1, \ldots, (L(\pi_i) a) x_i, \ldots, x_n) + ((L(\pi) a) u)(x_1, \ldots, x_n).$$

Если пространства E_i конечномерны, представление $L(\pi)$ алгебры Ли $L(G)$ получается из представлений $L(\pi_1), \ldots, L(\pi_{n+1})$ способом, указанным в предложении 3, § 3 гл. I.

Следствие 2. *Пусть G — группа Ли, π — ее линейное аналитическое представление в полном нормируемом пространстве E. Тогда $g \mapsto {}^t\pi(g)^{-1}$ есть линейное аналитическое представление ρ*

группы G *в полном нормируемом пространстве* $\mathscr{L}(E, K)$[1]) *и* $L(\rho)a = -{}^t(L(\pi)a)$ *для всякого* $a \in L(G)$.

Это частный случай следствия 1.

Говорят, что ρ есть *контрагредиентное* к π представление.

Если E имеет конечную размерность, то $L(\rho)$ есть контрагредиентное к $L(\pi)$ представление в смысле гл. I, § 3, n° 3.

Следствие 3. *Пусть* G — *группа Ли,* $\pi_1, \ldots, \pi_n$ — *линейные аналитические представления группы* G *в конечномерных векторных пространствах* $E_1, \ldots, E_n$. *Тогда представление* $\pi_1 \otimes \ldots \otimes \pi_n$ *группы* G (см. дополнение) *аналитично и* $L(\pi_1 \otimes \ldots \otimes \pi_n)$ *является тензорным произведением представлений* $L(\pi_1), \ldots, L(\pi_n)$.

Отображение $(A_1, \ldots, A_n) \mapsto A_1 \otimes \ldots \otimes A_n$ из $\mathscr{L}(E_1) \times \ldots \times \mathscr{L}(E_n)$ в $\mathscr{L}(E_1 \otimes \ldots \otimes E_n)$ полилинейно, откуда следует аналитичность представления π. Рассмотрим отображение $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$ из $E_1 \times \ldots \times E_n$ в $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$. В силу предложения 41

$$(L(\pi)a)(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_1 \otimes \ldots \otimes (L(\pi_i)a)x_i \otimes \ldots \otimes x_n,$$

каковы бы ни были $a \in L(G)$, $x_i \in E_i$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Стало быть, $L(\pi)$ есть тензорное произведение представлений $L(\pi_i)$.

Следствие 4. *Пусть* G — *группа Ли и* π — *линейное аналитическое представление группы* G *в конечномерном векторном пространстве* E. *Тогда представления* $\mathsf{T}^n(\pi)$, $\mathsf{S}^n(\pi)$, $\bigwedge^n(\pi)$ *группы* G (см. дополнение) *аналитичны и*

$$L(\mathsf{T}^n(\pi)) = \mathsf{T}^n(L(\pi)), \quad L(\mathsf{S}^n(\pi)) = \mathsf{S}^n(L(\pi)), \quad L(\textstyle\bigwedge^n(\pi)) = \textstyle\bigwedge^n(L(\pi)).$$

Это вытекает из следствия 3 и предложения 40.

Следствие 5. *Пусть* A — *конечномерная алгебра. Предположим, что* K *имеет характеристику* 0. *Группа* $\operatorname{Aut}(A)$ *автоморфизмов алгебры* A *есть подгруппа Ли в* $\mathbf{GL}(A)$ *и* $L(\operatorname{Aut}(A))$ — *алгебра Ли дифференцирований алгебры* A.

Это вытекает из следствия 1 (примененного к $E = \mathscr{L}(A, A; A)$) и из следствия 2 предложения 39 (примененного к подмножеству в E, состоящему из одного элемента — того, который задает умножение в A).

Замечание. Применим следствие 1 в ситуации, когда $G = \mathbf{GL}(F)$ (F — полное нормируемое пространство), $\pi_1 = \pi_2 = \mathrm{Id}_G$,

[1]) Как и в случае, когда $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, рассматриваемое здесь сопряженное линейное отображение ${}^t\pi(g)$ есть ограничение на $\mathscr{L}(E, K)$ сопряженного (в чисто алгебраическом смысле) к $\pi(g)$ линейного отображения.

π_3 — тривиальное представление группы G в K. Мы получим аналитическое представление π группы $\mathbf{GL}(F)$ в $\mathscr{L}(F, F; K)$. Предположим, что F конечномерно и K имеет характеристику 0. Применяя к π следствие 2 предложения 39, получаем снова часть следствия 1 предложения 37.

Предложение 42. *Пусть G — группа Ли, X — аналитическое многообразие,* $(g, x) \mapsto gx$ (соотв. xg) *— закон левого* (соотв. *правого*) *аналитического действия группы G на X, x_0 — точка в X, инвариантная относительно G. Для всякого $g \in G$ пусть $\tau(g)$ — автоморфизм* $x \mapsto gx$ (соотв. xg) *многообразия X, и пусть $\pi(g)$ — автоморфизм пространства $T_{x_0}(X)$, касательный к $\tau(g)$ в x_0.*

(i) π *есть линейное аналитическое представление группы G* (соотв. *группы $G^{\vee}$*) *в $T_{x_0}(X)$.*

(ii) *Для любого $a \in L(G)$ и любого $\xi_0 \in T_{x_0}(X)$ элемент $L(\pi)\,a \,.\, \xi_0$ можно вычислить следующим образом: пусть D_a — векторное поле, определенное элементом a на X, и ξ — векторное поле класса C^1 в некоторой открытой окрестности точки x_0, такое, что $\xi(x_0) = \xi_0$; тогда*

$$L(\pi)\,a \,.\, \xi_0 = -[D_a, \xi](x_0).$$

Имеем $\tau(gg') = \tau(g)\tau(g')$ (соотв. $\tau(g')\tau(g)$) и, стало быть, $\pi(gg') = \pi(g)\pi(g')$ (соотв. $\pi(g')\pi(g)$). С другой стороны, поскольку TX является векторным G-расслоением класса C^{ω} (§ 1, n° 8, предложение 16), π аналитично, откуда следует (i).

При доказательстве п. (ii) предположим, что G действует слева. Существуют открытая окрестность I элемента 0 в K и аналитическое отображение γ из I в G, такие, что $\gamma(0) = e$, $T_0(\gamma)\,1 = a$. Тогда D_a есть векторное поле на X, определенное отображением φ: $(\lambda, x) \mapsto \gamma(\lambda)\,x$ из $I \times X$ в X (§ 2, n° 2). Если через φ_λ обозначена биекция $x \mapsto \gamma(\lambda)\,x$ из X в X, то

$$[D_a, \xi](x_0) = \left(\frac{d}{d\lambda}\left(T_{\varphi_\lambda(x_0)}(\varphi_\lambda^{-1})\,\xi(\varphi_\lambda(x_0))\right)\right)_{\lambda=0} \text{ (\textit{Мн. Св. рез.}, 8.4.5)} =$$
$$= \left(\frac{d}{d\lambda}\left(T_{x_0}(\varphi_\lambda^{-1})\,\xi_0\right)\right)_{\lambda=0} =$$
$$= \left(\frac{d}{d\lambda}\left(\pi(\gamma(\lambda))^{-1}\,\xi_0\right)\right)_{\lambda=0}.$$

Поскольку отображения $\lambda \mapsto \gamma(\lambda)^{-1}$ и $\lambda \mapsto \gamma(-\lambda)$ касательны друг другу в 0, эта цепочка равенств продолжается следующим образом:

$$= -\left(\frac{d}{d\lambda}\left(\pi(\gamma(\lambda))\,\xi_0\right)\right)_{\lambda=0} =$$
$$= -\left(\frac{d}{d\lambda}(\pi \circ \gamma)(\lambda)\right)_{\lambda=0}\xi_0 =$$
$$= -L(\pi)\,a \,.\, \xi_0.$$

12. Присоединенное представление

Пусть G — группа Ли. Рассмотрим аналитический закон левого действия

$$(g, g') \mapsto gg'g^{-1} = (\operatorname{Int} g)\, g'$$

группы G на G. Этот закон действия, согласно n° 3, определяет билинейное отображение из $\mathcal{T}^{(\infty)}(G) \times \mathcal{T}^{(\infty)}(G)$ в $\mathcal{T}^{(\infty)}(G)$, которое мы в этом пункте обозначаем символом $\top$. В силу предложения 13 n° 3 имеем

$$(t * t') \top t'' = t \top (t' \top t''), \tag{22}$$

каковы бы ни были t, t', t'' из $\mathcal{T}^{(\infty)}(G)$. В силу предложения 14 (i) n° 3,

$$\varepsilon_g \top t = (\operatorname{Int} g)_* t, \tag{23}$$

каковы бы ни были $g \in G$ и $t \in \mathcal{T}^{(\infty)}(G)$. В частности, отображение $t \mapsto \varepsilon_g \top t$ из $\mathcal{T}^{(\infty)}(G)$ в $\mathcal{T}^{(\infty)}(G)$ есть автоморфизм биалгебры $\mathcal{T}^{(\infty)}(G)$. Ограничения его на $U(G)$, $U_s(G)$, $L(G)$ обозначаются соответственно через $\operatorname{Ad}_{U(G)}(g)$, $\operatorname{Ad}_{U_s(G)}(g)$, $\operatorname{Ad}_{L(G)}(g)$. Вместо $\operatorname{Ad}_{L(G)}(g)$ часто пишут $\operatorname{Ad}(g)$, если это не может привести к путанице. Согласно (23), $\operatorname{Ad}(g)$ *есть касательное отображение в e к отображению* $\operatorname{Int}(g)$. Это автоморфизм нормируемой алгебры Ли $L(G)$. Если K имеет характеристику 0, то $\operatorname{Ad}_{U(G)}(g)$ — единственный автоморфизм алгебры $U(G)$, продолжающий $\operatorname{Ad}(g)$.

Если φ — морфизм группы Ли G в группу Ли H, то

$$\varphi_*(t \top t') = \varphi_*(t) \top \varphi_*(t'), \tag{24}$$

каковы бы ни были t, t' в $\mathcal{T}^{(\infty)}(G)$; это следует из предложения 15 n° 3.

Предложение 43. *Пусть t, u лежат в $\mathcal{T}^{(\infty)}(G)$. Пусть $\sum_{i=1}^{n} t_i \otimes t'_i$ — образ элемента t относительно копроизведения. Тогда*

$$t \top u = \sum_{i=1}^{n} t_i * u * t_i'^{\vee}.$$

По определению $t \top u$ есть образ элемента $t \otimes u$ при отображении $(g, g') \mapsto gg'g^{-1}$ из $G \times G$ в G. Но это отображение получается в результате композиции следующих отображений:

α: $(g, g') \mapsto (g, g, g')$	из $G \times G$	в	$G \times G \times G$;
β: $(g, g', g'') \mapsto (g, g'^{-1}, g'')$	из $G \times G \times G$	в	$G \times G \times G$;
γ: $(g, g', g'') \mapsto gg''g'$	из $G \times G \times G$	в	G.

С другой стороны,

$$\alpha_* (t \otimes u) = \sum_{i=1}^{n} (t_i \otimes t'_i) \otimes u = \sum_{i=1}^{n} t_i \otimes t'_i \otimes u,$$

$$\beta_* \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \otimes t'_i \otimes u \right) = \sum_{i=1}^{n} t_1 \otimes t'^{\vee}_i \otimes u,$$

$$\gamma_* \left(\sum_{i=1}^{n} t_i \otimes t'^{\vee}_i \otimes u \right) = \sum_{i=1}^{n} t_i * u * t'^{\vee}_i.$$

Следствие 1. *Пусть* $u \in L(G)$, $u' \in \mathscr{T}^{(\infty)}(G)$. *Имеем* $u \top u' = u * u' - u' * u$.

В самом деле, образ элемента u относительно копроизведения есть $u \otimes \varepsilon_e + \varepsilon_e \otimes u$, откуда

$$u \top u' = u * u' * \varepsilon_e + \varepsilon_e * u' * u^{\vee} = u * u' - u' * u.$$

Следствие 2. *Пусть* $t \in \mathscr{T}^{(\infty)}(G)$ *и* $g \in G$. *Тогда* $\varepsilon_g \top t = \varepsilon_g * t * \varepsilon_{g^{-1}}$. *Если* $t \in L(G)$, *то* $\varepsilon_g \top t = gtg^{-1}$ *(последнее произведение вычисляется в группе* $T(G)$*).*

В самом деле, образ элемента ε_g относительно копроизведения есть $\varepsilon_g \otimes \varepsilon_g$.

Следствие 3. *Пусть* $a \in L(G)$. *Векторное поле, определенное элементом* a *и левым действием* $g \mapsto \operatorname{Int} g$ *группы* G *на* G, *есть поле* $R_a - L_a$.

В самом деле, значение этого поля в элементе g равно

$$\begin{aligned} a \top \varepsilon_g &= a * \varepsilon_g - \varepsilon_g * a \quad (\text{следствие } 1) = \\ &= (R_a)_g - (L_a)_g \quad (\text{определение } 5). \end{aligned}$$

Ч. Т. Д.

Для любого $g \in G$ и любого $t \in L(G)$

$$(\operatorname{Ad} g)(t) = \varepsilon_g \top t = \varepsilon_g * t * \varepsilon_{g^{-1}} = gtg^{-1}. \tag{25}$$

Поскольку $\operatorname{Ad} g = T_e(\operatorname{Int} g)$, предложение 42 n° 11 доказывает, что Ad есть линейное аналитическое представление группы G в нормируемом пространстве $L(G)$.

Определение 7. *Представление* Ad *группы* G *в* $L(G)$ *называется присоединенным представлением группы* G.

Предложение 44. *Для всякого* $a \in L(G)$

$$(L(\operatorname{Ad}))(a) = \operatorname{ad}_{L(G)} a.$$

Пусть $b \in L(G)$. В силу предложения 42 (ii) n° 11 и следствия 3 предложения 43

$$(L(\mathrm{Ad}))(a) \cdot b = -[R_a - L_a, L_b](e).$$

Однако $R_a \circ L_b = L_b \circ R_a$ (n° 6, предложение 23 (ii)), откуда $[R_a, L_b] = 0$; опять приняв во внимание предложение 23 (ii), получаем

$$(L(\mathrm{Ad}))(a) \cdot b = [L_a, L_b](e) = L_{[a, b]}(e) = [a, b] = (\mathrm{ad}_{L(G)} a)\, b.$$

Предложение 45. *Предположим, что G конечномерна и что K имеет характеристику 0. Пусть s — целое число $\geqslant 0$. Тогда отображение π: $g \mapsto \mathrm{Ad}_{U_s(G)}(g)$ есть линейное аналитическое представление группы G в $U_s(G)$ и $L(\pi)\, a = \mathrm{ad}_{U_s(G)}\, a$ для любого $a \in L(G)$.*

Линейное представление π есть фактор представления $\bigoplus_{r=0}^{s} \mathsf{T}^r(\mathrm{Ad})$, и, значит, оно аналитично. Для $a \in L(G)$ и x_1, $x_2, \ldots, x_s$ из $L(G)$

$$\begin{aligned}(L(\pi)\, a)(x_1 x_2 \ldots x_s) &= \sum_{i=1}^{s} x_1 \ldots (L(\mathrm{Ad})\, a \cdot x_i) \ldots x_s \quad (\text{предложение } 41) = \\ &= \sum_{i=1}^{s} x_1 \ldots ([a, x_i]) \ldots x_s \quad (\text{предложение } 44) = \\ &= \left(\mathrm{ad}_{U_s(G)} a\right)(x_1 x_2 \ldots x_s).\end{aligned}$$

Предложение 46. *Пусть $h \in G$, $x \in T_h(G)$ и $a \in L(G)$. Пусть φ — отображение $(g, g') \mapsto g g' g^{-1}$ из $G \times G$ в G. Образ y элемента $(a, x) \in T_e(G) \times T_h(G)$ относительно $T_{(e, h)}(\varphi)$ есть $y = x + h\left((\mathrm{Ad}\, h^{-1})\, a - a\right)$.*

В самом деле,

$$\begin{aligned} y &= (T_{(e, h)}\, \varphi)(a \otimes \varepsilon_h + \varepsilon_e \otimes x) = a \top \varepsilon_h + \varepsilon_e \top x = \\ &= a * \varepsilon_h - \varepsilon_h * a + x = h\left((\mathrm{Ad}\, h^{-1})\, a\right) - ha + x.\end{aligned}$$

Предложение 47. *Пусть G — группа Ли, H и E — подгруппы Ли в G, и предположим, что $hEh^{-1} = E$ для всякого $h \in H$. Тогда $\mathscr{T}^{(\infty)}(H) \top \mathscr{T}^{(\infty)}(E) \subset \mathscr{T}^{(\infty)}(E)$. В частности, $\mathrm{Ad}(H)(L(E)) \subset L(E)$ и $[L(H), L(E)] \subset L(E)$.*

В самом деле, если $t \in \mathscr{T}^{(\infty)}(H)$ и $t' \in \mathscr{T}^{(\infty)}(E)$, то $t \otimes t' \in \mathscr{T}^{(\infty)}(H \times E)$ и образ множества $H \times E$ при отображении $(g, g') \mapsto g g' g^{-1}$ содержится в E.

Предложение 48. *Пусть G — группа Ли, H и E — подгруппы Ли в G. Предположим, что G как группа Ли есть полупрямое произведение подгруппы H на E. Пусть ρ — линейное представление $g \mapsto (\mathrm{Ad}\, g) \mid L(E)$ группы Ли G в $L(E)$* (см. предложение 47), *и пусть σ — ограничение представления ρ на H. Тогда*

(i) *$L(G)$ — топологическая прямая сумма пространств $L(H)$ и $L(E)$;*

(ii) *$L(H)$ — подалгебра в $L(G)$, $L(E)$ — идеал в $L(G)$;*

(iii) *$L(\sigma)$ есть линейное представление алгебры Ли $L(H)$ в алгебру Ли дифференцирований алгебры Ли $L(E)$;*

(iv) *$L(G)$ есть полупрямое произведение алгебры Ли $L(H)$ на $L(E)$, определенное представлением $L(\sigma)$* (гл. I; § 1, n° 8).

(i) очевидно, (ii) следует из предложения 47. Имеем $L(\sigma) = L(\rho) \mid L(H)$. Но согласно предложениям 40 (n° 11) и 44 (n° 12), $L(\rho)(t)$ есть (для всякого $t \in L(G)$) ограничение отображения $\mathrm{ad}_{L(G)}\, t$ на $L(E)$. Это доказывает (iii). Если учесть (i) и (ii), это доказывает также (iv).

Следствие. *Пусть G — группа Ли. Наделим векторное пространство $T_e(G)$ его единственной структурой коммутативной алгебры Ли. Пусть τ — присоединенное представление алгебры Ли $L(G)$. Тогда алгебра Ли группы $T(G)$ есть полупрямое произведение алгебры Ли $L(G)$ на $T_e(G)$, определенное представлением τ. Иначе говоря, для x, x' из $L(G)$ и y, y' из $T_e(G)$*

$$[(x, y), (x', y')] = ([x, x'], [x, y'] + [y, x'])$$

(коммутатор слева вычисляется в $L(T(G))$, а коммутаторы справа — в $L(G)$).

Это следует из предложения 48 и из предложения 6 § 2, n° 2.

Предложение 49. *Пусть A — полная нормируемая ассоциативная алгебра с единицей. Отождествим A с $L(A^*)$. Тогда, если $g \in A^*$ и $y \in A$, то $(\mathrm{Ad}\, g)\, y = gyg^{-1}$.*

Напомним, что $\mathrm{Ad}\, g = T_1(\mathrm{Int}\, g)$. Пусть u_g — отображение $x \mapsto gxg^{-1}$ из A в A. Карта на A^*, являющаяся тождественным отображением из A^* в A, преобразует $\mathrm{Int}\, g$ в $u_g \mid A^*$. Отображение, касательное в произвольной точке из A^* к этому отображению, равно u_g, откуда следует доказываемое предложение.

Следствие. *Для всякого $g \in A^*$ пусть $i(g)$ — автоморфизм $y \mapsto gyg^{-1}$ алгебры A, так что i есть линейное аналитическое представление группы A^* в A. Для всякого $z \in L(A^*) = A$ отображение $L(i)\, z$ есть внутреннее дифференцирование $y \mapsto zy - yz$ алгебры A.*

Это следует из предложений 49 и 44.

13. Тензоры и инвариантные формы

Пусть G — группа Ли. Рассмотрим действие группы G на самой себе левыми (соотв. правыми) сдвигами. Пусть λ — векторный функтор класса C^{ω} для изоморфизмов. Тогда $\lambda(TG)$ есть левое (соотв. правое) аналитическое векторное G-расслоение (§ 1, n° 8, следствие приложения 16). Отображение $(g, u) \mapsto gu$ (соотв. ug) из $G \times \lambda(L(G))$ на $\lambda(TG)$ есть изоморфизм φ (соотв. ψ) векторных G-расслоений (§ 1, n° 8, следствие 2 предложения 17). Всякое G-инвариантное сечение расслоения $\lambda(TG)$ аналитично и определяется своим значением в e (§ 1, n° 8, следствие 1 предложения 17). Такое сечение называется *левоинвариантным* (соотв. *правоинвариантным*). Пусть σ — левоинвариантное сечение расслоения $\lambda(TG)$; образ σ' сечения σ относительно правого сдвига $\delta(g)$ определяется формулой $\sigma'(\delta(g)h) = \lambda(T_h(\delta(g)))\,\sigma(h)$, каков бы ни был элемент $h \in G$; сечение σ' тоже левоинвариантно; оно получается из σ также преобразованием $\gamma(g) \circ \delta(g) = \mathrm{Int}(g)$, значит,

$$\sigma'(e) = \lambda(\mathrm{Ad}\, g) \,.\, \sigma(e). \tag{26}$$

Пусть, аналогично, τ — правоинвариантное сечение расслоения $\lambda(TG)$; образ τ' сечения τ относительно левого сдвига $\gamma(g)$ тоже правоинвариантен, и

$$\tau'(e) = \lambda(\mathrm{Ad}\, g) \,.\, \tau(e). \tag{27}$$

Рассмотрим теперь левое действие группы $G \times G$ на G, определенное формулой $((g, g'), g'') \mapsto gg''g'^{-1}$. Тогда G есть левое однородное пространство Ли группы $G \times G$ (§ 1, n° 6, *пример*). Значит, $\lambda(TG)$ есть левое аналитическое векторное $(G \times G)$-расслоение. Сечение расслоения $\lambda(TG)$ называется *биинвариантным*, если оно инвариантно относительно действия группы $G \times G$ на $\lambda(TG)$, другими словами, если оно инвариантно относительно левых и правых сдвигов. Пусть $\lambda(L(G))_0$ — множество элементов пространства $\lambda(L(G))$, инвариантных относительно $\lambda(\mathrm{Ad}(G))$. Для всякого $u \in \lambda(L(G))_0$ пусть σ_u — отображение из G в $\lambda(TG)$, определенное формулой $\sigma_u(g) = gu = ug$. Тогда $u \mapsto \sigma_u$ есть биекция из $\lambda(L(G))_0$ на множество биинвариантных сечений расслоения $\lambda(TG)$ (§ 1, n° 8, следствие 1 предложения 17).

Предложение 50. *Пусть G — группа Ли (предполагаемая конечномерной, если характеристика поля $K > 0$). Пусть E — векторное пространство непрерывных знакопеременных полилинейных форм на $T_e(G)$ степени k. Для всякого $u \in E$ пусть ω^u — дифференциальная форма степени k на G, такая, что $(\omega^u)_g$ есть полилинейная форма на $T_g(G)$, получающаяся из u при сдвиге $h \mapsto gh$* (соотв. $h \mapsto hg$). *Тогда ω^u аналитична и левоин-*

вариантна (соотв. *правоинвариантна*) *на G. Отображение $u \mapsto \omega^u$ есть изоморфизм пространства E на векторное пространство левоинвариантных* (соотв. *правоинвариантных*) *дифференциальных форм степени k на G.*

Это частный случай того, что сказано выше.

Пусть F — полное нормируемое пространство. Предложение 50 остается справедливым, если заменить дифференциальные формы на G со значениями в K дифференциальными формами на G со значениями в F. Для всякого непрерывного линейного отображения u из $T_e(G)$ в F существует дифференциальная форма ω^u степени 1 на G со значениями в F, такая, что $(\omega^u)_g = u \circ T_g(\gamma(g)^{-1})$. В частности, возьмем $F = T_e(G)$ и $u = \mathrm{Id}_{T_e(G)}$. Получаем тогда дифференциальную форму ω на G, такую, что $\omega_g = T_g(\gamma(g^{-1}))$; эта дифференциальная форма левоинвариантна и аналитична; она называется *канонической левой дифференциальной формой* на G. Имеем $\omega_g(t) = g^{-1}t$ для всякого $t \in T_g(G)$.

Если снова F — некоторое полное нормируемое пространство и если $u \in \mathscr{L}(T_e(G), F)$, то $\omega^u = u \circ \omega$. В частности (если взять $F = K$), отображение $v \mapsto v \circ \omega$ есть линейная биекция дуального к $T_e(G)$ пространства на векторное пространство левоинвариантных дифференциальных форм степени 1 на G, принимающих значения в K.

Аналогично, дифференциальная форма ω' на G, такая, что $\omega'_g = T_g(\delta(g))$, называется *канонической правой дифференциальной формой* на G. Ее свойства аналогичны свойствам формы ω; их формулировку мы оставляем читателю. Отображение $g \mapsto g^{-1}$ из G на G преобразуют ω в ω'.

14. Формула Маурера — Картана

Пусть X — многообразие класса C^r, конечномерное, если K имеет характеристику > 0, и пусть L — полная нормируемая алгебра Ли. Пусть α — дифференциальная форма степени 1 на X со значениями в L и класса C^{r-1}. Пусть $x \in X$. Отображение

$$(u_1, u_2) \mapsto [\alpha_x(u_1), \alpha_x(u_2)]$$

из $T_x(X) \times T_x(X)$ в L есть билинейная знакопеременная непрерывная форма на $T_x(X)$ со значениями в L. Мы ее обозначаем через $[\alpha]_x^2$, так что $[\alpha]^2$ есть дифференциальная форма степени 2 на X со значениями в L. Если отождествить некоторую открытую окрестность точки x в X с открытым подмножеством банахова пространства, то сразу видно, что $[\alpha]^2$ принадлежит классу C^{r-1}. Если X' — многообразие класса C^r и $f\colon X' \to X$ —

морфизм, то

$$[f^*(\alpha)]^2 = f^*([\alpha]^2). \tag{28}$$

Пусть α, β — две дифференциальные формы степени 1 на X со значениями в L и класса C^{r-1}. Внешнее произведение $\alpha \wedge \beta$ форм α и β (*Мн. Св. рез.*, 7.8.2) есть дифференциальная форма степени 2 на X со значениями в L и класса C^{r-1}; имеем

$$(\alpha \wedge \beta)_x(u_1, u_2) = [\alpha_x(u_1), \beta_x(u_2)] - [\alpha_x(u_2), \beta_x(u_1)] \tag{29}$$

для u_1, u_2 из $T_x(X)$. Сразу ясно, что

$$[\alpha + \beta]^2 = [\alpha]^2 + [\beta]^2 + \alpha \wedge \beta, \tag{30}$$

$$\alpha \wedge \alpha = 2[\alpha]^2. \tag{31}$$

Предложение 51. *Пусть G — группа Ли, конечномерная, если K имеет характеристику > 0, и пусть $a_1, \ldots, a_p$ — элементы из $L(G)$, F — полное нормируемое пространство, а α — дифференциальная форма степени $p-1$ на G со значениями в F. Если α левоинвариантна, то*

$$(d\alpha)_e(a_1, \ldots, a_p) = \\ = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha_e([a_i, a_j], a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_p).$$

Если α правоинвариантна, то

$$(d\alpha)_e(a_1, \ldots, a_p) = \\ = -\sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha_e([a_i, a_j], a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_p).$$

Предположим, что α левоинвариантна. Согласно *Мн. Св. рез.*, 8.5.7,

$$(d\alpha)(L_{a_1}, \ldots, L_{a_p}) = \\ = \sum_i (-1)^{i-1} L_{a_i}\alpha(L_{a_1}, \ldots, L_{a_{i-1}}, L_{a_{i+1}}, \ldots, L_{a_p}) + \\ + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \alpha([L_{a_i}, L_{a_j}], L_{a_1}, \ldots, L_{a_{i-1}}, L_{a_{i+1}}, \ldots \\ \ldots, L_{a_{j-1}}, L_{a_{j+1}}, \ldots, L_{a_p}).$$

Но функции $\alpha(L_{a_1}, \ldots, L_{a_{i-1}}, L_{a_{i+1}}, \ldots, L_{a_p})$ на G левоинвариантны, а значит, постоянны. Следовательно,

$$L_{a_i}\alpha(L_{a_1}, \ldots, L_{a_{i-1}}, L_{a_{i+1}}, \ldots, L_{a_p}) = 0.$$

В то же время $[L_{a_i}, L_{a_j}] = L_{[a_i, a_j]}$ (предложение 23), откуда следует первая формула предложения 51. Вторая устанавли-

вается аналогичным образом, если принять во внимание на этот раз, что $[R_{a_i}, R_{a_j}] = -R_{[a_i, a_j]}$.

Следствие 1. *Пусть G — группа Ли, конечномерная, если K имеет характеристику >0, а ω и ω' — соответственно левая и правая канонические дифференциальные формы на G. Тогда*

$$d\omega + [\omega]^2 = 0, \quad d\omega' - [\omega']^2 = 0.$$

Согласно предложению 51,

$$(d\omega)_e(a_1, a_2) = -\omega_e([a_1, a_2]) = -[a_1, a_2] = \\ = -[\omega_e(a_1), \omega_e(a_2)] = -[\omega]^2_e(a_1, a_2),$$

откуда следует первая формула. Вторая устанавливается аналогичным образом.

Следствие 2. *Предположим, что G имеет конечную размерность. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис в $L(G)$, $(e_1^*, \ldots e_n^*)$ — дуальный базис, (c_{ijk}) — структурные константы алгебры Ли $L(G)$ относительно базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ и ω_i* (соотв. ω'_i) *— левоинвариантная* (соотв. *правоинвариантная*) *дифференциальная форма на G со значениями в K, такая, что $(\omega_i)_e = e_i^*$* (соотв. $(\omega'_i)_e = e_i^*$). *Тогда*

$$d\omega_k + \sum_{i<j} c_{ijk}\omega_i \wedge \omega_j = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$d\omega'_k - \sum_{i<j} c_{ijk}\omega'_i \wedge \omega'_j = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

В самом деле, если $r < s$, то

$$(d\omega_k)_e(e_r, e_s) = -(\omega_k)_e([e_r, e_s]) = \\ = -\sum_l c_{rsl}(\omega_k)_e(e_l) = \\ = -c_{rsk} = \\ = -\sum_{i<j} c_{ijk}(\omega_i \wedge \omega_j)_e(e_r, e_s).$$

Аналогично рассуждаем в случае форм ω'_k.

15. Конструкция инвариантных дифференциальных форм

Лемма 2. Пусть G — группа Ли, U — открытая симметричная окрестность элемента e в G, E — полное нормируемое пространство и φ: $U^2 \to E$ — аналитическое отображение. Для всякого $g \in U$ пусть ω_g — дифференциал в точке g отображения $h \mapsto \varphi(g^{-1}h)$. Тогда ω есть ограничение на U некоторой левоин-

вариантной дифференциальной формы на G, значение которой в e равно $d_e\varphi$.

Ясно, что $\omega_e = d_e\varphi$. Для всякого $g \in U$ и всякого $t \in T_e(G)$

$$\langle \omega_g, T_e(\gamma(g))\,t\rangle = \langle d_g(\varphi\circ\gamma(g)^{-1}), T_e(\gamma(g))\,t\rangle =$$
$$= \langle d_e\varphi \circ T_g(\gamma(g)^{-1}), T_e(\gamma(g))\,t\rangle = \langle d_e\varphi, t\rangle.$$

Значит, ω_g получается из $d_e\varphi$ действием отображения $T_e(\gamma(g))$.

Предложение 52. *Пусть n — целое число > 0, G — группа Ли размерности n, U — открытая симметричная окрестность элемента e в G и ψ: $U^2 \to K^n$ — такая карта на G, что $\psi(e) = 0$. Если $(x_1, \ldots, x_n)$ — координаты точки $x \in \psi(U)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ — координаты точки $y \in \psi(U)$, обозначим через*

$$m_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n), \ldots, m_n(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$$

координаты точки $\psi(\psi^{-1}(x)^{-1}\psi^{-1}(y))$. Тогда, если положить для $1 \leqslant k \leqslant n$

$$\varpi_k(x_1, \ldots, x_n) = D_{n+1}m_k(x_1, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 + \ldots$$
$$\ldots + D_{2n}m_k(x_1, \ldots, x_n, x_1, \ldots, x_n)\,dx_n, \qquad (32)$$

то дифференциальные формы ϖ_k на $\psi(U)$ суть образы относительно ψ некоторых левоинвариантных дифференциальных форм на G и $\varpi_k(0, \ldots, 0) = dx_k$.

Применим лемму 2 с $E = K$, взяв в качестве $\varphi(g)$ координату с индексом k точки $\psi(g)$. Получаем некоторую дифференциальную форму ω_k; пусть ϖ_k — ее преобразование с помощью ψ. Значения формы ϖ_k в $(x_1, \ldots, x_n)$ — это дифференциал в $(x_1, \ldots, x_n)$ функции $y \mapsto m_k(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$; стало быть, это значение дается формулой (32). Остается тогда воспользоваться заключением леммы 2.

Предложение 53. *Пусть G — группа Ли, A — полная нормируемая алгебра, φ — морфизм групп Ли из G в A^*. Для всякого $g \in G$ пусть $\omega_g = \varphi(g)^{-1}\cdot d_g\varphi$. Тогда ω есть левоинвариантная дифференциальная форма на G, значение которой в e есть $d_e\varphi$.*

В самом деле, применим лемму 2 с $E = A$, $U = G$. Дифференциал в g отображения $h \mapsto \varphi(g^{-1}h) = \varphi(g)^{-1}\varphi(h)$ есть $\varphi(g)^{-1}\cdot d_g\varphi$.

16. Мера Хаара на группе Ли

Пусть G — группа Ли конечной размерности n. Тогда $\bigwedge^n(T_e(G))$ имеет размерность 1. Стало быть (n° 13), векторное пространство S левоинвариантных дифференциальных форм степени n

на G имеет размерность 1. Пусть $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ — базис векторного пространства левоинвариантных дифференциальных форм степени 1 на G; тогда $\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \ldots \wedge \omega_n$ есть базисный элемент в S.

Предложение 54. *Пусть G — группа Ли конечной размерности n, ω — левоинвариантная дифференциальная форма степени n на G и φ — эндоморфизм группы G. Тогда*

$$\varphi^*(\omega) = (\det L(\varphi))\, \omega.$$

Положим $L(\varphi) = u$, $\omega_e = f$, $\varphi^*(\omega)_e = g$. Каковы бы ни были $x_1, \ldots, x_n$ в $L(G)$

$$g(x_1, \ldots, x_n) = f(ux_1, \ldots, ux_n) = (\det u)\, f(x_1, \ldots, x_n),$$

значит, $\varphi^*(\omega)_e = \det L(\varphi) \,.\, \omega_e$. С другой стороны, если $g \in G$, то $\varphi \circ \gamma(g) = \gamma(\varphi(g)) \circ \varphi$ и, стало быть, $\gamma(g)^* \varphi^*(\omega) = \varphi^*(\omega)$. Таким образом, форма $\varphi^*(\omega)$ левоинвариантна, откуда вытекает предложение.

Следствие. *Для всякого $g \in G$*

$$\delta(g)^* \omega = (\det \operatorname{Ad} g)\, \omega.$$

В самом деле, $\delta(g)^* \omega = \delta(g)^* \gamma(g)^* \omega = (\operatorname{Int} g)^* \omega$ и $L(\operatorname{Int} g) = \operatorname{Ad} g$. Ч. Т. Д.

Пусть G — локально компактная группа и φ — ее эндоморфизм. Предположим, что существуют открытые окрестности V, V' элемента e, такие, что $\varphi(V) = V'$ и что $\varphi \mid V$ есть локальный изоморфизм из G в G. Пусть μ — левая мера Хаара на G. В силу *Интегр.*, гл. VII, § 1, следствие предложения 9, существует единственное число $a > 0$, такое, что $\varphi(\mu \mid V) = a^{-1}\mu \mid V'$. Ясно, что a не зависит от выбора V, V', μ. Оно называется модулем эндоморфизма φ и часто обозначается через $\operatorname{mod}_G \varphi$ или просто $\operatorname{mod} \varphi$. Если φ — автоморфизм группы G, мы возвращаемся к определению 4 из *Интегр.*, гл. VII, § 1.

Предложение 55. *Предположим, что поле K локально компактно. Пусть μ — мера Хаара на аддитивной группе поля K. Пусть G — группа Ли конечной размерности n.*

(i) *Пусть ω — ненулевая левоинвариантная дифференциальная форма степени n на G. Тогда мера* $\operatorname{mod}(\omega)_\mu$ (*Мн. Св. раз.*, 10.1.6) *есть левая мера Хаара на G. Если $K = \mathbf{R}$ и если G наделена ориентацией, определяемой формой ω, то мера, определенная формой ω* (*Мн. Св. рез.*, 10.4.3), *есть левая мера Хаара на G.*

(ii) *Пусть φ — этальный эндоморфизм группы G. Тогда* $\operatorname{mod} \varphi = \operatorname{mod} \det L(\varphi)$.

Утверждение (i) очевидно. Пусть V, V' — открытые окрестности элемента e, такие, что $\varphi(V)=V'$ и что $\varphi|V$ есть локальный изоморфизм из G в G. Тогда

$$\varphi^{-1}(\operatorname{mod}(\omega)_\mu\,|V') = \operatorname{mod}((\varphi^*(\omega))_\mu\,|V)\ \text{(в силу переноса структуры)} =$$
$$= \operatorname{mod}(\det L(\varphi)\,\omega\,|V)_\mu \quad \text{(предложение 54)} =$$
$$= \operatorname{mod}\det L(\varphi)\,(\operatorname{mod}(\omega)_\mu\,|V,$$

откуда $\operatorname{mod}\varphi = \operatorname{mod}\det L(\varphi)$, согласно определению числа $\operatorname{mod}\varphi$.

Следствие. *Для всякого $g\in G$ имеем $\Delta_G(g) = (\operatorname{mod}\det\operatorname{Ad}g)^{-1}$. В частности, чтобы группа G была унимодулярной, необходимо и достаточно выполнение условия* $\operatorname{mod}\det\operatorname{Ad}g=1$ *для всякого $g\in G$.*

В самом деле,

$$\Delta_G(g) = (\operatorname{mod}\operatorname{Int}g)^{-1} \quad (\textit{Интегр.}, \text{ гл. VII, § 1, формула (33)}) =$$
$$= (\operatorname{mod}\det L(\operatorname{Int}g))^{-1} \quad \text{(предложение 55)} =$$
$$= (\operatorname{mod}\det\operatorname{Ad}g)^{-1}.$$

Замечание. Примем опять предпосылки и обозначения предложения 52 и предположим, что K локально компактно. Пусть μ — мера

$$\operatorname{mod}\det(D_{n+i}m_k(x_1,\ \ldots,\ x_n,\ x_1,\ \ldots,\ x_n))_{1\leqslant i,\ k\leqslant n}\,dx_1\ \ldots\ dx_n$$

на $\psi(U)$. Тогда $\psi^{-1}(\mu)$ является ограничением на U меры Хаара на G.

Предложение 56. *Пусть G — группа Ли конечной размерности n, H — подгруппа Ли размерности p, а X — однородное пространство Ли G/H. Предположим, что*

$$\det\operatorname{Ad}_{L(G)}h = \det\operatorname{Ad}_{L(H)}h$$

для всякого $h\in H$. Тогда

(i) *Дифференциальные формы степени $n-p$ на X, инвариантные относительно G, аналитичны.*

(ii) *Векторное пространство этих форм одномерно.*

(iii) *Если ω — такая ненулевая форма и если K локально компактно, то* $\operatorname{mod}(\omega)_\mu$ *есть ненулевая мера на X, инвариантная относительно G.*

Согласно примерам из § 1, n° 8, $\mathrm{Alt}^{n-p}(TX, K)$ есть аналитическое векторное G-расслоение. Пусть x_0 — канонический образ элемента e в X; его стабилизатор есть H. Слой расслоения $\mathrm{Alt}^{n-p}(TX, K)$ в x_0 есть $\bigwedge^{n-p}T_{x_0}(X)^*$, и $T_{x_0}(X)$ канонически отождествляется с $L(G)/L(H)$. Если $h\in H$, то автоморфизм τ_h пространства X, определенный элементом h, получается

из автоморфизма $g \mapsto hgh^{-1}$ группы G посредством перехода к фактору. Значит, автоморфизм $T_{x_0}(\tau_h)$ получается при переходе к фактору из $\mathrm{Ad}_{L(G)} h$. Пускольку

$$\det \mathrm{Ad}_{L(G)} h = (\det \mathrm{Ad}_{L(H)} h) \,.\, (\det T_{x_0}(\tau_h)),$$

сделанное предположение влечет за собой условие $\det T_{x_0}(h) = 1$. Таким образом, всякий элемент из $\bigwedge^{n-p} T_{x_0}(X)^*$ инвариантен относительно H. Коль скоро это так, (i) и (ii) следуют из § 1, n° 8, следствие 1 предложения 17, и (iii) очевидно.

Существование ненулевой положительной меры на X, инвариантной относительно G, следует, впрочем, из *Интегр.*, гл. VII, § 2, следствие 2 теоремы 3, поскольку условие предложения 56 влечет за собой равенство $\Delta_G \mid H = \Delta_H$ (следствие предложения 55).

Предложение 57. *Пусть G — группа Ли конечной размерности n. Выберем базис в $\bigwedge^n T_e(G)^*$; тогда с помощью правой* (соотв. *левой*) *тривиализации векторного расслоения $\bigwedge^n T(G)^*$ мы можем отождествить это последнее с тривиальным векторным расслоением $G \times K$, так что транспонированный оператор для скалярного дифференциального оператора отождествляется со скалярным дифференциальным оператором.*

Тогда, если $u \in U(G)$, то транспонированный оператор для L_u (соотв. R_u) *есть $L_{\check{u}}$* (соотв. $R_{\check{u}}$).

Рассмотрим случай, когда $\bigwedge^n T(G)^*$ тривиализуется с помощью правоинвариантной формы ω.

Допустим, что предложение доказано для элементов u_1, u_2 из $U(G)$. Тогда

$$\begin{aligned} {}^t(L_{u_1 * u_2}) &= {}^t(L_{u_1} \circ L_{u_2}) \quad (\text{предложение } 23) = \\ &= {}^t(L_{u_2}) \circ {}^t(L_{u_1}) \quad (\textit{Мн. Св. рез.}, 14.3.3) = \\ &= L_{\check{u}_2} \circ L_{\check{u}_1} \quad (\text{согласно допущению}) = \\ &= L_{\check{u}_2 * \check{u}_1} \quad (\text{предложение } 23) = \\ &= L_{(u_1 * u_2)^\vee} \quad (\text{предложение } 7), \end{aligned}$$

значит, предложение справедливо для $u_1 * u_2$. Следовательно, достаточно доказать предложение в случае, когда $u \in T_e(G)$. Однако L_u определяется правым действием группы G на G (n° 6), стало быть, $\theta_{L_u}\omega = 0$, поскольку ω правоинвариантна (*Мн. Св. рез.*, 8.4.5); поэтому если f — аналитическая функция в некоторой открытой окрестности элемента e со значениями в K, то $\theta_{L_u}(f\omega) = (\theta_{L_u} f)\,\omega$ (*Мн. Св. рез.*, 8.4.8). С учетом сделанных отождествлений и *Мн. Св. рез.*, 14.4.1, получаем, что транспонированный для L_u оператор есть $-L_u$, т. е. $L_{\check{u}}$.

Следствие. *Пусть G — вещественная конечномерная группа Ли, μ* (соотв. ν) — *левая* (соотв. *правая*) *мера Хаара на G, k — целое число $\geqslant 0$, $u \in U_k(G)$, а f и g — вещественные функции класса C^k на G с компактным носителем. Тогда*

$$\int_G (R_u f) g \, d\mu = \int_G f (R_{\check{u}} g) \, d\mu,$$

$$\int_G (L_u f) g \, d\nu = \int_G f (L_{\check{u}} g) \, d\nu.$$

Это следует из предложения 57 и из *Мн. Св. раз.*, 14.3.8.

17. Левый дифференциал

Определение 8. *Пусть G — группа Ли, M — многообразие класса C^r, f — отображение класса C^r из M в G. Левым* (соотв. *правым*) *дифференциалом отображения f называется дифференциальная форма степени 1 на M со значениями в $L(G)$, которая произвольному вектору $u \in T_m(M)$ ставит в соответствие элемент $f(m)^{-1} . (T_m f)(u)$* $\big($соотв. $(T_m f)(u) . f(m)^{-1}\big)$.

В этой главе мы рассматриваем лишь левый дифференциал, который будем обозначать через $f^{-1} . df$, и предоставляем читателю перенос результатов на случай правого дифференциала.

Если f — тождественное отображение группы G, то $f^{-1} . df$ есть каноническая левая дифференциальная форма ω на G. Возвращаясь к общему случаю определения 8, имеем $(f^{-1} . df)_m = \omega_{f(m)} \circ T_m(f)$, следовательно, $f^{-1} . df = f^*(\omega)$. Из этого вытекает, что $f^{-1} . df$ принадлежит классу C^{r-1}.

Примеры. 1) Если G — аддитивная группа полного нормируемого пространства E и если произведено каноническое отождествление пространства $T_0(E)$ с E, то $f^{-1} . df$ есть дифференциал df, определенный в *Мн. Св. рез.*, 8.2.2.

2) Предположим, что G есть мультипликативная группа A^*, ассоциированная с полной нормируемой алгеброй A. Тогда f можно рассматривать как отображение из M в A, а значит, определен дифференциал df в смысле *Мн. Св. рез.*, 8.2.2, и определено произведение $f^{-1} df$ в смысле *Мн. Св. рез.*, 8.3.2. Ясно, что эта последняя форма совпадает с левым дифференциалом отображения f.

Предложение 58. *Пусть G и H — две группы Ли, M — многообразие класса C^r, f — отображение класса C^r из M в G и*

h — *морфизм из* G *в* H. *Тогда*

$$(h\circ f)^{-1}.d(h\circ f)=L(h)\circ(f^{-1}.df)=(h^{-1}.dh)\circ T(f).$$

В самом деле, каковы бы ни были $x\in M$ и $u\in T_x(M)$,

$$(h\circ f)^{-1}.d(h\circ f)(u)=((h\circ f)(x))^{-1}.T(h\circ f)(u).$$

Это последнее выражение равно, с одной стороны, выражению

$$T(h)\left(f(x)^{-1}.T(f)(u)\right)\quad (\S\ 2,\ \text{предложение } 5)=$$
$$=T_e(h)\left((f^{-1}.df)(u)\right)$$

и, с другой стороны, выражению

$$h(f(x))^{-1}T(h)(T(f)u)=$$
$$=(h^{-1}.dh)(T(f)u).$$

Предложение 59. *Пусть* G — *группа Ли,* M — *многообразие класса* C^r, f *и* g — *два отображения класса* C^r *из* M *в* G *и* p — *каноническая сюръекция многообразия* TM *на* M.

(i) *Имеем*

$$(fg)^{-1}.d(fg)=(\mathrm{Ad}\circ g\circ p)^{-1}\circ(f^{-1}.df)+g^{-1}.dg.$$

(ii) *Положим* $h(m)=f(m)^{-1}$ *для всякого* $m\in M$. *Тогда*

$$h^{-1}.dh=-(\mathrm{Ad}\circ f\circ p)\circ(f^{-1}.df).$$

Утверждение (i) следует из § 2, n° 2, предложение 7. Утверждение (ii) следует из (i), если положить $g=h$.

Следствие 1. *Пусть* $s\in G$ *и* sg — *отображение* $x\longmapsto sg(x)$ *из* M *в* G. *Тогда* $(sg^{-1}).d(sg)=g^{-1}.dg$.

Это следует из предложения 59 (i), если взять в качестве f постоянное отображение $x\longmapsto s$ из M в G.

Следствие 2. *Если отображения* f *и* g *из* M *в* G *имеют один и тот же левый дифференциал, то касательное отображение к* fg^{-1} *всюду равно нулю. Если, кроме того,* K *имеет характеристику* 0, *то* fg^{-1} *локально постоянно.*

В самом деле, согласно предложению 59,

$$(fg^{-1})^{-1}.d(fg^{-1})=(\mathrm{Ad}\circ g\circ p)\circ(f^{-1}.df)-(\mathrm{Ad}\circ g\circ p)\circ(g^{-1}.dg).$$

Если $f^{-1}.df=g^{-1}.dg$, то, стало быть, $(fg^{-1})^{-1}.d(fg^{-1})=0$, т. е. $T_x(fg^{-1})=0$ для всякого $x\in M$. Это доказывает первое утверждение. Второе следует из него в силу *Мн. Св. рез.*, 5.3.3.

Предложение 60. *Пусть G — группа Ли, конечномерная, если K имеет характеристику > 0, M — многообразие класса C^r, f — отображение класса C^r из M в G и α — левый дифференциал отображения f. Тогда $d\alpha + [\alpha]^2 = 0$.*

В самом деле, пусть ω — каноническая левая дифференциальная форма на G. Используя следствие 1 предложения 51, n° 14, получаем

$$d\alpha = d(f^*(\omega)) = f^*(d\omega) = f^*(-[\omega]^2) = -[f^*(\omega)]^2 = -[\alpha]^2.$$

18. Алгебра Ли групускулы Ли

В этом пункте через (G, e, θ, m) обозначается некоторая групускула Ли. Значительная часть результатов настоящего параграфа остается в силе с теми же доказательствами. Мы изложим конспективно те из них, которые нам будут полезны.

18.1. Пусть Ω — множество определения закона композиции m. Пусть $(g, g') \in \Omega$, $t \in T_g^{(\infty)}(G)$, $t' \in T_{g'}^{(\infty)}(G)$. Как в n° 1, сверткой элементов t и t', обозначаемой через $t * t'$, называется образ элемента $t \otimes t'$ при отображении m. Полагаем $U(G) = T_e^{(\infty)}(G)$, $U_s(G) = T_e^{(s)}(G)$, $U^+(G) = T_e^{(\infty)+}(G)$, $U_s^+(G) = T_e^{(s)+}(G)$. Для t, t' из $U(G)$ свертка $t * t'$ определена и принадлежит $U(G)$. Относительно свертки $U(G)$ является ассоциативной алгеброй с единицей ε_e, фильтрованной пространствами $U_s(G)$. Канонический изоморфизм $i_{G,e}$ из $\operatorname{gr} U(G)$ на $\mathsf{TS}(T_e(G))$ есть изоморфизм алгебр.

18.2. Пусть G, H — групускулы Ли, $\varphi\colon G \to H$ — морфизм. Если $t \in U(G)$, то образ $U(\varphi)(t)$ элемента t относительно φ_* — это элемент из $U(H)$ и $U(\varphi)$ — морфизм алгебры $U(G)$ в алгебру $U(H)$. Отображение $\theta\colon x \mapsto x^{-1}$ из G в G определяет отображение $t \mapsto t^\vee$ из $U(G)$ в $U(G)$. Для t, t' из $U(G)$ свертка $t * t'$, вычисленная в $G^\vee$, равна свертке $t' * t$, вычисленной в G, и $(t * t')^\vee = t'^\vee * t^\vee$. Имеем $U(\varphi)(t^\vee) = (U(\varphi)t)^\vee$. Если $G_1, \ldots, G_n$ — групускулы Ли и $G = G_1 \times \ldots \times G_n$, то канонический изоморфизм из $U(G_1) \otimes \ldots \otimes U(G_n)$ на $U(G)$ есть изоморфизм алгебр; для $t_1, \ldots, t_n$ из $U(G)$ имеем $(t_1 \otimes \ldots \otimes t_n)^\vee = t_1^\vee \otimes \ldots \otimes t_n^\vee$. Пусть L — подгрупускула Ли в G и $i\colon L \to G$ — каноническая инъекция. Тогда $U(i)$ есть инъективный гомоморфизм алгебры $U(L)$ в алгебру $U(G)$ и $U(i)(t^\vee) = (U(i)(t))^\vee$ для всякого $t \in U(L)$. Наделенная сверткой и копроизведением, определенным структурой многообразия на G, $U(G)$ является биалгеброй, а $U(\varphi)$ есть морфизм биалгебр.

18.3. Пусть G — групускула Ли, X — многообразие класса C^r и ψ — кусок закона левого действия класса C^r групускулы G

на X. Пусть Ω — множество, на котором определен ψ. Если $t \in T_g^{(s)}(G)$, $u \in T_x^{(s')}(X)$, а $(g, x) \in \Omega$ и если $s + s' \leqslant r$, то через $t * u$ обозначается образ элемента $t \otimes u$ при ψ_*. Пусть $t \in T_g^{(s)}(G)$, $t' \in T_{g'}^{(s')}(G)$, $u \in T_x^{(s'')}(X)$; если $s + s' + s'' \leqslant r$ и если gg', $(gg')x$, $g'x$, $g(g'x)$ определены, то

$$(t * t') * u = t * (t' * u).$$

Пусть $x_0 \in X$ и $\rho(x_0)$ — отображение $g \mapsto gx_0$, которое определено в некоторой открытой окрестности элемента e. Если $t \in U_r(G)$, то $\rho(x_0)_* t = t * \varepsilon_{x_0}$. Здесь и далее в этом пункте мы оставляем читателю перенос результатов на случай кусков законов правого действия.

18.4. Сохраним обозначения из 18.3. Пусть $t \in U_s(G)$, где $s \leqslant r$. Пусть f — функция класса C^r на X со значениями в отделимом полинормированном пространстве. Через $t * f$ обозначается функция на X, определенная формулой

$$(t * f)(x) = \langle t, g \mapsto f(\psi(\theta(g), x))\rangle =$$
$$= \langle t^\vee, f \circ \rho(x)\rangle = \langle \rho(x)_*(t^\vee), f\rangle = \langle t^\vee * \varepsilon_x, f\rangle.$$

Если $t \in U_s(G)$, $t' \in U_{s'}(G)$, $u \in T_x^{s'}(X)$ и если $s + s' \leqslant r$, то $\langle tu, t * f\rangle = \langle t^\vee * tu, f\rangle$ и $(t * t') * f = t * (t' * f)$. Пусть $t \in U_s(G)$, f и f' — функции класса C^r на X со значениями в отделимых полинормированных пространствах F и F' соответственно, $(u, u') \mapsto u \cdot u'$ — непрерывное билинейное отображение из $F \times F'$ в некоторое отделимое полинормированное пространство; пусть $\sum_{i=1}^{n} t_i \otimes t'_i$ — образ элемента t относительно копроизведения; если $s \leqslant r$, то

$$t * (ff') = \sum_{i=1}^{n} (t_i * f)(t'_i * f').$$

18.5. Сохраним обозначения из 18.3. Пусть $t \in U_s(G)$, где $s \leqslant r$. Отображение $x \mapsto t * \varepsilon_x$ называется полем точечных распределений, определенным элементом t и куском закона действия ψ, и обозначается иногда через D_t^ψ или D_t. Если $f\colon X \to F$ — функция класса C^r, то функция $t^\vee * f$ на X обозначается также через $D_t f$; она принадлежит классу C^{r-s}, если $s < \infty$. Если $t \in U_s(G)$, $t' \in U_{s'}(G)$ и если $s + s' \leqslant r$, то $D_{t * t'} f = D_{t'}(D_t f)$. Если G и X конечномерны, то D_t есть дифференциальный оператор на X порядка $\leqslant s$ класса C^{r-s} (если $s < \infty$). Функция $D_t f$ есть тогда результат применения к функции f этого дифференциального оператора.

18.6. Пусть G — групускула Ли и $t \in U(G)$. Через L_t обозначается поле точечных распределений $g \mapsto \varepsilon_g * t$ на G и через R_t — поле точечных распределений $g \mapsto t * \varepsilon_g$ на G. Если $f \in \mathscr{C}^\omega(G, F)$, то $L_t f \in \mathscr{C}^\omega(G, F)$ и $R_t f \in \mathscr{C}^\omega(G, F)$. Для t, t' из $U(G)$ получаем $L_{t * t'} = L_t \circ L_{t'}$, $R_{t * t'} = R_{t'} \circ R_t$, $L_t \circ R_{t'} = R_{t'} \circ L_t$, $\theta(L_t) = R_{\check{t}}$.

18.7. Поскольку $T_e(G)$ есть множество примитивных элементов в $U(G)$, то $[T_e(G), T_e(G)] \subset T_e(G)$. Нормируемое пространство $T_e(G)$, наделенное операцией коммутирования, есть нормируемая алгебра Ли, называемая нормируемой алгеброй Ли групускулы G (или ее алгеброй Ли) и обозначаемая через $L(G)$. Пусть $E(G)$ — ее универсальная обертывающая алгебра. Каноническая инъекция из $L(G)$ в $U(G)$ определяет гомоморфизм η алгебры $E(G)$ в алгебру $U(G)$; если K имеет характеристику 0, η есть изоморфизм биалгебры, с помощью которого $U(G)$ отождествляется с $E(G)$. Примем вновь обозначения из 18.3. Для всякого $a \in L(G)$ пусть D_a — поле точечных распределений, определенное элементом a на X. Отображение $(a, x) \mapsto D_a(x)$ есть морфизм класса C^{r-1} тривиального векторного расслоения $L(G) \times X$ в векторное расслоение $T(X)$. Пусть I — открытое подмножество в K, содержащее 0, и γ: $I \to G$ — отображение класса C^r, такое, что $\gamma(0) = e$. Пусть $a = T_0(\gamma) 1 \in L(G)$. Если f: $X \to F$ — функция класса C^r, то

$$(D_a f)(x) = \lim_{k \in K^*,\ k \to 0} k^{-1}(f(\gamma(k)x) - f(x)).$$

Если $r \geqslant 2$, отображение $a \mapsto D_a$ есть закон инфинитезимального левого действия класса C^{r-1} алгебры Ли $L(G)$ на X.

18.8. Пусть G и H — групускулы Ли, φ — морфизм из G в H. Ограничение отображения $U(\varphi)$ на $L(G)$, являющееся не чем иным, как $T_e(\varphi)$, есть непрерывный морфизм из $L(G)$ в $L(H)$, который обозначается через $L(\varphi)$. Если ψ — морфизм из H в некоторую групускулу Ли, то $L(\psi \circ \varphi) = L(\psi) \circ L(\varphi)$. Чтобы φ был иммерсией, необходимо и достаточно, чтобы $L(\varphi)$ был изоморфизмом из $L(G)$ на некоторую подалгебру Ли в $L(H)$, допускающую топологическое дополнение. В частности, если G есть подгрупускула Ли в H и если φ — каноническая инъекция, то $L(G)$ отождествляется с подалгеброй Ли в $L(H)$ при помощи $L(\varphi)$. Если $(G_i)_{i \in I}$ — конечное семейство групускул Ли и G — их произведение, то $L(G)$ канонически отождествляется с $\prod_{i \in I} L(G_i)$.

18.9. Пусть G — групускула Ли, конечномерная, если K имеет характеристику > 0. Пусть F — полное нормируемое простран-

ство. Пусть α — дифференциальная форма степени k на G со значениями в F. Говорят, что α левоинвариантна на G, если α_g получается из α_e с помощью отображения $h \mapsto gh$ окрестности элемента e на окрестность элемента g. Если α левоинвариантна, то α аналитична. Отображение $\alpha \mapsto \alpha_e$ есть биекция множества левоинвариантных дифференциальных форм степени k на G со значениями в F на множество непрерывных k-линейных знакопеременных отображений из $T_e(G)$ в F. Если $\alpha_e = \mathrm{Id}_{T(G)}$, то α называется *канонической левой дифференциальной формой на* G. Аналогичным образом определяют правоинвариантные дифференциальные формы и каноническую правую дифференциальную форму на G. Если ω — каноническая левая дифференциальная форма на G, то $d\omega + [\omega]^2 = 0$. Пусть M — многообразие класса C^r, f — отображение класса C^r из M в G. Левым дифференциалом отображения f, обозначаемым через $f^{-1}.df$, называется дифференциальная форма степени 1 на M со значениями в $L(G)$, которая каждому вектору $u \in T_m(M)$ сопоставляет элемент $f(m)^{-1}.(T_m f)(u)$. Имеем $f^{-1}.df = f^*(\omega)$, $d\alpha + [\alpha]^2 = 0$. Если два отображения f и g из M в G имеют один и тот же левый дифференциал и если K имеет характеристику 0, то fg^{-1} локально постоянно.

§ 4. Переход от алгебр Ли к группам Ли

Напомним, что вплоть до конца главы мы предполагаем, что K имеет характеристику 0.

1. Переход от морфизмов алгебр Ли к морфизмам групп Ли

Лемма 1. *Пусть G — группускула Ли, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Ли в $L(G)$, допускающая топологическое дополнение. Совокупность подпространств $g\mathfrak{h}$* (соотв. $\mathfrak{h}g$) *для $g \in G$ есть интегрируемое векторное подрасслоение в $T(G)$.*

Рассматривая левую тривиализацию расслоения $T(G)$ (§ 2, n° 3), мы сразу видим, что подпространства $g\mathfrak{h}$ при $g \in G$ суть слои некоторого векторного подрасслоения E в $T(G)$. Пусть $g \in G$. Множество векторов вида $(L_a)_g$, где $a \in \mathfrak{h}$, есть $g\mathfrak{h}$. Но если a и b принадлежат подалгебре $\mathfrak{h}$, то $[L_a, L_b] = L_{[a, b]}$ и $[a, b] \in \mathfrak{h}$. Стало быть, E интегрируемо (*Мн. Св. рез.*, 9.3.3 (iv)). Для подпространств $\mathfrak{h}g$ рассуждаем аналогично.

Интегральное слоение (*Мн. Св. рез.*, 9.3.2) расслоения, определенного совокупностью подпространств $g\mathfrak{h}$ (соотв. $\mathfrak{h}g$), называется *левым* (соотв. *правым*) *слоением* на G, ассоциированным с $\mathfrak{h}$.

Теорема 1. *Пусть G и H — группускулы Ли, f — непрерывный морфизм из $L(G)$ в $L(H)$.*

(i) *Существуют открытая подгрупускула Ли G' в G и морфизм φ из G' в H, такие, что $f = L(\varphi)$.*

(ii) *Пусть G_1, G_2 — две открытые подгрупускулы Ли в G и φ_i — морфизм из G_i в H, такой, что $f = L(\varphi_i)$ для $i = 1, 2$. Тогда φ_1 и φ_2 совпадают в некоторой окрестности элемента e.*

Пусть p_1: $G \times H \to G$, p_2: $G \times H \to H$ — канонические проекции. Для всякого $(g, h) \in G \times H$ пусть $f_{g,h}$ — отображение $ga \mapsto hf(a)$ из $T_g(G) = gL(G)$ в $T_h(H) = hL(H)$. Рассматривая левые тривиализации расслоений $T(G)$ и $T(H)$, сразу видим, что совокупность отображений $f_{g,h}$ определяет морфизм из $p_1^* T(G)$ в $p_2^* T(H)$. Пусть $\mathfrak{a}$ — график отображения f; это замкнутая подалгебра в $L(G) \times L(H)$, которая допускает $\{0\} \times L(H)$ в качестве топологического дополнения. Для всякой пары $(g, h) \in G \times H$ график отображения $f_{g,h}$ есть $(g, h) \cdot \mathfrak{a}$. Объединение этих графиков есть интегрируемое векторное подрасслоение в $T(G \times H)$ (*лемма* 1). Существуют тогда (*Мн. Св. рез.*, 9.3.7) открытая окрестность U элемента e_G в G и такое аналитическое отображение φ из U в H, что $\varphi(e_G) = e_H$ и $T_g(\varphi) = f_{g, \varphi(g)}$ для каждого $g \in U$. В частности, $T_{e_G}(\varphi) = f$.

Пусть V — открытая окрестность элемента e_G в G, такая, что для $(s, t) \in V \times V$ определены произведения st и $\varphi(s)\varphi(t)$, причем $st \in U$. Рассмотрим отображения α_1, α_2 из $V \times V$ в H, определенные формулами

$$\alpha_1(s, t) = \varphi(ts), \quad \alpha_2(s, t) = \varphi(t)\varphi(s).$$

Тогда $\alpha_1(t, e) = \varphi(t) = \alpha_2(t, e)$. С другой стороны, зафиксируем t в V, и пусть β_i — отображение $s \mapsto \alpha_i(s, t)$ из V в H. Для всякого $s \in V$ и всякого $a \in L(G)$

$$T_s(\beta_1)(sa) = T_{ts}(\varphi)(tsa) = f_{ts, \varphi(ts)}(tsa) = \\ = \varphi(ts) f(a) = f_{s, \beta_1(s)}(sa),$$

$$T_s(\beta_2)(sa) = \varphi(t) T_s(\varphi)(sa) = \varphi(t) f_{s, \varphi(s)}(sa) = \\ = \varphi(t)\varphi(s) f(a) = f_{s, \beta_2(s)}(sa).$$

Значит (*Мн. Св. рез.*, 9.3.7), α_1 и α_2 совпадают в некоторой окрестности элемента (e_G, e_G). Ограничение морфизма φ на достаточно малую открытую симметричную окрестность элемента e_G является, следовательно, морфизмом групускул Ли, откуда вытекает (i).

Пусть G_1, G_2, φ_1, φ_2 — те же, что в (ii), и докажем, что φ_1, φ_2 совпадают в некоторой окрестности элемента e_G. Существует открытая окрестность W элемента e_G, такая, что $\varphi_1(ts) = \varphi_1(t)\varphi_1(s)$, $\varphi_2(ts) = \varphi_2(t)\varphi_2(s)$, каковы бы ни были s, t в W.

Тогда если $s \in W$ и $a \in L(G)$, то

$$T_s(\varphi_i)(sa) = \varphi_i(s) T_e(\varphi_i)(a) = \varphi_i(s) f(a) = f_{s, \varphi_i(s)}(sa)$$

для $i = 1, 2$. Поскольку $\varphi_1(e_G) = e_H = \varphi_2(e_G)$, из *Мн. Св. рез.*, 9.3.7, заключаем, что φ_1 и φ_2 совпадают в некоторой окрестности элемента e_G.

Следствие 1. *Пусть G и H — две групускулы Ли. Если $L(G)$ и $L(H)$ изоморфны, то G и H локально изоморфны.*

Это вытекает из теоремы 1 § 1, n° 10, предложение 21.

Следствие 2. *Пусть G — групускула Ли. Если $L(G)$ коммутативна, то G локально изоморфна аддитивной группе Ли пространства $L(G)$.*

В самом деле, алгебра Ли аддитивной группы $L(G)$ изоморфна $L(G)$. Достаточно, значит, применить следствие 1.

Следствие 3. *Пусть G — группа Ли. Если $L(G)$ коммутативна, G содержит открытую коммутативную подгруппу.*

Существует открытая подгрупускула Ли U в G, которая коммутативна (следствие 2). Пусть V — окрестность элемента e, такая, что $V^2 \subset U$. Тогда $xy = yx$, каковы бы ни были x, y в V. Стало быть, подгруппа в G, порожденная окрестностью V, коммутативна; она, очевидно, открыта.

2. Переход от алгебр Ли к группам Ли

Мы будем обозначать через $H(X, Y)$ ряд Хаусдорфа (гл. II, § 6, n° 4, определение 1).

Лемма 2. Пусть L — полная нормированная алгебра Ли над **R** *или* **C**. *Пусть G — множество таких $x \in L$, что $\|x\| < \frac{1}{3}\log\frac{3}{2}$. Пусть θ — отображение $x \mapsto -x$ из G в G. Пусть H — ограничение на $G \times G$ функции Хаусдорфа алгебры Ли L* (гл. II, § 7, n° 2).

(i) *$(G, 0, \theta, H)$ есть групускула Ли.*

(ii) *Пусть φ — тождественное отображение из G в L. Дифференциал отображения φ в 0 есть изоморфизм нормируемой алгебры Ли $L(G)$ на L.*

(i) следует из гл. II, § 7, n° 2.

Поскольку φ есть карта на G, дифференциал ψ отображения φ в 0 есть изоморфизм нормируемых пространств. С другой стороны, разложение в степенной ряд $H = \sum_{i, j \geqslant 0} H_{ij}$ отобра-

жения H таково, что $H_{11}(x, y) = \frac{1}{2}[x, y]$. Согласно предложению 24 § 3, получаем для произвольных a, b из $L(G)$

$$\psi([a, b]) = H_{11}(\psi(a), \psi(b)) - H_{11}(\psi(b), \psi(a)) = [\psi(a), \psi(b)],$$

что доказывает (ii).

Говорят, что G есть *групускула Ли, определенная алгеброй Ли* L.

Предположим, что K — ультраметрическое поле. Пусть p — характеристика поля вычетов поля K. Если $p \neq 0$, положим $\lambda = |p|^{1/(p-1)}$; если $p = 0$, положим $\lambda = 1$.

Лемма 3. *Пусть L — полная нормированная алгебра Ли над K. Пусть G — множество тех $x \in L$, для которых $\|x\| < \lambda$. Пусть $H: G \times G \to G$ — функция Хаусдорфа алгебры Ли L* (гл. II, § 8, n° 3).

(i) *Будучи наделено законом композиции H, G становится группой Ли, в которой 0 есть единичный элемент и для всякого $x \in G$ обратным к нему элементом является $-x$.*

(ii) *Пусть φ — тождественное отображение из G в L. Дифференциал отображения φ в 0 есть изоморфизм нормируемой алгебры Ли $L(G)$ на L.*

(iii) *Для всякого $\mu \in \mathbf{R}_+^*$ пусть G_μ — множество тех $x \in L$, для которых $\|x\| < \mu$. Тогда множества G_μ при $\mu < \lambda$ образуют фундаментальную систему открытых и замкнутых окрестностей элемента 0 и являются подгруппами в G.*

Утверждения (i) и (iii) вытекают из предложения 3 гл. II, § 8, n° 3, а (ii) доказывается, как в лемме 2.

Говорят, что G есть *группа Ли, определенная алгеброй Ли* L.

Теорема 2. *Пусть L — полная нормируемая алгебра Ли. Существует групускула Ли G, такая, что $L(G)$ изоморфна L. Две такие групускулы Ли локально изоморфны.*

Первое утверждение следует из лемм 2 и 3. Второе утверждение вытекает из следствия 1 теоремы 1 n° 1.

Следствие 1. *Пусть G — группа Ли. Существует окрестность элемента e, не содержащая никакой конечной подгруппы, отличной от $\{e\}$. Если $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, существует окрестность элемента e, не содержащая никакой подгруппы, отличной от $\{e\}$.*

Положим $L(G) = L$. Выберем норму на L, которая определяет топологию на L и такова, что $\|[x, y]\| \leqslant \|x\| \|y\|$, каковы бы ни были x, y из L.

Предположим, что $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. Пусть G' — групускула Ли, определенная алгеброй Ли L. Существуют открытый шар U' в G' с центром в 0 и изоморфизм φ групускулы Ли U' на открытую окрестность U элемента e в G. Пусть $V' = \frac{1}{2} U'$, $V = \varphi(V')$, H — подгруппа в G, содержащаяся в V, и $h \in H$. Положим $x = \varphi^{-1}(h) \in V'$. Если $x \neq 0$, существует целое число $n > 0$, такое, что $x, 2x, \ldots, nx$ лежат в V', $(n+1)x \in U'$, $(n+1)x \notin V'$. Тогда $h, h^2, \ldots, h^n$ лежат в V, $h^{n+1} \in U$, $h^{n+1} \notin V$, что невозможно. Стало быть, $H = \{e\}$.

Предположим, что K ультраметрично. Достаточно доказать следствие в случае, когда G есть группа Ли, ассоциированная с L. Если $g \in G$, то степени элемента g, вычисленные в G, суть целые кратные элемента g, вычисленные в L. Последние попарно различны, если $g \neq e$. Значит, G не содержит никакой конечной подгруппы, отличной от $\{e\}$.

Следствие 2. *Пусть k — замкнутое недискретное подполе в K, G — группа Ли над k и $L = L(G)$. Предположим, что на L задана структура нормируемой K-алгебры Ли L', согласованная со структурой нормируемой k-алгебры Ли и инвариантная относительно присоединенного представления группы G. Тогда на G существует одна, и только одна, структура K-группы Ли, согласованная со структурой k-группы Ли, для которой алгеброй Ли является L'.*

Существует групускула Ли G_1 над K, такая, что $L(G_1) = L'$ (теорема 2). Согласно следствию 1 теоремы 1 n° 1, G и G_1, рассматриваемые как k-групускулы Ли, локально изоморфны. Стало быть, существует открытая окрестность G' элемента e в G и структура K-групускулы Ли на G' с алгеброй Ли L, согласованная со структурой групускулы Ли над k. Пусть V — открытая симметричная окрестность элемента e в G, такая, что $V^2 \subset G'$. Пусть $g \in G$. Тогда $\varphi = \operatorname{Int} g$ есть k-изоморфизм некоторой достаточно малой открытой в G' подгрупускулы Ли на некоторую открытую подгрупускулу Ли в G'. Далее, $T_e(\varphi)$ есть K-линейное отображение, следовательно, $T_x(\varphi)$ есть K-линейное отображение для достаточно близких к e элементов x; следовательно, ограничение отображения $\operatorname{Int} g$ на некоторую достаточно малую окрестность элемента e в V является K-аналитическим (*Мн. Св. рез.*, 5.14.6). В силу предложения 18 из § 1, n° 9, на G существует структура K-аналитического многообразия, относительно которой G является K-группой Ли, а V — открытым K-подмногообразием в G. Сдвигая V, видим, что нижележащая структура k-многообразия на G есть данная структура. Алгебра Ли K-группы Ли G та же, что у открытой K-подгрупускулы Ли V, стало быть,

она есть L'. Наконец, утверждение единственности следует из предложения 32 § 3, n° 8.

Теорема 3. *Пусть G — групускула Ли и $\mathfrak{h}$ — подалгебра Ли в $L(G)$, допускающая топологическое дополнение. Существует такая подгрупускула Ли H в G, что $L(H)=\mathfrak{h}$. Если H_1 и H_2 — подгрупускулы Ли в G, такие, что*

$$L(H_1)=L(H_2)=\mathfrak{h},$$

то $H_1 \cap H_2$ открыто в H_1 и в H_2.

Существует групускула Ли H' с алгеброй Ли, изоморфной алгебре Ли $\mathfrak{h}$ (теорема 2). Уменьшив, если нужно, H', можно считать, что существует морфизм φ из H' в G, такой, что $L(\varphi)$ есть изоморфизм из $L(H')$ на $\mathfrak{h}$ (n° 1, теорема 1). Поскольку $\mathfrak{h}$ допускает топологическое дополнение, φ есть иммерсия в e. Стало быть, вновь уменьшив H', можно предположить, что φ есть изоморфизм многообразия H' на некоторое подмногообразие в G. Это доказывает существование подгрупускулы H. Второе утверждение следует из такого результата:

Предложение 1. *Пусть G — групускула Ли, H и H' — две подгрупускулы Ли. Включение $L(H) \supset L(H')$ имеет место тогда и только тогда, когда $H \cap H'$ открыто в H'.*

Если $H \cap H'$ открыто в H', то $L(H')=L(H \cap H') \subset L(H)$. Предположим, что $L(H) \supset L(H')$. Пусть i, i' — канонические инъекции подгрупускул H, H' в G. Уменьшив, если нужно, H', можно предполагать, что существует морфизм ψ из H' в H, такой, что $L(\psi)$ есть каноническая инъекция из $L(H')$ в $L(H)$ (n° 1, теорема 1). Тогда $L(i \circ \psi)=L(i')$, стало быть, существует окрестность V элемента $e_{H'}$ в H', такая, что $i \circ \psi$ и i' совпадают в V (теорема 1). Следовательно, $V \subset H$ и, значит, $V \subset H \cap H'$ и $H \cap H'$ открыто в H' (§ 1, n° 10).

Предложение 2. *Пусть G — группа Ли над K, k — замкнутое недискретное подполе в K и H — подгруппа Ли k-группы Ли G. Предположим, что $L(H)$ есть векторное K-подпространство в $L(G)$, допускающее топологическое дополнение. Тогда H есть подгруппа Ли K-группы Ли G.*

Существует подгрупускула Ли H' в K-группе Ли G, такая, что $L(H')=L(H)$ (теорема 3). Будем рассматривать G, H, H' как k-групускулы Ли; теорема 3 показывает тогда, что $H \cap H'$ открыто в H и H'. Стало быть, существует открытая окрестность U элемента e в G, такая, что $U \cap H$ есть подмногообразие в G над K. Следовательно, H есть подгруппа Ли K-группы Ли G (§ 1, n° 3, предложение 6).

3. Экспоненциальные отображения

Теорема 4. *Пусть G — групускула Ли, L — ее алгебра Ли, V — открытая окрестность элемента 0 в L, φ — аналитическое отображение из V в G, такое, что $\varphi(0)=0$ и $T_0(\varphi)=\mathrm{Id}_L$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *для любого $b \in L$ имеем $\varphi((\lambda+\lambda')b)=\varphi(\lambda b)\varphi(\lambda'(b))$ при достаточно малых $|\lambda|$ и $|\lambda'|$.*

(ii) *Для любого $b \in L$ и целого числа $n>0$ элемент $\varphi_*(b^n)$ в $U(G)$ однороден степени*[1] *n (мы отождествляем $T_0^{(\infty)}(L)$ с $\mathsf{TS}(L)$ и b^n вычисляем в $\mathsf{TS}(L)$).*

(iii) *Отображение φ_* из $\mathsf{TS}(L)$ в $U(G)$ согласовано с градуировками в $\mathsf{TS}(L)$ и $U(G)$.*

(iv) *Отображение φ_* из $\mathsf{TS}(L)$ в $U(G)$ есть каноническое отображение из $\mathsf{TS}(L)$ в универсальную обертывающую алгебру алгебры Ли L.*

(v) *Существуют норма на L, определяющая топологию пространства L и такая, что $\|[x, y]\| \leqslant \|x\|\|y\|$ для произвольных x, y из L, и открытая подгрупускула $W \subset V$ групускулы Ли, определенной алгеброй Ли L (n° 2), такие, что $\varphi \mid W$ есть изоморфизм из W на некоторую открытую подгрупускулу Ли в G.*

(v) $\Rightarrow$ (i). Очевидно, ибо $(\lambda b).(\lambda' b)=(\lambda+\lambda')b$ в W для достаточно малых $|\lambda|$ и $|\lambda'|$.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Предположим, что условие (i) выполнено. Пусть $b \in L$ и пусть ψ — ограничение отображения φ на $V \cap Kb$. Согласно предположению, существует симметричная окрестность T элемента 0 в аддитивной группе Ли Kb, такая, что $\psi \mid T$ есть морфизм групускулы Ли T в G. Стало быть, $\varphi_*(b^n)=$ $=(\psi \mid T)_*(b^n)=((\psi \mid T)_*(b))^n=(\varphi_*(b))^n$, так что $\varphi_*(b^n)$ однороден степени n в $U(G)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Это следует из того факта, что $\mathsf{TS}^n(L)$ есть векторное подпространство в $\mathsf{TS}(L)$, порожденное n-ми степенями элементов из L (*Alg.*, chap. IV, § 5, proposition 5, n[elle] éd.).

(iii) $\Rightarrow$ (iv). Каноническое отображение из $\mathsf{TS}(L)$ в универсальную обертывающую алгебру алгебры Ли L есть единственный морфизм градуированных коалгебр, преобразующий 1 в 1 и продолжающий Id_L (гл. II, § 1, n° 5, *замечание* 3). Но φ_* есть морфизм коалгебр, и $\varphi_* \mid L=\mathrm{Id}_L$ по условию. Если условие (iii) выполнено, мы видим, что выполнено также условие (iv).

(iv) $\Rightarrow$ (v). Предположим, что условие (iv) выполнено. Выберем норму на L, определяющую топологию пространства L и такую, что $\|[x, y]\| \leqslant \|x\|\|y\|$, каковы бы ни были x, y из L. Пусть H — групускула Ли, определенная нормированной алгеб-

[1]) В смысле разложения $U=\sum U^n$, определенного на стр. 31 — *Прим. перев.*

рой Ли L. В силу теоремы 1 существуют открытая подгрупускула $S \subset V$ в H и изоморфизм φ' из S на некоторую открытую подгрупускулу в G. Поскольку мы знаем уже, что (v) $\Rightarrow$ (iv), отображение φ'_* из $\mathsf{TS}(L)$ в $U(G)$ есть каноническое отображение из $\mathsf{TS}(L)$ в универсальную обертывающую алгебру алгебры Ли L. Таким образом, $\varphi_*(t) = \varphi'_*(t)$ для всякого $t \in T_0^{(\infty)}(L)$. Поскольку φ и φ' аналитичны, они совпадают в некоторой окрестности элемента 0.

Определение 1. *Пусть* G — *групускула Ли,* L — *ее алгебра Ли. Экспоненциальным отображением для* G *называется всякое аналитическое отображение* φ, *определенное в открытой окрестности элемента* 0 *из* L, *принимающее значения в* G *и удовлетворяющее условиям теоремы* 4.

Из теоремы 4 немедленно следует, что для всякой групускулы G *существует экспоненциальное отображение для* G и что *два экспоненциальных отображения для* G *совпадают в некоторой окрестности элемента* 0.

Примеры. 1) Возьмем в качестве G аддитивную группу некоторого полного нормируемого пространства E. Канонический изоморфизм из $L(G)$ на E удовлетворяет условию (i) теоремы 4 и, значит, является экспоненциальным отображением для G.

2) Пусть A — полная нормированная ассоциативная алгебра с единицей. Пусть A^* — группа Ли, образованная обратимыми элементами в A. Отождествим $L(A^*)$ с A (§ 3, n° 9, следствие предложения 33). Если $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, известно, что отображение exp из A в A^*, определенное в гл. II, § 7, n° 3, удовлетворяет условию (i) теоремы 4 и, следовательно, является экспоненциальным отображением. Пусть теперь K ультраметрично. Пусть p — характеристика поля вычетов поля K. Если $p \neq 0$, положим $\lambda = |p|^{1/(p-1)}$; если $p = 0$, положим $\lambda = 1$. Пусть U — множество таких $x \in A$, что $\|x\| < \lambda$. Известно (гл. II, § 8, n° 4), что отображение exp из U в A^* удовлетворяет условию (i) теоремы 4, а значит, является экспоненциальным отображением. Заметим, что U есть аддитивная подгруппа в A.

Этот пример объясняет терминологию, принятую в определении 1.

Пусть G — групускула Ли, φ — экспоненциальное отображение для G. Тогда φ этально в 0, стало быть, существует открытая окрестность U элемента 0 в $L(G)$, такая, что $\varphi(U)$ открыто в G и $\varphi|U$ есть морфизм аналитического многообразия U на аналитическое многообразие $\varphi(U)$.

Канонической картой (*первого рода*) на G называется карта ψ на аналитическом многообразии G, обратным отображением

для которой является экспоненциальное отображение. Если, кроме того, G конечномерна и выбран базис в $L(G)$, то система координат, определенная картой и этим базисом в области определения отображения ψ, называется *системой канонических координат* (*первого рода*).

Предложение 3. *Пусть G — групускула Ли, L — ее алгебра Ли и φ — экспоненциальное отображение для G. Пусть $L_1, \ldots, L_n$ — векторные подпространства в L, такие, что L есть прямая топологическая сумма пространств $L_1, \ldots, L_n$. Отображение*

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n) \mapsto \theta(b_1, b_2, \ldots, b_n) = \varphi(b_1)\varphi(b_2)\ldots\varphi(b_n),$$

определенное в некотором открытом подмножестве пространства $L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_n$, аналитично. Касательное отображение в $(0, 0, \ldots, 0)$ к θ есть каноническое отображение из $L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_n$ в L.

Пусть k_i — каноническая инъекция из L_i в $L_1 \times L_2 \times \ldots \times L_n$. Для любого $b \in L_i$ имеем $(T_{(0,\ldots,0)}\theta)((T_0 k_i)(b)) = (T_0\varphi)(b) = b$, значит, $(T_{(0,\ldots,0)}\theta) \mid L_i$ является канонической инъекцией L_i в L. Ч. Т. Д.

В частности, θ этально в $(0, 0, \ldots, 0)$. Его ограничение на достаточно малую открытую окрестность U точки $(0, 0, \ldots, 0)$ имеет открытый образ в G и является изоморфизмом многообразия U на многообразие $\theta(U)$. Обратное к θ отображение η из $\theta(U)$ на U называется *канонической картой второго рода* на G, ассоциированной с данным разложением пространства L в прямую сумму. Если, кроме того, G конечномерна и если каждое L_i порождено ненулевым вектором e_i, то система координат в $\theta(U)$, определенных отображением η и векторами e_i, называется *системой канонических координат второго рода*.

Предложение 4. *Пусть G — групускула Ли, φ — инъективное экспоненциальное отображение для G. Каковы бы ни были x, y в $L(G)$, имеем*

$$x + y = \lim_{\lambda \in K^*,\ \lambda \to 0} \lambda^{-1}\varphi^{-1}(\varphi(\lambda x)\varphi(\lambda y)), \tag{1}$$

$$[x, y] = \lim_{\lambda \in K^*,\ \lambda \to 0} \lambda^{-2}\varphi^{-1}(\varphi(\lambda x)\varphi(\lambda y)\varphi(-\lambda x)\varphi(-\lambda y)). \tag{2}$$

(Отметим, что $\varphi^{-1}(\varphi(\lambda x)\varphi(\lambda y))$ и $\varphi^{-1}(\varphi(\lambda x)\varphi(\lambda y)\varphi(-\lambda x)\varphi(-\lambda y))$ определены для достаточно малого $|\lambda|$.)

Наделим $L = L(G)$ нормой, определяющей топологию пространства L и такой, что $\|[x, y]\| \leqslant \|x\|\|y\|$ для любых x, y в L. Приняв во внимание теоремы 2 и 4, можно предположить, что G есть групускула Ли, определенная алгеброй Ли L, и что

$\varphi = \mathrm{Id}_G$. Обозначим через $(x, y) \mapsto x \,.\, y$ произведение в группе G. Доказываемые формулы запишутся тогда так:

$$x + y = \lim_{\lambda \in K^*,\ \lambda \to 0} \lambda^{-1}((\lambda x) \,.\, (\lambda y)), \tag{3}$$

$$[x, y] = \lim_{\lambda \in K^*,\ \lambda \to 0} \lambda^{-2}((\lambda x) \,.\, (\lambda y) \,.\, (-\lambda x) \,.\, (-\lambda y)). \tag{4}$$

Существует такая открытая окрестность V элемента 0 в K, что функция

$$\lambda \mapsto f(\lambda) = (\lambda x) \,.\, (\lambda y)$$

определена и аналитична в V. В силу гл. II, § 6, n° 4, *замечание* 2, разложение функции f в степенной ряд в нуле есть

$$\lambda(x + y) + \frac{1}{2}\lambda^2 [x, y] + \ldots,$$

и это доказывает (3). С другой стороны, для u, v из G при достаточно малых $\|u\|$, $\|v\|$ произведение $u \,.\, v$ является аналитической функцией от (u, v), и сумма членов степени 1 и 2 в разложении в степенной ряд этой функции в нуле равна $u + v + \frac{1}{2}[u, v]$. В силу *Мн. Св. рез.*, 3.2.7 и 4.2.3, члены степени 1 и 2 в разложении в степенной ряд функции $f(\lambda) \,.\, f(-\lambda)$ в нуле суть члены степени 1 и 2 в

$$f(\lambda) + f(-\lambda) + \frac{1}{2}[f(\lambda), f(-\lambda)],$$

или также в

$$\lambda(x + y) + \frac{1}{2}\lambda^2 [x, y] - \lambda(x + y) + \frac{1}{2}\lambda^2 [x, y] + \\ + \frac{1}{2}[\lambda(x + y), -\lambda(x + y)] = \lambda^2 [x, y],$$

и это доказывает (4).

Предложение 5. *Пусть G — группа Ли, k — замкнутое недискретное подполе в K, G' — группа G, рассматриваемая как группа Ли над k и φ* (соотв. φ') — *экспоненциальное отображение для G* (*соотв.* G'). *Тогда φ и φ' совпадают в окрестности элемента* 0.

В самом деле, φ удовлетворяет условию (i) теоремы 4 для G', а значит, является экспоненциальным отображением для G'.

Предложение 6. *Пусть G — групускула Ли, L — ее алгебра Ли, φ: $V \to G$ — экспоненциальное отображение для G. Для всякого $x \in V$ отождествим $T_x(L)$ с L, так что правый дифферен-*

циал $\varpi(x)$ отображения φ в x есть линейное отображение из L в L. Для любого x, достаточно близкого к 0, имеем

$$\varpi(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{(n+1)!} (\operatorname{ad} x)^n.$$

Наделим групускулу L нормой, согласованной с ее топологией и такой, что $\|[x, y]\| \leqslant \|x\| \|y\|$, каковы бы ни были $x, y \in L$. Достаточно разобрать случай, когда G есть групускула Ли, определенная алгеброй Ли L, и когда $\varphi = \mathrm{Id}_G$. По определению $\varpi(x)$ есть тогда касательное отображение в x к отображению $y \mapsto y \cdot x^{-1}$ из G в G. Если обозначить через $H(X, Y)$ ряд Хаусдорфа, то для достаточно малых $\|x\|$ дифференциал $\varpi(x)$ есть, стало быть, касательное в 0 отображение к отображению $y \mapsto H(x+y, -x)$ из G в G. Сумма членов первой степени по Y в $H(X+Y, -X)$ есть

$$\sum_{m \geqslant 0} \frac{1}{(m+1)!} (\operatorname{ad} X)^m Y$$

(гл. II, § 6, n° 5, предложение 5). Предложение следует тогда из *Мн. Св. рез.*, 3.2.4 и 4.2.3.

Пусть G — групускула Ли и $t \in K$. *Отображением степени t групускулы G* называется всякое отображение, определенное и аналитическое в открытой окрестности элемента e со значениями в G и совпадающее в некоторой окрестности элемента e с отображением

$$g \mapsto \varphi(t\varphi^{-1}(g)),$$

где φ — инъективное экспоненциальное отображение для G.

Предложение 7. (i) *Если $t \in \mathbf{Z}$, то отображение степени t совпадает в некоторой окрестности элемента e с отображением $g \mapsto g^t$.*

(ii) *Касательное отображение в e к отображению степени t есть гомотетия, отвечающая элементу t.*

(iii) *Если h — отображение степени t и h' — отображение степени t' для G, то $h \circ h'$ есть отображение степени tt' и $g \mapsto h(g)h'(g)$ есть отображение степени $t+t'$.*

(iv) *Если h — отображение степени t и если $u \in U^n(G)$* (см. стр. 31), *то $h_*(u) = t^n u$.*

Достаточно доказать предложение в случае, когда G есть групускула Ли, определенная полной нормированной алгеброй Ли, и когда рассматриваемые отображения степени t строятся с помощью экспоненциального отображения $\varphi = \mathrm{Id}_G$. Но тогда все очевидно.

4. Функториальность экспоненциальных отображений

Предложение 8. *Пусть G и H — групускулы Ли, h — морфизм из G в H, φ_G и φ_H — экспоненциальные отображения для G и H. Существует окрестность V элемента 0 в $L(G)$, такая, что $h \circ \varphi_G$ и $\varphi_H \circ L(h)$ совпадают в V.*

Наделим $L(G)$ и $L(H)$ нормами, определяющими их топологию и такими, что $\|[x, y]\| \leqslant \|x\| \|y\|$, каковы бы ни были x и y. Можно предполагать, что G (соотв. H) есть групускула Ли, определенная алгеброй Ли $L(G)$ (соотв. $L(H)$), так что φ_G (соотв. φ_H) совпадает с Id_G (соотв. Id_H) в окрестности элемента 0. С другой стороны, существует открытая симметричная окрестность W элемента 0 в $L(G)$, такая, что $L(h)$ есть морфизм групускулы Ли W в H. Согласно теореме 1, $L(h)$ совпадает с h в окрестности элемента 0, откуда следует предложение.

Образно говоря, если отождествить G и H с некоторыми окрестностями единичных элементов в $L(G)$ и $L(H)$ соответственно посредством экспоненциальных отображений, то всякий морфизм из G в H *линеен* в некоторой окрестности элемента 0.

Следствие 1. *Пусть G — групускула Ли, G' — подгрупускула Ли в G, φ — экспоненциальное отображение для G.*

(i) *Существует открытая окрестность V элемента 0 в $L(G')$, такая, что $\varphi | V$ есть изоморфизм многообразия V на некоторую открытую окрестность элемента e в G'.*

(ii) *Пусть $x \in L(G)$. Следующие условия эквивалентны:* а) $x \in L(G')$; б) $\varphi(\lambda x) \in G'$ *для достаточно малых* $|\lambda|$.

(i) получается в результате применения предложения 8 к канонической инъекции из G' в G, а (ii) следует из (i).

Следствие 2. *Пусть G — группа Ли, ρ — линейное аналитическое представление группы G и φ — экспоненциальное отображение для G. Существует окрестность V элемента 0 в $L(G)$, такая, что*

$$\rho(\varphi(x)) = \exp(L(\rho)\, x)$$

для всякого $x \in V$.

Это следует из предложения 8 и из *примера* 2 n° 3.

Следствие 3. *Пусть G — группа Ли, φ — экспоненциальное отображение для G.*

(i) *Существует окрестность V элемента 0 в $L(G)$, такая, что*

$$\mathrm{Ad}(\varphi(x)) = \exp \mathrm{ad}\, x$$

для всякого $x \in V$.

(ii) *Если $g \in G$, существует окрестность W элемента* 0 *в* $L(G)$, *такая, что*

$$g\varphi(x)g^{-1} = \varphi(\operatorname{Ad} g \,.\, x)$$

для всякого $x \in W$.

(i) вытекает из следствия 2 и из предложения 44 § 3, n° 12.
(ii) вытекает из предложения 8, примененного к $\operatorname{Int} g$.

5. Индуцированная структура на подгруппе

Лемма 4. *Пусть G — группа Ли конечной размерности, Ω — открытая симметричная окрестность элемента e в G и H — подмножество в Ω, содержащее e, такое, что условия $x \in H$, $y \in H$, $xy^{-1} \in \Omega$ влекут за собой $xy^{-1} \in H$. Пусть $r \in N_K$. Для всякого $x \in H$ пусть $\mathfrak{h}_x$ — множество элементов $a \in T_x(G)$, обладающих следующим свойством: существуют открытая окрестность I элемента 0 в K и отображение f класса C^r из I в G, такие, что $f(0) = x$, $f(I) \subset H$, $(T_0 f)(1) = a$.*

(i) *Положим $\mathfrak{h}_e = \mathfrak{h}$. Тогда $\mathfrak{h}$ есть подалгебра Ли в $L(G)$, инвариантная относительно $\operatorname{Ad}_{L(G)}(H)$.*

(ii) *Имеем $\mathfrak{h}_x = x\mathfrak{h} = \mathfrak{h}x$ для всякого $x \in H$ ($x\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}x$ вычисляются в $T(G)$).*

(iii) *Пусть V — многообразие класса C^r, v_0 — точка в V, f — отображение класса C^r из V в G, такое, что $f(v_0) = e$ и $f(V) \subset H$. Какова бы ни была подгрупускула Ли H' в G с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$, $f(v) \in H'$ для элементов v, достаточно близких к v_0.*

(iv) *Какова бы ни была подгрупускула Ли H' в G с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$, $H' \cap H$ есть окрестность элемента e в H'.*

(v) *Для всякого $x \in H$ и всякого $a \in \mathfrak{h}_x$ существуют открытая окрестность I элемента 0 в K и такое отображение f класса C^ω из I в G, что $f(0) = x$, $f(I) \subset H$, $(T_0 f)(1) = a$.*

Ясно, что $K\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ и что $x\mathfrak{h}_y z = \mathfrak{h}_{xyz}$, если x, y, xy, xyz лежат в H. Это влечет за собой (ii) и тот факт, что $\mathfrak{h}$ инвариантна относительно $\operatorname{Ad}_{L(G)}(H)$.

Пусть a_1, a_2 лежат в $\mathfrak{h}$. Пусть I — открытая окрестность элемента 0 в K и f_1, f_2 — отображения класса C^r из I в G, такие, что $f_j(0) = e$, $f_j(I) \subset H$, $(T_0 f_j)(1) = a_j$ $(j = 1, 2)$. Определим $f\colon I \to G$ формулой $f(\lambda) = f_1(\lambda) f_2(\lambda)$. Тогда f принадлежит классу C^r и $f(0) = e$. Уменьшив, если нужно, I, получаем включение $f(I) \subset H$. С другой стороны, отображение из $T_e(G) \times T_e(G)$ в $T_e(G)$, касательное к отображению $(g, g') \mapsto gg'$, есть сложение; стало быть, $(T_0 f)(1) = a_1 + a_2$. Значит, $a_1 + a_2 \in \mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}$ есть векторное подпространство в $L(G)$. Поскольку $x\mathfrak{h}x^{-1} = \mathfrak{h}$ для всякого $x \in H$, имеем $(\operatorname{Ad} f_1(\lambda)) \,.\, a_2 \in \mathfrak{h}$ для всякого $\lambda \in I$. Отображение, касательное в 0 к отображению $\lambda \mapsto \operatorname{Ad} f_1(\lambda)$, со-

гласно предложению 44 § 3, n° 12, есть отображение $\lambda \mapsto \mathrm{ad}(\lambda a_1)$; стало быть, $[a_1, a_2] = (\mathrm{ad}\, a_1) . a_2 \in \mathfrak{h}$, поскольку $\mathfrak{h}$ замкнуто в $L(G)$. Стало быть, мы доказали (i). В заключение доказательства мы зафиксируем подгрупускулу Ли H' в G с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$.

Пусть V, v_0, f такие же, как в (iii). Пусть Y — левое слоение на G, ассоциированное с $\mathfrak{h}$ (n° 1). Для всякого $y \in H'$ имеем $T_y(H') = y\mathfrak{h}$. С другой стороны, для всякого $v \in V$ образ пространства $T_v(V)$ относительно $T_v(f)$ содержится в $\mathfrak{h}_{f(v)} = f(v)\,\mathfrak{h}$ (по определению множества $\mathfrak{h}_{f(v)}$). Согласно *Мн. Св. рез.*, 9.3.2, f есть морфизм из V в Y. Поскольку H' является листом слоения Y (*Мн. Св. рез.*, 9.2.8), то $f(v) \in H'$ для любого v, достаточно близкого к v_0.

Пусть $(a_1, \ldots, a_s)$ — базис в $\mathfrak{h}$. Существуют открытая окрестность I элемента 0 в K и такие отображения $f_1, \ldots, f_s$ класса C^r из I в G, что $f_j(0) = e$, $f_j(I) \subset H$, $(Tf_j)\, 1 = a_j$ для всякого j. В силу (iii) $f_j(\lambda) \in H'$ для достаточно малых $|\lambda|$. Значит, элементы $f_1(\lambda_1) f_2(\lambda_2) \ldots f_s(\lambda_s)$ при достаточно малых $|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_s|$ составляют окрестность элемента e в H', и эта окрестность содержится в H. Отсюда следует (iv).

Если $a \in \mathfrak{h}$, то существуют открытая окрестность I элемента 0 в K и отображение класса C^ω из I в G, такие, что $f(0) = e$, $f(I) \subset H'$, $(T_0 f)\, 1 = a$. Вместе с (iv) это влечет за собой (v).

Определение 2. *Говорят, что $\mathfrak{h}$ есть касательная подалгебра к H в e.*

Предложение 9. *Пусть G — конечномерная группа Ли, H — подгруппа в G.*

(i) *На H существует одна и только одна структура аналитического многообразия со следующим свойством: для всякого r, заключенного между 1 и ω, для всякого многообразия V класса C^r и для всякого отображения f из V в H отображение f принадлежит классу C^r как отображение из V в H тогда и только тогда, когда f принадлежит классу C^r как отображение из V в G.*

(ii) *Относительно этой структуры H является группой Ли, каноническая инъекция i из H в G есть иммерсия, а $L(i)(L(H))$ — подалгебра Ли, касательная к H в e.*

Единственность в (i) очевидна. Докажем существование. Пусть $\mathfrak{h}$ — алгебра Ли, касательная к H в e. Пусть H' — подгрупускула Ли в G с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$. Заменив H' некоторой открытой подгрупускулой в H', можно предположить, что $H' \subset H$ (лемма 4 (iv)). Для всякого $x \in H$ множество $xH'x^{-1}$ есть подгрупускула Ли в G с алгеброй Ли $x\mathfrak{h}x^{-1} = \mathfrak{h}$. Стало быть, $H' \cap (xH'x^{-1})$ открыто в H' (n° 2, теорема 3), и отображение $y \mapsto xyx^{-1}$ есть изоморфизм из $H' \cap x^{-1}H'x$ на $xH'x^{-1} \cap H'$.

Учитывая предложение 18 § 1, n° 9, мы видим, что существуют открытая подгрупускула Ли W в H' и структура группы Ли на H со следующими свойствами: W открыта в H, и структуры многообразия на H и H' индуцируют одинаковую структуру на W. Отсюда следует, что каноническая инъекция i из H в G есть иммерсия и что $L(i)(L(H)) = L(H') = \mathfrak{h}$. Кроме того, пусть V и f такие же, как в (i). Если $f\colon V \to H$ принадлежит классу C^r, то $i \circ f\colon V \to G$ принадлежит классу C^r. Предположим, что $i \circ f\colon V \to G$ принадлежит классу C^r, и докажем, что $f\colon V \to H$ принадлежит классу C^r. Поскольку можно сделать сдвиг, достаточно рассмотреть случай, когда существует такой элемент $v_0 \in V$, что $f(v_0) = e$, и доказать, что $f\colon V \to H$ принадлежит классу C^r в некоторой открытой окрестности элемента v_0. Но согласно лемме 4 (iii), $f(v) \in H'$ для v, достаточно близкого к v_0, откуда следует наше утверждение. Таким образом, (i) доказано, а (ii) было получено по ходу дела.

Определение 3. *Структура группы Ли на H, определенная в предложении* 9, *называется структурой, индуцированной на H структурой группы Ли на G.*

Если H есть подгруппа Ли в G, ее структура группы Ли индуцирована структурой группы Ли на G (*Мн. Св. рез.*, 5.8.5).

Если $G = \mathbf{R}$ и $H = \mathbf{Q}$, то $\mathfrak{h} = \{0\}$, а значит, структура, индуцированная на H, есть структура дискретной группы Ли. То же самое происходит, если $G = \mathbf{C}$ (рассматриваемая как комплексная группа Ли) и $H = \mathbf{R}$.

6. Первообразные для дифференциальных форм со значениями в алгебре Ли

Лемма 5. *Пусть X — многообразие класса C^r, F и F' — векторные расслоения класса C^r с базой X и φ — морфизм из F в F'. Для любого $x \in X$ пусть S_x — множество элементов*

$$(a, \varphi(a)) \in F_x \oplus F'_x,$$

где $a \in F_x$. Тогда объединение S множеств S_x есть векторное подрасслоение в $F \oplus F'$.

Пусть θ и θ' — отображения из $F \oplus F'$ в себя, определенные следующим образом: если $(u, v) \in F_x \oplus F'_x$, то

$$\theta(u, v) = (u, v + \varphi(u)), \quad \theta'(u, v) = (u, v - \varphi(u)).$$

Согласно *Мн. Св. рез.*, 7.7.1, θ и θ' суть морфизмы векторного расслоения $F \oplus F'$ в себя. Ясно, что $\theta \circ \theta' = \theta' \circ \theta = \mathrm{Id}_{F \oplus F'}$. Значит, θ и θ' — автоморфизмы расслоения $F \oplus F'$. Следовательно, $S = \theta(F \oplus \{0\})$ есть векторное подрасслоение в $F \oplus F'$.

Лемма 6. *Пусть G — групускула Ли, ω — каноническая левая дифференциальная форма на G* (§ 3, n° 18.9), *M — многообразие класса C^r $(r \geqslant 2)$, а α — дифференциальная форма класса C^{r-1} и степени 1 на M со значениями в $L(G)$.*

(i) *Элементы из $T(M \times G)$, на которых дифференциальная форма*

$$\theta = \mathrm{pr}_1^* \alpha - \mathrm{pr}_2^* \omega$$

обращается в нуль, образуют векторное подрасслоение S класса C^{r-1} в $T(M \times G)$.

(ii) *Для всякого $(x, g) \in M \times G$ отображение $T(\mathrm{pr}_1) \mid S_{(x, g)}$ есть изоморфизм из $S_{(x, g)}$ на $T_x(M)$.*

(iii) *Если $d\alpha + [\alpha]^2 = 0$* (см. § 3, n° 14), *то векторное подрасслоение S интегрируемо.*

Если $(x, g) \in M \times G$ и $(u, v) \in T_x(M) \times T_g(G)$, то

$$\theta_{(x, g)}(u, v) = \alpha(u) - g^{-1}v.$$

Следовательно, ядро отображения $\theta_{(x, g)}$ есть множество $S_{(x, g)}$ элементов $(u, g\alpha(u))$ для $u \in T_x(M)$, откуда вытекает (ii). Рассмотрим $T(M \times G)$ как прямую сумму двух векторных расслоений F и F' с $F_{(x, g)} = T_x(M) \times \{0\}$ и $F'_{(x, g)} = \{0\} \times T_g(G)$ для любого

$$(x, g) \in M \times G.$$

Для $u \in T_x(M) \times \{0\}$ положим $\varphi(u) = (0, g\alpha(u))$. Используя левую тривиализацию расслоения $T(G)$, видим, что φ есть морфизм из F в F', откуда следует (i) (лемма 5). Наконец, если $d\alpha + [\alpha]^2 = 0$, то

$$\begin{aligned} d\theta &= \mathrm{pr}_1^*(d\alpha) - \mathrm{pr}_2^*(d\omega) = \\ &= -\frac{1}{2}\left(\mathrm{pr}_1^* \alpha \wedge \mathrm{pr}_1^* \alpha - \mathrm{pr}_2^* \omega \wedge \mathrm{pr}_2^* \omega\right) = \\ &= -\frac{1}{2}\left(\mathrm{pr}_1^* \alpha - \mathrm{pr}_2^* \omega\right) \wedge \left(\mathrm{pr}_1^* \alpha + \mathrm{pr}_2^* \omega\right) = \\ &= -\frac{1}{2}\theta \wedge \left(\mathrm{pr}_1^* \alpha + \mathrm{pr}_2^* \omega\right), \end{aligned}$$

значит, S интегрируемо (*Мн. Св. рез.*, 9.3.6).

Теорема 5. *Пусть G — групускула Ли, M — многообразие класса C^r $(r \geqslant 2)$, α — дифференциальная форма класса C^{r-1} и степени 1 на M со значениями в $L(G)$, такая, что $d\alpha + [\alpha]^2 = 0$. Для всякого $x \in M$ и всякого $g \in G$ существует отображение f со значениями в G, определенное и принадлежащее классу C^{r-1} в некоторой открытой окрестности элемента x, такое, что*

$f(x)=g$ и $f^{-1}.df=\alpha$. Два отображения, удовлетворяющие этим условиям, совпадают в некоторой окрестности элемента x.

Пусть $x\in M$ и $g\in G$. Согласно лемме 6 (обозначения которой мы принимаем) и *Мн. Св. рез.*, 9.3.7, существуют открытая окрестность U элемента x в M и отображение $m\mapsto\varphi(m)=(m, f(m))$ класса C^{r-1} из U в $M\times G$, такое, что $f(x)=g$ и что $\varphi^*(\theta)=0$. Тогда

$$\begin{aligned} f^{-1}.df &= f^*(\omega) \quad (\S\ 3,\ \mathrm{n}^\circ\ 18.9) = \\ &= (\mathrm{pr}_2\circ\varphi)^*(\omega) \quad (\text{ибо } f=\mathrm{pr}_2\circ\varphi) = \\ &= \varphi^*\left(\mathrm{pr}_1^*\alpha-\theta\right) \quad (\text{лемма } 6) = \\ &= \varphi^*\left(\mathrm{pr}_1^*\alpha\right) \quad (\text{ибо } \varphi^*(\theta)=0) = \\ &= \alpha \quad (\text{ибо } \mathrm{pr}_1\circ\varphi=\mathrm{Id}_U). \end{aligned}$$

Пусть f' — отображение класса C^{r-1} из U в G, такое, что $f'(x)=g$ и $f'^{-1}.df'=\alpha$. В силу § 3, 18.9, ff'^{-1} локально постоянно, стало быть, $f'=f$ в некоторой окрестности элемента x.

Предложение 10. *Пусть M — аналитическое многообразие, $\mathfrak{g}$ — полная нормируемая алгебра Ли, α — дифференциальная форма степени 1, аналитическая на M, со значениями в $\mathfrak{g}$, имеющая следующие свойства:*

а) *для всякой точки $m\in M$ значение α_m есть изоморфизм из $T_m(M)$ на $\mathfrak{g}$;*

б) *$d\alpha+[\alpha]^2=0$.*

Тогда для всякой точки $m_0\in M$ существуют открытая окрестность M' точки m_0 в M и структура групускулы Ли на M', согласованная со структурой многообразия на M', с единичным элементом m_0, имеющая следующие свойства:

(i) *α_{m_0} есть изоморфизм из $L(M')$ на $\mathfrak{g}$;*

(ii) *дифференциальная форма $m\mapsto\alpha_{m_0}^{-1}\circ\alpha_m$ есть каноническая левая дифференциальная форма на M'.*

Если M'_1 и M'_2 суть две такие групускулы, то M'_1 и M'_2 обладают общей открытой подгрупускулой.

Существует такая групускула Ли G, что $L(G)=\mathfrak{g}$. Пусть $m_0\in M$. В силу теоремы 5, существуют открытая окрестность M' точки m_0 в M и аналитическое отображение f из M' в G, такое, что $f(m_0)=e$ и $f^{-1}.df=\alpha$. Тогда $T_{m_0}(f)=\alpha_{m_0}$ есть изоморфизм из $T_{m_0}(M)$ на $\mathfrak{g}$; значит, уменьшив M' и G, можно предположить, что f есть изоморфизм многообразия M' на многообразие G. Перенесем на M' структуру групускулы Ли на G посредством отображения f^{-1}. Тогда $T_{m_0}(f)$ становится изоморфизмом из $L(M')$ на $L(G)=\mathfrak{g}$, откуда следует (i). С другой стороны,

обозначив через ω каноническую левую дифференциальную форму на G, получаем

$$\alpha_{m_0}^{-1} \circ \alpha_m = (T_{m_0} f)^{-1} \circ \left(f^{-1} \cdot df\right)(m) = (T_{m_0} f)^{-1} \circ \omega\left(f(m)\right) \circ T_m f,$$

стало быть, $m \mapsto \alpha_{m_0}^{-1} \circ \alpha_m$ есть каноническая левая дифференциальная форма на M'.

Пусть M'' — открытая окрестность точки m_0, наделенная структурой групускулы Ли с единичным элементом m_0 и со свойствами, аналогичными свойствам (i) и (ii). Тогда α_{m_0} есть изоморфизм из $L(M')$ на $\mathfrak{g}$, а также из $L(M'')$ на $\mathfrak{g}$, а значит, $L(M') = L(M'')$. Следовательно, уменьшив M' и M'', можно предположить, что существует изоморфизм φ групускулы M' на групускулу M'' (n° 1, следствие 1 теоремы 1). Тогда $\varphi^{-1} \cdot d\varphi$ есть каноническая левая дифференциальная форма на M'. С другой стороны, пусть ψ — каноническая инъекция многообразия $M' \cap M''$ в групускулу Ли M''; ясно, что $\psi^{-1} \cdot d\psi$ есть ограничение на $M' \cap M''$ канонической левой дифференциальной формы на M''. Стало быть, $\left(\psi^{-1} \cdot d\psi\right)(m) = \alpha_{m_0}^{-1} \circ \alpha_m = \left(\varphi^{-1} \cdot d\varphi\right)(m)$. Следовательно, φ и ψ совпадают в некоторой окрестности точки m_0 (§ 3, 18.9). Это доказывает последнее утверждение предложения.

Следствие. *Пусть M — аналитическое многообразие конечной размерности n. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — аналитические формы степени 1 на M со скалярными значениями, линейно независимые в каждой точке из M и такие, что для всякого $k = 1, \ldots, n$ форма $d\omega_k$ есть линейная комбинация с постоянными коэффициентами форм $\omega_i \wedge \omega_j$. Тогда для всякой точки $m_0 \in M$ существуют ее открытая окрестность M' в M и структура групускулы Ли на M', согласованная со структурой многообразия на M', с единичным элементом m_0 и такая, что $\omega_1 | M', \ldots, \omega_n | M'$ образуют базис пространства скалярных левоинвариантных дифференциальных форм степени 1 на M'.*

Если M'_1 и M'_2 суть две такие групускулы, то M'_1 и M'_2 обладают общей открытой подгрупускулой.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — векторные поля на M, такие, что в каждой точке m из M векторы $(X_i)_m$ образуют базис в $T_m(M)$, дуальный к $((\omega_1)_m, \ldots, (\omega_n)_m)$. Эти поля аналитичны. Согласно условию, существуют такие $c_{ijk} \in K$ $(1 \leqslant i, j, k \leqslant n)$, что $c_{ijk} = -c_{jik}$ и что $d\omega_k = \sum_{i<j} c_{ijk} \omega_i \wedge \omega_j$. В силу *Мн. Св. рез.*, 8.5.7, формула (11), отсюда вытекает, что

$$\langle [X_i, X_j], \omega_k \rangle = -(d\omega_k)(X_i, X_j) =$$
$$= -\Big(\sum_{r<s} c_{rsk} \omega_r \wedge \omega_s\Big)(X_i, X_j) = -c_{ijk},$$

значит, $[X_i, X_j] = -\sum_k c_{ijk} X_k$. Следовательно, элементы $-c_{ijk}$ суть структурные константы некоторой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$. Для всякой точки $m \in M$ пусть α_m — линейное отображение из $T_m(M)$ в $\mathfrak{g}$, преобразующее $(X_1)_m$ в $e_1, \ldots, (X_n)_m$ в e_n. Тогда α есть аналитическая дифференциальная форма степени 1 на M со значениями в $\mathfrak{g}$, и α_m есть изоморфизм из $T_m(M)$ на $\mathfrak{g}$. С другой стороны, $\alpha = \sum_{k=1}^{n} \omega_k e_k$, следовательно,

$$d\alpha = \sum_{k=1}^{n} (d\omega_k)\, e_k = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{i<j} c_{ijk}\omega_i \wedge \omega_j\Big) e_k$$

и

$$\begin{aligned}
[\alpha]^2 &= \sum_{k=1}^{n} [\omega_k e_k]^2 + \sum_{i<j} (\omega_i e_i) \wedge (\omega_j e_j) \quad (\S\ 3,\ \text{формула } (30)) = \\
&= \sum_{i<j} (\omega_i \wedge \omega_j)\,[e_i, e_j] = \\
&= -\sum_{k=1}^{n} \sum_{i<j} (c_{ijk}\omega_i \wedge \omega_j)\, e_k = \\
&= -d\alpha.
\end{aligned} \tag{5}$$

Достаточно теперь применить предложение 10.

7. *Переход от законов инфинитезимального действия к законам действия*

Предложение 11. *Пусть G_1 и G_2 — групускулы Ли, X_1 и X_2 — многообразия класса C^r $(r \geqslant 2)$. Для $i = 1, 2$ пусть ψ_i — кусок закона левого действия класса C^r групускулы G_i на X_i, а D_i — ассоциированный закон инфинитезимального действия. Пусть μ: $G_1 \to G_2$ — морфизм, φ: $X_1 \to X_2$ — отображение класса C^r. Предполагается, что для всякого $a \in L(G)$ векторные поля $(D_1)_a$ и $(D_2)_{L(\mu)a}$ являются φ-связанными (Мн. Св. рез., 8.2.6). Тогда существует окрестность Ω множества $\{e\} \times X_1$ в $G_1 \times X_1$, такая, что $\varphi(\psi_1(g, x)) = \psi_2(\mu(g), \varphi(x))$ для всякого $(g, x) \in \Omega$.*

Пусть p_1: $G_1 \times X_2 \to G_1$, p_2: $G_1 \times X_2 \to X_2$ — канонические проекции. Для каждого $(g_1, x_2) \in G_1 \times X_2$ пусть f_{g_1, x_2} — отображение $ag_1 \mapsto (D_2)_{L(\mu)a}(x_2)$ из $T_{g_1}(G_1) = g_1 L(G_1)$ в $T_{x_2}(X_2)$. Отображения f_{g_1, x_2} определяют морфизм f из $p_1^* T(G_1)$ в $p_2^* T(X_2)$.

Пусть $x_0 \in X_1$. Существуют открытая окрестность G элемента e в G_1 и открытая окрестность X точки x_0 в X_1, такие, что $\psi_1(g, x)$ и $\psi_2(\mu(g), \varphi(x))$ определены при $(g, x) \in G \times X$.

Положим

$$\alpha(g, x) = \varphi(\psi_1(g, x)) \in X_2, \quad \beta(g, x) = \psi_2(\mu(g), \varphi(x)) \in X_2$$
$$\text{для } (g, x) \in G \times X.$$

Если G и X достаточно малы и $(a, g, x) \in L(G_1) \times G \times X$, то

$$\begin{aligned}(T\alpha)(ag, 0_x) &= (T\varphi)((D_1)_a(\psi_1(g, x))) = \\ &= (D_2)_{L(\mu)a}(\varphi(\psi_1(g, x))) = \\ &= (D_2)_{L(\mu)a}\alpha(g, x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(T\beta)(ag, 0_x) &= (T\psi_2)(L(\mu)a\cdot\mu(g), \varphi(x)) = \\ &= (D_2)_{L(\mu)a}(\psi_2(\mu(g), \varphi(x))) = \\ &= (D_2)_{L(\mu)a}\beta(g, x).\end{aligned}$$

Значит, для $x \in X$, морфизмы $g \mapsto \alpha(g, x)$ и $g \mapsto \beta(g, x)$ суть интегралы для f. Поскольку

$$\beta(e, x) = \varphi(x) = \alpha(e, x)$$

для всякого $x \in X$, из *Мн. Св. рез.*, 9.3.7, заключаем, что α и β совпадают в некоторой окрестности точки (e, x_0). Отсюда следует предложение.

Следствие. *Пусть G — групускула Ли, а X — многообразие класса C^r. Рассмотрим два куска законов левого действия класса C^r групускулы G на X. Предположим, что для всякого $a \in L(G)$ соответствующее векторное поле D_a на X одинаково для обоих кусков законов действия. Тогда оба эти куска законов действия совпадают в некоторой окрестности множества $\{e\} \times X$.*

Теорема 6. *Пусть G — групускула Ли, X — многообразие класса C^r $(r \geqslant 2)$ и x_0 — точка в X. Пусть $a \mapsto D_a$ — закон инфинитезимального левого действия класса C^{r-1} алгебры Ли $L(G)$ на X.*

(i) *Существуют открытая окрестность X' точки x_0 в X и кусок закона левого действия класса C^{r-1} групускулы G на X', такие, что ассоциированный закон инфинитезимального действия есть $a \mapsto D_a | X'$.*

(ii) *Пусть заданы два закона левого действия класса C^{r-1} групускулы G в открытой окрестности X'' точки x_0; если они допускают $a \mapsto D_a | X''$ как ассоциированный закон инфинитезимального действия, то они совпадают в некоторой окрестности точки (e, x_0).*

Утверждение (ii) вытекает из следствия предложения 11. Докажем (i). Для всякого $(g, x) \in G \times X$ и всякого $a \in L(G)$ положим

$$Q_a(g, x) = (ag, D_a(x)) \in T_g(G) \times T_x(X).$$

Пусть $S_{(g, x)}$ — множество элементов $Q_a(g, x)$ для $a \in L(G)$. Согласно лемме 5 из n° 6, множества $S_{(g, x)}$ суть слои векторного подрасслоения S в $T(G) \times T(X)$. Пусть a, b лежат в $L(G)$; имеем

$$\begin{aligned}[Q_a, Q_b](g, x) &= ([R_a, R_b](g), [D_a, D_b](x)) = \\ &= (-R_{[a, b]}(g), -D_{[a, b]}(x)) \quad (\S\ 3,\ 18.6) = \\ &= Q_{-[a, b]}(g, x),\end{aligned}$$

следовательно, S интегрируемо (*Мн. Св. рез.*, 9.3.3 (iv)).

В силу *Мн. Св. рез.*, 9.3.7, существуют открытая окрестность G_1 элемента e в G, открытая окрестность X_1 точки x_0 в X и отображение $(g, x) \mapsto gx$ класса C^{r-1} из $G_1 \times X_1$ в X, такие, что $ex = x$ для всякого $x \in X_1$ и

$$(ag)x = D_a(gx) \quad \text{при} \quad a \in L(G), \quad g \in G_1, \quad x \in X_1. \tag{6}$$

В частности,

$$ax = D_a(x). \tag{7}$$

Пусть G_2 — открытая окрестность элемента e в G_1 и X_2 — открытая окрестность точки x_0 в X_1, такие, что gg' определено и принадлежит окрестности G_1 для g, g' из G_2 и что gx определено и принадлежит окрестности X_1 для $(g, x) \in G_2 \times X_2$. Рассмотрим отображения α_1, α_2 из $G_2 \times (G_2 \times X_2)$ в X, определенные формулами

$$\alpha_1(g, (h, x)) = g(hx), \quad \alpha_2(g, (h, x)) = (gh)x.$$

Они принадлежат классу C^{r-1}. Имеем

$$\alpha_1(e, (h, x)) = hx = \alpha_2(e, (h, x)).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned}T(\alpha_1)(ag, 0_{(h, x)}) &= (ag)(hx) = \\ &= D_a(g(hx)) \qquad (\text{в силу (6)}) = \\ &= D_a(\alpha_1(g, (h, x))),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T(\alpha_2)(ag, 0_{(h, x)}) &= (agh)x = \\ &= D_a((gh)x) \qquad (\text{в силу (6)}) = \\ &= D_a(\alpha_2(g, (h, x))).\end{aligned}$$

В силу *Мн. Св. рез.*, 9.3.7, α_1 и α_2 совпадают в некоторой окрестности элемента $(e, (e, x_0))$. Коль скоро это установлено, (i) следует из (7) и из предложения 23 § 1, n° 11.

Следствие 1. *Пусть G — групускула Ли, а X — паракомпактное многообразие класса C^r $(r \geqslant 2)$. Пусть $a \mapsto D_a$ — закон инфинитезимального левого действия класса C^{r-1} алгебры Ли $L(G)$ на X.*

(i) *Существует кусок закона левого действия класса C^{r-1} групускулы G на X, такой, что ассоциированный закон инфинитезимального действия есть $a \mapsto D_a$.*

(ii) *Два закона левого действия класса C^{r-1} групускулы G на X, допускающие $a \mapsto D_a$ в качестве ассоциированного закона инфинитезимального действия, совпадают в некоторой окрестности множества $\{e\} \times X$.*

Утверждение (ii) вытекает из следствия предложения 11. Согласно теореме 6 (i), существуют открытое покрытие $(X_i)_{i \in I}$ пространства X и для всякого $i \in I$ кусок закона левого действия ψ_i класса C^{r-1} групускулы G на X_i, такие, что ассоциированный с ψ_i закон инфинитезимального действия есть $a \mapsto D_a | X_i$. Поскольку X паракомпактно, покрытие $(X_i)_{i \in I}$ можно предположить локально конечным. Для всякого $(i, j) \in I \times I$ и всякого $x \in X_i \cap X_j$ куски законов ψ_i и ψ_j совпадают в некоторой окрестности элемента (e, x) (следствие предложения 11). Поскольку X нормально, можно применить предложение 24 из § 1, n° 11, что доказывает (i).

Следствие 2. *Пусть X — паракомпактное многообразие класса C^r $(r \geqslant 2)$ и ξ — векторное поле класса C^{r-1}* на *X. Существует кусок закона действия ψ класса C^{r-1} группы K на X, такой, что для всякого $x \in X$ вектор $\xi(x)$ есть образ касательного к K вектора 1 в 0 относительно отображения $t \mapsto \psi(t, x)$. Два куска законов действия с таким свойством совпадают в некоторой окрестности множества $\{0\} \times X$.*

Это частный случай следствия 1.

Замечание. Разумеется, всюду в этом пункте можно заменить законы левого действия на законы правого действия.

§ 5. Формальные вычисления в группах Ли

Пусть f, g — два формальных ряда с коэффициентами в K от одних и тех же переменных; пусть f_i (соотв. g_i) — однородная компонента степени i ряда f (соотв. g). Мы будем писать

$$f \equiv g \bmod \deg p,$$

если $f_i = g_i$ для $i < p$.

В этом параграфе G означает групускулу Ли конечной размерности n; основное поле K предполагается имеющим харак-

теристику нуль. С помощью какой-либо карты некоторая окрестность элемента e в G раз и навсегда отождествляется с открытой окрестностью U элемента 0 в K^n, причем e отождествляется с 0. Для x, y из U и $m \in \mathbf{Z}$ через $x^{[m]}$ обозначается m-я степень элемента x в G, а через $x \cdot y$ — произведение элементов x и y (коль скоро они определены). Координаты элемента $x \in U$ обозначаются через $x_1, \ldots, x_n$.

1. Коэффициенты $c_{\alpha\beta\gamma}$

Пусть Ω — множество таких $(x, y) \in U \times U$, что $x . y$ определено и лежит в U. Тогда Ω открыто в $U \times U$ и отображение $(x, y) \mapsto x . y$ из Ω в U аналитично. Координаты $z_1, \ldots, z_n$ элемента $z = x . y$ допускают, стало быть, разложение в степенной ряд в начале координат по степеням переменных $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$. Следовательно, существуют однозначно определенные константы $c_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_n} \in K$, такие, что

$$z_1^{\gamma_1} \ldots z_n^{\gamma_n} =$$

$$= \sum_{\alpha_1, \ldots, \beta_n \in \mathbf{N}} c_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n, \gamma_1, \ldots, \gamma_n} x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} y_1^{\beta_1} \ldots y_n^{\beta_n} \tag{1}$$

для $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ из $\mathbf{N}$. Приняв соглашения *Мн. Св. рез.*, мы запишем эти формулы более кратко так:

$$(x . y)^\gamma = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbf{N}^n} c_{\alpha, \beta, \gamma} x^\alpha y^\beta \qquad (\gamma \in \mathbf{N}^n). \tag{2}$$

Поскольку $x . 0 = 0 . x = x$ для $x \in U$, то

$$c_{\alpha, 0, \gamma} = c_{0, \alpha, \gamma} = \delta_{\alpha\gamma}, \tag{3}$$

где $\delta_{\alpha\gamma}$ есть индекс Кронекера. В частности, условившись в дальнейшем писать k вместо ε_k для $k = 1, \ldots, n$, получаем

$$(x . y)_k = x_k + y_k + \sum_{|\alpha| \geqslant 1, \ |\beta| \geqslant 1} c_{\alpha, \beta, k} x^\alpha y^\beta. \tag{4}$$

Полагая $c_{\alpha\beta} = (c_{\alpha\beta 1}, c_{\alpha\beta 2}, \ldots, c_{\alpha\beta n}) \in K^n$, приходим, таким образом, к равенству

$$x . y = x + y + \sum_{|\alpha| \geqslant 1, \ |\beta| \geqslant 1} c_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta. \tag{5}$$

Рассмотрим однородную компоненту степени 2 выражения, стоящего в правой части формулы (5):

$$B(x, y) = \sum_{i, j=1}^{n} c_{ij} x_i y_j.$$

Таким образом, $(x, y) \longmapsto B(x, y)$ есть билинейное отображение из $K^n \times K^n$ в K^n. Имеем

$$x \cdot y \equiv x + y + B(x, y) \mod \deg 3. \tag{6}$$

Из формулы (4) вытекает, с другой стороны, что

$$c_{\alpha, \beta, \gamma} = 0, \quad \text{если } |\alpha| + |\beta| < |\gamma| \tag{7}$$

и что члены суммарной степени $|\gamma|$ в разложении для z^γ суть также члены выражения

$$(x_1 + y_1)^{\gamma_1} (x_2 + y_2)^{\gamma_2} \ldots (x_n + y_n)^{\gamma_n} = \sum_{\alpha+\beta=\gamma} ((\alpha, \beta))\, x^\alpha y^\beta$$

(см. *Мн. Св. рез.*, Обозначения и соглашения). Следовательно,

$$c_{\alpha, \beta, \gamma} = 0 \quad \text{если } |\alpha| + |\beta| = |\gamma|, \text{ но } \alpha + \beta \neq \gamma, \tag{8}$$

$$c_{\alpha, \beta, \alpha+\beta} = ((\alpha, \beta)). \tag{9}$$

Ассоциативность произведения влечет за собой соотношение

$$\sum_{\alpha, \xi} c_{\alpha\xi\eta} x^\alpha \Big(\sum_{\beta, \gamma} c_{\beta\gamma\xi} y^\beta z^\gamma \Big) = \sum_{\xi, \gamma} c_{\xi\gamma\eta} \Big(\sum_{\alpha, \beta} c_{\alpha\beta\xi} x^\alpha y^\beta \Big) z^\gamma$$

для любых x, y, z, достаточно близких к 0, откуда следует, что

$$\sum_\xi c_{\alpha\xi\eta} c_{\beta\gamma\xi} = \sum_\xi c_{\xi\gamma\eta} c_{\alpha\beta\xi} \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \eta \text{ лежат в } \mathbf{N}^n). \tag{10}$$

Групускула G обладает открытой коммутативной подгрупускулой тогда и только тогда, когда $c_{\alpha\beta\gamma} = c_{\beta\alpha\gamma}$, каковы бы ни были α, β, γ в $\mathbf{N}^n$.

2. *Операция коммутирования в алгебре Ли*

Для $\alpha \in \mathbf{N}^n$ пусть e_α — точечное распределение $\dfrac{1}{\alpha!} \dfrac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$ в начале координат. В частности, $e_k = e_{\varepsilon_k} = \dfrac{\partial}{\partial x_k}$. Элементы e_α образуют базис векторного пространства $U(G)$. Если f — аналитическая функция в открытой окрестности элемента 0 в G и если $f(x) = \sum_\alpha \lambda_\alpha x^\alpha$ — ее разложение в степенной ряд в начале координат, то

$$\langle e_\alpha, f \rangle = \lambda_\alpha.$$

В частности,

$$\langle e_\alpha, x^\gamma \rangle = \delta_{\alpha\gamma}.$$

Значит,

$$\langle e_\alpha * e_\beta,\ x^\gamma\rangle = \langle e_\alpha \otimes e_\beta,\quad (x\,.\,y)^\gamma\rangle =$$
$$= \Big\langle e_\alpha \otimes e_\beta,\ \sum_{\alpha',\,\beta'} c_{\alpha'\beta'\gamma} x^{\alpha'} y^{\beta'}\Big\rangle =$$
$$= \sum_{\alpha',\,\beta'} c_{\alpha'\beta'\gamma} \langle e_\alpha,\ x^{\alpha'}\rangle \langle e_\beta,\ y^{\beta'}\rangle = c_{\alpha\beta\gamma},$$

следовательно,

$$e_\alpha * e_\beta = \sum_\gamma c_{\alpha\beta\gamma} e_\gamma. \tag{11}$$

(Формула (10) выражает тогда ассоциативность алгебры $U(G)$.)

В частности, поскольку $L(G)$ устойчива относительно операции коммутирования

$$[e_i,\ e_j] = \sum_k (c_{ijk} - c_{jik})\, e_k. \tag{12}$$

Структурные константы алгебры Ли $L(G)$ в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$, таким образом, суть $c_{ijk} - c_{jik}$. Другими словами, канонически отождествив $L(G)$ с K^n, получаем

$$[x,\ y] = B(x,\ y) - B(y,\ x). \tag{13}$$

Предложение 1:

(i) $$x^{[-1]} \equiv -x + B(x,\ x) \bmod \deg 3,$$

(ii) $$x\,.\,y\,.\,x^{[-1]} \equiv y + [x,\ y] \bmod \deg 3,$$

(iii) $$y^{[-1]}\,.\,x\,.\,y \equiv x + [x,\ y] \bmod \deg 3,$$

(iv) $$x^{[-1]}\,.\,y^{[-1]}\,.\,x\,.\,y \equiv [x,\ y] \bmod \deg 3,$$

(v) $$x\,.\,y\,.\,x^{[-1]}\,.\,y^{[-1]} \equiv [x,\ y] \bmod \deg 3.$$

(В (i), разумеется, $x^{[-1]}$ представляет собой разложение в степенной ряд в начале координат отображения $x \longmapsto x^{[-1]}$; остальные формулы интерпретируются аналогично.)

Пусть g_1 и g_2 — однородные компоненты степеней 1 и 2 ряда $x^{[-1]}$. Тогда

$$0 = x\,.\,x^{[-1]} \equiv$$
$$\equiv x + g_1(x) + B(x,\ g_1(x)) \bmod \deg 2 \quad (\text{в силу } (6)) \equiv$$
$$\equiv x + g_1(x) \bmod \deg 2,$$

а значит, $g_1(x) = -x$. Далее,

$$0 = x\,.\,x^{[-1]} \equiv$$
$$\equiv x + (-x + g_2(x)) + B(x,\ -x + g_2(x)) \bmod \deg 3 \equiv$$
$$\equiv g_2(x) - B(x,\ x) \bmod \deg 3,$$

следовательно, $g_2(x) = B(x, x)$. Это доказывает (i). Пользуясь свойством (i), получаем

$$x \,.\, y \,.\, x^{[-1]} \equiv (x + y + B(x, y)) \,.\, (-x + B(x, x)) \bmod \deg 3 \equiv$$
$$\equiv x + y + B(x, y) + (-x + B(x, x)) + B(x + y, -x) \bmod \deg 3 \equiv$$
$$\equiv y + B(x, y) - B(y, x) \bmod \deg 3 \equiv$$
$$\equiv y + [x, y] \bmod \deg 3 \quad \text{(в силу (13))},$$

откуда следует (ii). Доказательство формулы (iii) аналогично. Комбинируя (i) и (iii), получаем

$$x^{[-1]} \,.\, y^{[-1]} \,.\, x \,.\, y \equiv (-x + B(x, x)) \,.\, (x + [x, y]) \bmod \deg 3 \equiv$$
$$\equiv -x + B(x, x) + x + [x, y] + B(-x, x) \bmod \deg 3 \equiv$$
$$\equiv [x, y] \bmod \deg 3,$$

откуда следует (iv). Доказательство формулы (v) аналогично.

3. *Степени*

Рассмотрим j точек в G

$$x(1) = (x(1)_1,\ x(1)_2,\ \ldots,\ x(1)_n),$$
$$x(2) = (x(2)_1,\ x(2)_2,\ \ldots,\ x(2)_n),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x(j) = (x(j)_1,\ x(j)_2,\ \ldots,\ x(j)_n).$$

Отображение $(x(1), x(2), \ldots, x(j)) \mapsto x(1) \,.\, x(2) \ldots x(j)$ допускает разложение в степенной ряд в начале координат:

$$x(1) \,.\, x(2) \,.\, \ldots \,.\, x(j) = \sum_{\alpha(1),\, \alpha(2),\, \ldots,\, \alpha(j) \in \mathbf{N}^n} a_{\alpha(1), \ldots, \alpha(j)}\, x(1)^{\alpha(1)} \ldots x(j)^{\alpha(j)}, \tag{14}$$

где $a_{\alpha(1), \ldots, \alpha(j)}$ суть элементы из K^n. Положим для $j = 0, 1, 2, \ldots$

$$\psi_j(x) = \sum_{\alpha(1) \neq 0,\, \ldots,\, \alpha(j) \neq 0} a_{\alpha(1), \ldots, \alpha(j)}\, x^{\alpha(1) + \ldots + \alpha(j)}; \tag{15}$$

правая часть есть сходящийся степенной ряд от переменного $x \in K^n$. Этот ряд получится, если изъять из (14) члены, в которых не присутствует явно одно из переменных $x(1), \ldots, x(j)$, а потом положить $x(1) = x(2) = \ldots = x(j) = x$.

Если $t \in K$, все отображения степени t группы G имеют одно и то же разложение в степенной ряд в начале координат, поскольку произвольные два из них совпадают в некоторой окрестности точки 0. Мы обозначим через $x^{[t]}$ это разложение в степенной ряд.

Предложение 2. (i) *Имеем* $\psi_j \equiv 0 \bmod \deg j$.

(ii) *Если* $t \in K$, *то*

$$x^{[t]} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{t}{i} \psi_i(x), \tag{16}$$

где формальный ряд справа приобретает смысл благодаря (i). $\left(\textit{Мы полагаем } \binom{t}{i} = \frac{t(t-1)\ldots(t-i+1)}{i!} \textit{ для всякого } t \in K.\right)$

Утверждение (i) очевидно по определению рядов ψ_j.

Докажем (ii) для целого $t \geqslant 0$. В силу (14)

$$x^{[t]} = \sum_{\alpha(1), \ldots, \alpha(t) \in \mathbf{N}^n} a_{\alpha(1), \ldots, \alpha(t)} x^{\alpha(1) + \ldots + \alpha(t)}. \tag{17}$$

Для $\alpha = (\alpha(1), \ldots, \alpha(t)) \in (\mathbf{N}^n)^t$ обозначим через $\sigma(\alpha)$ множество чисел $j \in \{1, \ldots, t\}$, таких, что $\alpha(j) \neq 0$. Если в сумме (17) сгруппировать члены с одним и тем же $\sigma(\alpha)$, получится

$$x^{[t]} = \sum_{\sigma \subset [1, t]} h_{t, \sigma}(x), \tag{18}$$

где

$$h_{t, \sigma}(x) = \sum_{\sigma(\alpha) = \sigma} a_{\alpha(1), \ldots, \alpha(t)} x^{\alpha(1) + \ldots + \alpha(t)}. \tag{19}$$

Положим $\sigma = \{j_1, j_2, \ldots, j_q\}$ с $j_1 < j_2 < \ldots < j_q$. В (14) (где j заменено на t) подставим 0 на место $x(k)$ для $k \notin \sigma$; поскольку 0 есть единичный элемент в G, получаем разложение в степенной ряд в начале координат произведения $x(j_1) \cdot x(j_2) \cdot \ldots \cdot x(j_q)$:

$$x(j_1) \cdot x(j_2) \cdot \ldots \cdot x(j_q) = \sum_{\sigma(\alpha) \subset \sigma} a_{\alpha(1), \ldots, \alpha(t)} x(j_1)^{\alpha(j_1)} x(j_2)^{\alpha(j_2)} \ldots x(j_q)^{\alpha(j_q)},$$

стало быть, приняв во внимание определение ряда ψ_q, получаем

$$\psi_q(x) = \sum_{\sigma(\alpha) = \sigma} a_{\alpha(1), \ldots, \alpha(t)} x^{\alpha(j_1) + \ldots + \alpha(j_q)}. \tag{20}$$

В силу (19) и (20) видно, что $h_{t, \sigma}(x) = \psi_{\mathrm{Card}\, \sigma}(x)$. Тогда (18) влечет за собой равенства

$$x^{[t]} = \sum_{i=0}^{t} \binom{t}{i} \psi_i(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{t}{i} \psi_i(x).$$

Установив это, положим $x^{[t]'} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \binom{t}{i} \psi_i(x)$ для всякого $t \in K$.

В степенных рядах $x^{[t]}$ и $x^{[t]'}$ каждый коэффициент есть поли-

номиальная функция от t. В самом деле, это очевидно для $x^{[t]'}$. Что касается ряда $x^{[t]}$, достаточно доказать, что для всякого $u \in U(G)$ образ элемента u относительно $x \longmapsto x^{[t]}$ есть полиномиальная функция от t. Но для $u \in U^m(G)$ этот образ равен $t^m u$ (§ 4, n° 3, предложение 7 (iv)).

Поскольку $x^{[t]} = x^{[t]'}$ для целого $t \geqslant 0$, заключаем отсюда, что $x^{[t]} = x^{[t]'}$ для всякого $t \in K$.

Замечания. 1) Выпишем условие (ii) предложения 2 для целого числа $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \psi_0(x), \\ x &= \psi_0(x) + \psi_1(x), \\ x^{[2]} &= \psi_0(x) + 2\psi_1(x) + \psi_2(x), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Этих формул достаточно для определения рядов ψ_i.

2) Ясно, что $\psi_0(x) = 0$, $\psi_1(x) = x$, $\psi_2(x) = x^{[2]} - 2x$,

$$x^{[-1]} = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \psi_i(x).$$

3) Предыдущие выражения для ряда ψ_2 и формула (6) доказывают, что

$$\psi_2(x) \equiv B(x, x) \bmod \deg 3. \tag{21}$$

Учитывая предложение 2 (i) и (ii), видим, что

$$x^{[t]} \equiv tx + \binom{t}{2} B(x, x) \bmod \deg 3. \tag{22}$$

4) Обозначим через $\psi_{p,m}(x)$ и $h_{t,m}(x)$ однородные компоненты степени m рядов $\psi_p(x)$ и $x^{[t]}$. Имеем $\psi_{p,m} = 0$ для $m < p$. С другой стороны, предложение 2 (ii) дает

$$h_{t,m}(x) = \sum_{p \leqslant m} \frac{t(t-1)\dots(t-p+1)}{p!} \psi_{p,m}(x), \tag{23}$$

т. е.

$$h_{t,m}(x) = \sum_{1 \leqslant r \leqslant m} t^r \varphi_{r,m}(x), \tag{24}$$

где $\varphi_{r,m}$ — однородные полиномиальные отображения степени m из K^n в K^n. В частности, в силу (23)

$$\varphi_{1,m}(x) = \sum_{p \leqslant m} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \psi_{p,m}(x), \tag{25}$$

$$\varphi_{m,m}(x) = \frac{1}{m!} \psi_{m,m}(x). \tag{26}$$

5) Если K имеет характеристику > 0, результаты n°n° 1 и 2 остаются справедливыми при том условии, что в n° 2 элемент e_α определяется формулой $\left\langle e_\alpha, \sum_\beta \lambda_\beta x^\beta \right\rangle = \lambda_\alpha$. В n° 3, если определить ряды ψ_i как выше, наше рассуждение показывает, что $x^{[t]} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{t}{i} \psi_i(x)$ для $t \in \mathbf{N}$.

4. *Экспоненциальное отображение*

Пусть $E(x)$ — разложение в степенной ряд в 0 некоторого экспоненциального отображения для G. Пусть $L(x)$ — разложение в степенной ряд в 0 отображения, обратного к некоторому инъективному экспоненциальному отображению для G. Поскольку касательное отображение в 0 ко всякому экспоненциальному отображению есть тождественное отображение в $L(G)$, то $E(x) \equiv x \bmod \deg 2$ и $L(x) \equiv x \bmod \deg 2$. Поскольку $E(L(x)) = L(E(x))$ для любого x, достаточно близкого к 0, формальные ряды E и L таковы, что $E(L(X)) = L(E(X)) = X$. Аналогичное рассуждение показывает, что $E(tX) = (E(X))^{[t]}$, $L\left(X^{[t]}\right) = tL(X)$ для $t \in K$.

Предложение 3. *Справедливы формулы*

$$L = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \psi_p, \tag{27}$$

$$E = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \psi_{p,p} \tag{28}$$

(*напомним, что* $\psi_{p,p}$ — *однородная компонента степени* p *ряда* ψ_p).

Имеем

$$E(tx) = (E(x))^{[t]},$$

где, согласно (24),

$$E(tx) = \sum_{m \geqslant 0} \sum_{1 \leqslant r \leqslant m} t^r \varphi_{r,m}(E(x)).$$

Обе части равенства являются формальными рядами от t и x. Приравняем члены первой степени по t. Получается

$$x = \sum_{m \geqslant 0} \varphi_{1,m}(E(x)). \tag{29}$$

Но обращение системы формальных рядов, в случае если оно возможно, единственно (*Alg.*, chap. IV, § 6, corollaire de la

proposition 8). Тогда

$$L(x) = \sum_{m \geqslant 0} \varphi_{1,m}(x) \qquad \text{(в силу (29))} =$$
$$= \sum_{p,m} \frac{(-1)^p}{p} \psi_{p,m}(x) \qquad \text{(в силу (25))} =$$
$$= \sum_{p} \frac{(-1)^p}{p} \psi_p(x),$$

откуда следует (i). Аналогично, при $t \neq 0$

$$L(tx) = tL\left((tx)^{[t^{-1}]}\right) =$$
$$= tL\Big(\sum_{m \geqslant 0}\sum_{1 \leqslant r \leqslant m} t^{m-r}\varphi_{r,m}(x)\Big) \qquad \text{(в силу (24))}.$$

Сравним члены первой степени по t. Получим

$$x = L\Big(\sum_{m \geqslant 0} \varphi_{m,m}(x)\Big),$$

откуда

$$E(x) = \sum_{m \geqslant 0} \varphi_{m,m}(x) =$$
$$= \sum_{m \geqslant 0} \frac{1}{m!} \psi_{m,m}(x) \qquad \text{(в силу (26))}.$$

Предложение 4. *Для того чтобы используемая в вычислениях этого параграфа карта на G была канонической, необходимо и достаточно, чтобы $\psi_j = 0$ для $j \geqslant 2$.*

Достаточность следует из предложения 3. Предположим, что карта каноническая и что $\psi_i = 0$ при $2 \leqslant i < n$. Тогда $nx = x^{[n]} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \psi_i(x) = nx + \psi_n(x)$, откуда $\psi_n = 0$. Таким образом, индукцией по j получаем, что $\varphi_j = 0$ для $j \geqslant 2$.

§ 6. Вещественные или комплексные группы Ли

В этом параграфе предполагается, что K равно $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$.

1. Переход от морфизмов алгебр Ли к морфизмам групп Ли

Лемма 1. *Пусть G — односвязная*[1]) *топологическая группа, W — открытая связная симметричная окрестность элемента e,*

---

[1]) См. гл. XI *Top. gén.* В этой главе доказано, что если G_1 и G_2 — связные топологические группы, φ — открытый непрерывный гомоморфизм из G_1 на G_2 с дискретным ядром и G_2 односвязна, то φ является гомеоморфизмом. Напомним, с другой стороны, что односвязное пространство связно.

H — некоторая группа, f — отображение из W^3 в H, такое, что
$$f(xyz) = f(x)\,f(y)\,f(z)$$
для x, y, z из W. Существует такой морфизм f' из G в H, что $f' \mid W = f \mid W$.

Для $(g, h) \in G \times H$ и открытой окрестности U элемента e в W пусть $A(g, h, U)$ — множество элементов $(gu, hf(u)) \in G \times H$, где $u \in U$. Имеем $(g, h) \in A(g, h, U)$ и $A(g, h, U_1) \cap A(g, h, U_2) = A(g, h, U_1 \cap U_2)$. Пусть $(s, t) \in A(g, h, U)$; тогда $s = gu$ и $t = hf(u)$ для некоторого $u \in U$; существует открытая окрестность U' элемента e в W, такая, что $uU' \subset U$; при этом для $u' \in U'$
$$(su', tf(u')) = (guu', hf(uu')) \in A(g, h, U),$$
значит, $A(s, t, U') \subset A(g, h, U)$. Отсюда следует, что множества $A(g, h, U)$ образуют базис топологии на $G \times H$. Мы обозначим через Y множество $G \times H$, наделенное этой топологией, и обозначим через p каноническую проекцию из Y на G, которая является открытым отображением. Ограничение проекции p на $A(g, h, U)$ есть гомеоморфизм из $A(g, h, U)$ на gU. Следовательно, (Y, p) есть накрытие пространства G. Пусть Y_0 — подгруппа в Y, порожденная множеством $A(e, e, W)$, и пусть $\mathfrak{B}$ — множество окрестностей $A(e, e, U)$. Ясно, что $\mathfrak{B}$ удовлетворяет условиям $(\mathrm{GV}'_{\mathrm{I}})$ и $(\mathrm{GV}'_{\mathrm{II}})$ из *Общ. топ.*, 1969, гл. III, § 1, n° 2. Множество Y'_0 таких $y \in Y_0$, что отображения $z \mapsto yzy^{-1}$ и $z \mapsto y^{-1}zy$ из Y_0 в Y_0 непрерывны в (e, e), есть подгруппа в Y_0. Пусть $w \in W$. Отображение $w' \mapsto ww'w^{-1}$ из W в G непрерывно, значит, отображение $(w', f(w')) \mapsto (ww'w^{-1}, f(ww'w^{-1}))$ из $A(e, e, W)$ в Y непрерывно в (e, e). Но $f(ww'w^{-1}) = f(w)\,f(w')\,f(w^{-1})$ и, следовательно,
$$(ww'w^{-1}, f(ww'w^{-1})) = (w, f(w))\,(w', f(w'))\,(w, f(w))^{-1}.$$
Поскольку $w^{-1} \in W$, видим, что $(w, f(w)) \in Y'_0$. Таким образом, $A(e, e, W) \subset Y'_0$, так что $Y'_0 = Y_0$. Группа Y_0, наделенная базисом фильтра $\mathfrak{B}$, удовлетворяет, следовательно, условию $(\mathrm{GV}'_{\mathrm{III}})$ из *Общ. топ.*, 1969, гл. III, § 1, n° 2. Поскольку $(g, h) \cdot A(e, e, U) = A(g, h, U)$, Y_0 есть топологическая группа, связная, поскольку $A(e, e, W)$ связно. Тогда $p(Y_0)$ есть открытая подгруппа в G, откуда $p(Y_0) = G$, поскольку G связна. Ядро гоморфизма $p \mid Y_0$ дискретно. Поскольку G односвязна, $p \mid Y_0$ есть гомеоморфизм из Y_0 на G. Следовательно, Y_0 — график морфизма f' из G в H. Для $g \in W$ имеем $(g, f(g)) \in A(e, e, W) \subset Y_0$, откуда $f(g) = f'(g)$.

Теорема 1. *Пусть G и H — группы Ли, h — непрерывный морфизм из $L(G)$ в $L(H)$. Предполагается, что G односвязна.*

Тогда существует один и только один морфизм φ групп Ли из G в H, такой, что $h = L(\varphi)$.

Существование морфизма φ следует из леммы 1 и из § 4, n° 1, теорема 1 (i). Единственность морфизма φ следует из § 4, n° 1, теорема 1 (ii), и связности группы G.

Следствие. *Пусть G — односвязная конечномерная группа Ли. Существует конечномерное линейное аналитическое представление группы G, ядро которого дискретно.*

Существуют (гл. I, § 7, теорема 2) конечномерное векторное пространство E и инъективный морфизм h из $L(G)$ в алгебру Ли End (E). Согласно теореме 1, существует морфизм φ из G в $\mathbf{GL}(E)$, такой, что $L(\varphi) = h$. Значит, φ есть иммерсия, и, следовательно, его ядро дискретно.

Замечания. 1) Существуют односвязные конечномерные группы Ли, у которых нет инъективных аналитических линейных представлений конечной размерности (упражнение 2).

2) Существует связная конечномерная группа Ли G, такая, что всякое ее линейное аналитическое представление конечной размерности имеет недискретное ядро (упражнения 3 и 4).

2. Интегральные подгруппы

Определение 1. *Пусть G — группа Ли. Интегральной подгруппой в G называется подгруппа H, наделенная такой структурой связной группы Ли, что каноническая инъекция из H в G есть иммерсия.*

Однопараметрической подгруппой в G называется интегральная подгруппа размерности 1.

Пусть H — интегральная подгруппа в G, i — каноническая инъекция из H в G. Тогда $L(i)$ определяет изоморфизм из $L(H)$ на некоторую подалгебру Ли в $L(G)$, допускающую топологическое дополнение. Мы отождествляем $L(H)$ с ее образом относительно $L(i)$.

Примеры. 1) Связная подгруппа Ли в G есть интегральная подгруппа в G.

2) Предположим, что G конечномерна. Пусть H — подгруппа в G; наделим ее структурой, индуцированной структурой группы Ли на G (§ 4, n° 5, определение 3). Тогда ее связная компонента единицы H_0 является интегральной подгруппой в G, и касательная подалгебра в e к H есть $L(H_0)$ (§ 4, n° 5, предложение 9 (ii)).

3) Пусть G — комплексная группа Ли, H — интегральная подгруппа в G, G_1 (соотв. H_1) — вещественная группа Ли, ле-

жащая ниже G (соотв. H). Тогда H_1 — интегральная подгруппа в G_1 и $L(H_1)$ — вещественная алгебра Ли, лежащая ниже $L(H)$.

Теорема 2. *Пусть G — группа Ли.*

(i) *Отображение $H \mapsto L(H)$ является биекцией множества интегральных подгрупп в G на множество подалгебр Ли в $L(G)$, допускающих топологическое дополнение.*

(ii) *Пусть H — интегральная подгруппа в G. Тогда всякая связная подгрупускула Ли в G с алгеброй Ли $L(H)$ является открытым подмногообразием в H, порождающим H.*

а) Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра Ли в $L(G)$, допускающая топологическое дополнение. Пусть H_1 — подгрупускула Ли в G, такая, что $L(H_1) = \mathfrak{h}$ (§ 4, теорема 3). Можно выбрать H_1 так, что она будет связной. Пусть H — подгруппа в G, порожденная множеством H_1. Существует (§ 1, следствие предложения 22) такая структура группы Ли на H, что H_1 — открытое подмногообразие в H и каноническая инъекция из H в G является иммерсией. Поскольку H_1 связна, H связна и, стало быть, есть интегральная подгруппа в G. Имеем $L(H) = L(H_1) = \mathfrak{h}$. Это доказывает, что отображение, рассматриваемое в (i), сюръективно.

б) Пусть H — интегральная подгруппа в G и N_1 — связная подгрупускула Ли в G с алгеброй Ли $L(H)$. Поскольку каноническая инъекция из H в G есть иммерсия, существует открытая подгрупускула H_1 в H, которая является в то же время подмногообразием в G и потому подгрупускулой Ли в G с алгеброй Ли $L(H)$. С другой стороны, пусть N — подгруппа в G, порожденная множеством N_1; согласно части а) доказательства, она наделена структурой интегральной подгруппы в G, такой, что N_1 есть открытое подмногообразие в N. В силу теоремы 3 § 4 $H_1 \cap N_1$ открыто в H_1 и в N_1. Стало быть, подгруппа в G, порожденная множеством $H_1 \cap N_1$, равна, с одной стороны, подгруппе H, а с другой стороны, подгруппе N. Следовательно, группы Ли H и N совпадают. Это доказывает (ii), а также что отображение, рассматриваемое в (i), инъективно.

Замечание 1. Пусть H — интегральная подгруппа в G. Пусть Y — левое слоение на G, ассоциированное с $L(H)$. Если $g \in G$, наделим gH структурой многообразия, получающейся переносом соответствующей структуры на H с помощью $\gamma(g)$. В силу *Мн. Св. рез.*, 9.3.2, каноническая инъекция из gH в Y есть морфизм. Этот морфизм этален. Стало быть, максимальные связные листы слоения Y суть левые классы смежности по H.

Предложение 1. *Пусть G и M — группы Ли, H — интегральная подгруппа в G, φ — морфизм из M в G, такой, что $L(\varphi)(L(M)) \subset \subset L(H)$. Предположим, что M связна. Тогда $\varphi(M) \subset H$ и φ,*

рассматриваемое как отображение из M в H, есть морфизм групп Ли.

В самом деле, если принять обозначения *замечания* 1, то φ есть морфизм из M в Y (*Мн. Св. рез.*, 9.3.2), и, стало быть, $\varphi(M) \subset H$, поскольку M связна.

Следствие 1. *Пусть G и H — группы Ли, φ — морфизм групп Ли из G в H, N — ядро морфизма φ и $h = L(\varphi)$. Предположим, что G связна и H конечномерна.*

(i) *N есть подгруппа Ли в G, и $L(N) = \operatorname{Ker} h$.*

(ii) *Пусть H' — интегральная подгруппа в H с алгеброй Ли $\operatorname{Im} h$. Тогда $\varphi(G) = H'$.*

(iii) *Отображение из G/N в H', полученное из φ переходом к фактору, есть изоморфизм групп Ли.*

Утверждение (i) уже было доказано (§ 3, n° 8, предложение 28).

Пусть ψ — морфизм групп Ли из G/N в H, полученный из φ переходом к фактору; это иммерсия (§ 3, n° 8, предложение 28). Согласно предложению 1, ψ является морфизмом групп Ли из G/N в H'. Этот морфизм этален и, стало быть, $\psi(G/N) = H'$, поскольку H' связна; это доказывает (ii). Тогда морфизм ψ: $G/N \to H'$ биективен и является изоморфизмом групп Ли, что доказывает утверждение (iii).

Следствие 2. *Пусть G — группа Ли, H_1 и H_2 — интегральные подгруппы в G. Если $L(H_2) \subset L(H_1)$, то H_2 есть интегральная подгруппа в H_1.*

Пусть i_1: $H_1 \to G$, i_2: $H_2 \to G$ — канонические инъекции. Тогда

$$L(i_2)(L(H_2)) = L(H_2) \subset L(H_1).$$

В силу предложения 1 i_2 есть аналитическое отображение из H_2 в H_1 и даже иммерсия из H_2 в H_1, поскольку $L(i_2)$ является изоморфизмом из $L(H_2)$ на подалгебру в $L(H_1)$, допускающую топологическое дополнение.

Следствие 3. *Пусть G — конечномерная группа Ли, $(H_i)_{i \in I}$ — семейство подгрупп Ли в G. Тогда $H = \bigcap_{i \in I} H_i$ есть подгруппа Ли в G и*

$$L(H) = \bigcap_{i \in I} L(H_i).$$

Существует конечное множество J в I, такое, что $\bigcap_{i \in J} L(H_i)$ равно пересечению M всех $L(H_i)$. Мы знаем, что $H^* = \bigcap_{i \in J} H_i$ есть подгруппа Ли, такая, что $L(H^*) = M$ (§ 3, n° 8, следствие 2 предложения 29). Пусть H_0 — компонента единицы в H^*. Это подгруппа Ли в G и $L(H_0) = M$. В силу следствия 2 имеем

$H_0 \subset H_i$ для всякого i, а потому $H_0 \subset H \subset H^*$, что доказывает следствие.

Следствие 4. *Пусть G — связная конечномерная группа Ли. Следующие условия эквивалентны*:

(i) *G унимодулярна* (*Интегр.*, гл. VII, § 1, n° 3, определение 3);

(ii) $\det \operatorname{Ad} g = 1$ *для всякого* $g \in G$;

(iii) $\operatorname{Tr} \operatorname{ad} a = 0$ *для всякого* $a \in L(G)$.

Отображение $g \mapsto \det \operatorname{Ad} g$ есть морфизм φ группы G в K^*. Согласно § 3, предложения 35 (n° 10) и 44 (n° 12), имеем $L(\varphi)\, a = \operatorname{Tr} \operatorname{ad} a$ для всякого $a \in L(G)$. Ясно, что $\operatorname{Im} L(\varphi) = \{0\}$ или K. В первом (соотв. втором) случае имеем $\operatorname{Im} \varphi = \{1\}$ (соотв. $\operatorname{Im} \varphi = K^*$) в силу следствия 1, а значит, G унимодулярна (соотв. не унимодулярна) в силу следствия предложения 55, § 3, n° 16.

Предложение 2. *Пусть G — конечномерная группа Ли, H — интегральная подгруппа в G. Следующие условия эквивалентны*:

(i) *H замкнута*;

(ii) *топология на H индуцирована топологией на G*;

(iii) *H есть подгруппа Ли в G*.

Импликация (i)$\Rightarrow$(iii) следует из § 1, предложение 2 (iv) (n° 1) и предложение 14 (iii) (n° 7).

Импликация (iii)$\Rightarrow$(ii) очевидна.

Докажем, что (ii)$\Rightarrow$(i); если топология на H индуцирована топологией на G, то H замкнута, поскольку H полна (§ 1, n° 1, предложение 1).

Предложение 3. *Пусть G — группа Ли, H — интегральная подгруппа в G, M — связное непустое аналитическое многообразие, f — отображение из M в G и $r \in N_K$. Рассмотрим следующие условия*:

(i) *f принадлежит классу C^r и $f(M) \subset H$*;

(ii) *$f(M) \subset H$ и f, рассматриваемое как отображение из M в H, принадлежит классу C^r*;

(iii) *f принадлежит классу C^r, $f(M)$ пересекается с H и образ пространства $T_m(M)$ содержится в $f(m) \,.\, L(H)$ для всякого $m \in M$*.

Тогда (ii)$\Leftrightarrow$(iii)$\Rightarrow$(i). *Если топология на H допускает счетный базис, то все три условия эквивалентны.*

Импликации (ii)$\Rightarrow$(i) и (ii)$\Rightarrow$(iii) очевидны.

Докажем, что (iii)$\Rightarrow$(ii); будем считать условие (iii) выполненным. В силу *Мн. Св. рез.*, 9.2.8, f есть морфизм класса C^r в левое слоение, ассоциированное с $L(H)$. Поскольку M связно, $f(M) \subset H$.

Если топология на H допускает счетный базис, то из условия (i) следует, что f — отображение класса C^r из M в H (*Мн. Св. рез.*, 9.2.8); стало быть, (i)$\Rightarrow$(ii).

Следствие 1. *Пусть G — конечномерная группа Ли, H — интегральная подгруппа в G. Тогда касательная подалгебра Ли в e к H* (§ 4, n° 5, определения 2 и 3) *есть $L(H)$, и структура группы Ли на H является структурой, индуцированной соответствующей структурой на G.*

В самом деле, поскольку H связна и конечномерна, ее топология допускает счетный базис.

Следствие 2. *Пусть G — группа Ли, H_1 и H_2 — интегральные подгруппы в G. Предположим, что топология на H_1 допускает счетный базис. Тогда*

$$H_2 \subset H_1 \Leftrightarrow L(H_2) \subset L(H_1),$$

и если эти условия выполнены, то H_2 является интегральной подгруппой в H_1.

Последнее утверждение и импликация $L(H_2) \subset L(H_1) \Rightarrow H_2 \subset H_1$ вытекают из следствия 2 предложения 1. Обратная импликация следует из предложения 3.

Следствие 3. *Пусть G — группа Ли, H_1 и H_2 — интегральные подгруппы в G, топология которых допускает счетный базис. Если H_1 и H_2 имеют одинаковые нижележащие множества, то структуры групп Ли на H_1 и H_2 одинаковы.*

Это вытекает из следствия 2.

Замечание 2. Пусть G — конечномерная группа Ли и H — подгруппа в G. Допуская вольность речи, будем говорить, что H есть интегральная подгруппа в G, если существует структура S группы Ли на H, такая, что H, наделенная структурой S, является интегральной подгруппой в G. В силу следствия 3 предложения 3, если S существует, то она единственна.

Замечание 3. Пусть V — многообразие класса C^r, M — подмножество в V и x и y — элементы из M. Рассмотрим следующее свойство:

$P_{M,x,y}$: существуют I, x_0, x_1, $\ldots$, x_n, f_1, $\ldots$, f_n, такие, что: а) I есть открытое связное множество в K; б) x_0, $\ldots$, x_n лежат в M, $x_0 = x$, $x_n = y$; в) f_i для $1 \leqslant i \leqslant n$ является отображением класса C^r из I в V, образ которого содержит x_{i-1} и x_i, причем $f_i(I) \subset M$.

Будем говорить, что M есть *C^r-связное* множество в V, если, каковы бы ни были элементы x, y в M, выполняется условие $P_{M,x,y}$.

Предложение 4. *Пусть G — конечномерная группа Ли, H — подгруппа в G и $r \in N_K$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *H есть интегральная подгруппа в G;*

(ii) *H, наделенная структурой группы Ли, индуцированной структурой на G, связна;*

(iii) *H является C^r-связной.*

(ii) $\Rightarrow$ (i). Очевидно.

(i) $\Rightarrow$ (iii). Предположим, что H наделена структурой группы Ли, такой, что H — интегральная подгруппа в G. Используем обозначения *замечания* 3. Множество таких $y \in H$, что свойство $P_{H,e,y}$ выполнено, является открытой подгруппой в H. Поскольку H связна, эта подгруппа равна H, и, стало быть, условие (iii) выполнено.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Будем считать условие (iii) выполненным и наделим H структурой, индуцированной структурой группы Ли на G. Пусть $\mathfrak{h}$ — касательная подалгебра к H в e. Компонента единицы H_0 группы H есть интегральная подгруппа в G, такая, что $L(H_0) = \mathfrak{h}$. Покажем, что $H = H_0$. Достаточно доказать следующее: пусть I — открытое связное множество в K, f — отображение класса C^r из I в G, такое, что $f(I) \subset H$, λ и μ — две точки из I; тогда если $f(\lambda) \in H_0$, то $f(\mu) \in H_0$. Но для всякого $\nu \in I$ имеем $(T_\nu f)(K) \subset f(\nu)\mathfrak{h}$ по определению подалгебры $\mathfrak{h}$, так что наше утверждение следует из предложения 3.

Замечание 4. Если $K = \mathbf{R}$, то интегральные подгруппы в G могут быть охарактеризованы также как подгруппы, которые, будучи наделенными топологией, индуцированной топологией на G, *линейно связны* (§ 8, упражнение 4). Тем не менее могут существовать *связные* подгруппы, не являющиеся интегральными (*Комм. алг.*, гл. VI, § 9, упражнение 2b).

Следствие. *Пусть G — конечномерная группа Ли, H_1 и H_2 — две интегральные подгруппы в G. Подгруппа в G, порождаемая подгруппами H_1 и H_2, и подгруппа (H_1, H_2) в G суть интегральные подгруппы в G.*

Подгруппа (G, G) в G не всегда замкнута (§ 9, упражнение 6).

Напомним (§ 3, n° 11, следствие 5 предложения 41), что если $\mathfrak{a}$ — конечномерная алгебра, то $\mathrm{Aut}(\mathfrak{a})$ есть подгруппа Ли в $\mathbf{GL}(\mathfrak{a})$ и $L(\mathrm{Aut}\,\mathfrak{a})$ есть алгебра Ли дифференцирований алгебры $\mathfrak{a}$.

Определение 2. *Пусть $\mathfrak{a}$ — конечномерная алгебра Ли. Через* $\mathrm{Ad}(\mathfrak{a})$ *или* $\mathrm{Int}(\mathfrak{a})$ *обозначается интегральная подгруппа в* $\mathrm{Aut}(\mathfrak{a})$ *с алгеброй Ли* $\mathrm{ad}(\mathfrak{a})$. *Элементы этой группы называются внутренними автоморфизмами алгебры $\mathfrak{a}$.*

В силу переноса структуры $\mathrm{ad}\,\mathfrak{a}$ инвариантна относительно $\mathrm{Aut}(\mathfrak{a})$, стало быть, $\mathrm{Int}(\mathfrak{a})$ есть нормальная подгруппа в $\mathrm{Aut}(\mathfrak{a})$. Приняв во внимание следствие 1 предложения 8 § 4, n° 4, и связность группы $\mathrm{Int}(\mathfrak{a})$, видим, что элементы из $\mathrm{Int}(\mathfrak{a})$ суть

конечные произведения автоморфизмов вида $\exp \operatorname{ad} x$, где $x \in \mathfrak{a}$. Вообще говоря, $\operatorname{Int}(\mathfrak{a})$ не есть подгруппа Ли в $\operatorname{Aut}(\mathfrak{a})$ (упражнение 14).

3. Переход от алгебр Ли к группам Ли

Теорема 3. (i) *Если L — конечномерная алгебра Ли, существует односвязная группа Ли G, такая, что $L(G)$ изоморфна алгебре Ли L.*

(ii) *Пусть G_1 и G_2 — две связные группы Ли, причем G_1 односвязна, f — изоморфизм из $L(G_1)$ на $L(G_2)$, φ — морфизм из G_1 в G_2, такой, что $L(\varphi) = f$, и N — ядро морфизма φ. Тогда N является дискретной подгруппой, лежащей в центре группы G_1, и морфизм из G_1/N в G_2, полученный из φ, есть изоморфизм групп Ли. Если G_2 односвязна, φ — изоморфизм.*

Пусть L — конечномерная алгебра Ли. Существует конечномерное векторное пространство E, такое, что L можно отождествить с подалгеброй Ли в $\operatorname{End}(E)$ (гл. I, § 7, теорема 2). Пусть H — интегральная подгруппа в $\mathbf{GL}(E)$ с алгеброй Ли L. Пусть $\widehat{H}$ — ее универсальная накрывающая (§ 1, n° 9, замечание 2). Тогда $L(\widehat{H})$ изоморфна L, откуда следует (i).

Пусть G_1, G_2, f, φ, N — такие же, как в (ii). Тогда φ этален и, стало быть, $\varphi(G_1)$ — открытая подгруппа в G_2, а потому $\varphi(G_1) = G_2$. С другой стороны, ядро N дискретно, и, следовательно, содержится в центре группы G_1 (*Интегр.*, гл. VII, § 3, *лемма* 4). Ясно, что морфизм из G_1/N на G_2, полученный из φ, есть изоморфизм групп Ли. Если G_2 односвязна, то всякое этальное отображение из G_1 на G_2 инъективно, а потому $N = \{e\}$.

Предложение 5. *Пусть G — связная вещественная группа Ли. Предположим, что на $L(G)$ задана структура комплексной нормируемой алгебры Ли L', согласованная с ее структурой вещественной нормируемой алгебры Ли. На G существует одна и только одна структура комплексной группы Ли, согласованная со структурой вещественной группы Ли и такая, что алгеброй Ли для нее является L'.*

В силу следствия 2 теоремы 2 § 4, n° 2, достаточно доказать, что структура на L' инвариантна относительно $\operatorname{Ad} G$. Пусть φ — экспоненциальное отображение для G. В силу следствия 3 (i) предложения 8 § 4, n° 4, существует окрестность V элемента 0 в $L(G)$, такая, что структура на L' инвариантна относительно $\operatorname{Ad} \varphi(V)$. Но $\varphi(V)$ порождает G, поскольку G связна.

Заключение предложения 5 не обязательно выполняется, если мы не предполагаем, что G связна (упражнение 7).

Предложение 6. *Пусть G — связная комплексная группа Ли. Если G компактна, то G коммутативна.*

Голоморфное отображение $g \mapsto \operatorname{Ad} g$ из G в $\mathscr{L}(L(G))$ постоянно (*Мн. Св. рез.*, 3.3.7); стало быть, $\operatorname{ad} a = 0$ для всякого $a \in L(G)$ (§ 3, n°12, предложение 44). Следовательно, G коммутативна (§ 4, следствие 3 теоремы 1).

4. Экспоненциальное отображение

Теорема 4. *Пусть G — группа Ли. Существует одно и только одно экспоненциальное отображение, определенное на $L(G)$.*

Существуют выпуклая открытая окрестность U элемента 0 в $L(G)$ и экспоненциальное отображение φ для G, определенное на U. Можно предполагать, выбирая U достаточно малой, что

$$\varphi((\lambda + \lambda')a) = \varphi(\lambda a)\varphi(\lambda' a) \tag{1}$$

для $a \in L(G)$, λ, λ' из K, λa, $\lambda' a$, $(\lambda + \lambda')a$ из U.

Пусть $a \in L(G)$. Существует целое число $n > 0$, такое, что $\frac{1}{n} a \in U$. Если m — другое целое число > 0, такое, что $\frac{1}{m} a \in U$, то $\frac{1}{nm} a \in U$, и соотношение (1) влечет за собой

$$\varphi\left(\frac{1}{n} a\right) = \left(\varphi\left(\frac{1}{nm} a\right)\right)^m, \quad \varphi\left(\frac{1}{m} a\right) = \left(\varphi\left(\frac{1}{nm} a\right)\right)^n;$$

стало быть, $\left(\varphi\left(\frac{1}{n} a\right)\right)^n = \left(\varphi\left(\frac{1}{m} a\right)\right)^m$. Существует продолжение $\psi: L(G) \to G$ отображения φ, такое, что $\psi(a) = \left(\varphi\left(\frac{1}{n} a\right)\right)^n$ для $a \in L(G)$ и любого числа $n > 0$, такого, что $\frac{1}{n} a \in U$. Ясно, что ψ аналитично и является экспоненциальным отображением для G. Если $\psi': L(G) \to G$ — экспоненциальное отображение для G, то ψ и ψ' совпадают в некоторой окрестности элемента 0, а потому равны, поскольку $L(G)$ связно. Ч. Т. Д.

С этого места, если мы будем говорить об *экспоненциальном отображении для G*, то речь будет идти об отображении, рассмотренном в теореме 4. Оно обозначается через $\exp_G$ или просто $\exp$, если это не может привести к путанице.

Пример. Пусть A — полная нормированная ассоциативная алгебра с единицей. Тогда $\exp_{A^*}$ есть экспоненциальное отображение, определенное в гл. II, § 7, n° 3.

Предложение 7. *Пусть G — группа Ли, a — элемент из $L(G)$. Отображение $\lambda \mapsto \exp(\lambda a)$ из K в G является единственным морфизмом φ группы Ли K в G, таким, что $(T_0\varphi)1 = a$.*

Отображения $(\lambda, \lambda') \mapsto \exp(\lambda a)\exp(\lambda' a)$ и $(\lambda, \lambda') \mapsto \exp(\lambda + \lambda') a$ из $K \times K$ в G аналитичны и совпадают в некоторой окрестности элемента $(0, 0)$. Поскольку $K \times K$ связно, эти отображения равны. Стало быть, $\varphi\colon \lambda \mapsto \exp(\lambda a)$ есть морфизм групп Ли из K в G. Касательное отображение в 0 к $\lambda \mapsto \lambda a$ есть отображение $\lambda \mapsto \lambda a$ и $T_e(\exp) = \mathrm{Id}_{L(G)}$; значит, $(T_0\varphi) 1 = a$. Утверждение единственности следует из теоремы 1.

Предложение 8. *Пусть G — группа Ли. Каковы бы ни были x, y в $L(G)$, имеем, обозначая через n целое число,*

$$\exp(x + y) = \lim_{n \to +\infty} \left(\left(\exp \frac{1}{n} x\right)\left(\exp \frac{1}{n} y\right)\right)^n, \tag{2}$$

$$\exp[x, y] = \lim_{n \to +\infty} \left(\left(\exp \frac{1}{n} x\right)\left(\exp \frac{1}{n} y\right)\left(\exp \frac{1}{n} x\right)^{-1}\left(\exp \frac{1}{n} y\right)^{-1}\right)^{n^2}. \tag{3}$$

Это следует из предложения 4 § 4, n° 3, если положить в нем $\lambda = 1/n$ и принять во внимание предложение 7.

Предложение 9. *Пусть G — комплексная группа Ли, G' — нижележащая вещественная группа Ли. Тогда $\exp_G = \exp_{G'}$.*

Это следует из предложения 5 § 4, n° 3, и аналитичности отображений $\exp_G$ и $\exp_{G'}$.

Предложение 10. *Пусть G и H — группы Ли, φ — морфизм из G в H.*

(i) $\varphi \circ \exp_G = \exp_H \circ L(\varphi)$.

(ii) *Если G — интегральная подгруппа в H, то* $\exp_G = \exp_H | L(G)$.

Обе части равенства (i) суть аналитические отображения из $L(G)$ в H, совпадающие в некоторой окрестности элемента 0 (§ 4, n° 4, предложение 8); стало быть, они равны. Утверждение (ii) является частным случаем утверждения (i).

Следствие 1. *Пусть G — группа Ли, G' — подгруппа Ли в G и $a \in L(G)$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) $a \in L(G')$;

(ii) $\exp(\lambda a) \in G'$ *для* $\lambda \in K$ *и достаточно малых* $|\lambda|$;

(iii) $\exp(\lambda a) \in G'$ *для всякого* $\lambda \in K$.

Рассуждаем так же, как в следствии 1 предложения 8 § 4, n° 4.

Следствие 2. *Пусть G — группа Ли, H — интегральная подгруппа в G и $a \in L(G)$. Рассмотрим следующие условия:*

(i) $a \in L(H)$;

(ii) $\exp_G(\lambda a) \in H$ *для всякого* $\lambda \in K$.

Тогда (i) $\Rightarrow$ (ii). *Если топология на* H *допускает счетный базис, то* (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

Пусть i — каноническая инъекция из H в G. Если $a \in L(H)$, то

$$\exp_G(\lambda a) = (\exp_G \circ L(i))(\lambda a) = (i \circ \exp_H)(\lambda a) \in H.$$

Стало быть, (i) $\Rightarrow$ (ii). Обратная импликация для подгрупп H со счетным базисом следует из предложения 3.

Следствие 3. *Пусть* G — *группа Ли,* ρ — *линейное аналитическое представление группы* G, $x \in L(G)$ *и* $g \in G$.

(i) $\rho(\exp x) = \exp L(\rho)\, x$;

(ii) $\mathrm{Ad}(\exp x) = \exp \mathrm{ad}\, x$;

(iii) $g(\exp x)\, g^{-1} = \exp(\mathrm{Ad}\, g \,.\, x)$.

Рассуждаем так же, как в следствиях 2 и 3 предложения 8, § 4, n° 4.

Следствие 4. *Пусть* G — *связная конечномерная группа Ли.*

(i) *Имеем* $\mathrm{Int}(L(G)) = \mathrm{Ad}(G)$.

(ii) *Пусть* Z — *центр группы* G. *Тогда* Z *является подгруппой Ли в* G, *алгебра Ли которой есть центр в* $L(G)$. *Отображение из* G/Z *в* $\mathrm{Int}\, L(G)$, *получающееся из* $g \mapsto \mathrm{Ad}\, g$ *переходом к фактору, есть изоморфизм групп Ли.*

Утверждение (i) вытекает из следствия 3 (ii) и замечаний, следующих за определением 2. Пусть $g \in G$. Чтобы $\mathrm{Ad}\, g = \mathrm{Id}_{L(G)}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathrm{Int}\, g$ совпадало с Id_G в некоторой окрестности элемента e (§ 4, n° 1, теорема 1 (ii)), а потому во всей G; другими словами, необходимо и достаточно, чтобы $g \in Z$. Коль скоро это так, то (ii) вытекает из следствия 1 предложения 1.

Определение 3. *Пусть* G — *связная конечномерная группа Ли. Группа Ли* $\mathrm{Int}(L(G)) = \mathrm{Ad}(G)$ *называется присоединенной группой к* G.

Предложение 11. *Пусть* G — *коммутативная связная группа Ли.*

(i) $\exp$ *есть этальный морфизм аддитивной группы Ли* $L(G)$ *на* G.

(ii) *Если* $K = \mathbf{R}$ *и* G *конечномерна, то* G *изоморфна группе Ли вида* $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^q$ (p, q — *целые числа* $\geqslant 0$).

В силу формулы Хаусдорфа $(\exp x)(\exp y) = \exp(x + y)$ для x, y, достаточно близких к 0, а, стало быть, по аналитическому продолжению и для произвольных x, y в $L(G)$. Значит, $\exp$ есть

гомоморфизм групп, и он этален, поскольку

$$T_e(\exp) = \mathrm{Id}_{L(G)}.$$

Отсюда следует (i). Утверждение (ii) вытекает из (i) и из *Общ. топ.*, 1969, гл. VII, § 1, предложение 9.

Предложение 12. *Пусть G — группа Ли и $L = L(G)$. Для всякого $x \in L$ отождествим $T_x(L)$ с L, так что правый дифференциал $\varpi(x)$ отображения* exp *в x будет линейным отображением из L в L. Для любого $x \in L$*

$$\varpi(x) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{(n+1)!} (\operatorname{ad} x)^n.$$

Оба члена являются аналитическими функциями от x и совпадают для всех x, достаточно близких к 0 (§ 4, n° 3, предложение 6).

Замечание. Имеем $\varpi(x) \cdot (\operatorname{ad} x) = \exp \operatorname{ad} x - 1$. Допуская вольность в обозначениях, пишут

$$\varpi(x) = \frac{\exp \operatorname{ad} x - 1}{\operatorname{ad} x}.$$

Следствие. *Пусть G — комплексная группа Ли и $x \in L(G)$. Ядром касательного отображения в x к* $\exp_G$ *является*

$$\bigoplus_{n \in \mathbf{Z} - \{0\}} \operatorname{Ker}(\operatorname{ad} x - 2i\pi n).$$

Нулями целой функции $z \mapsto \sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{1}{(n+1)!} z^n$, равной $(e^z - 1)/z$ при $z \neq 0$, являются точки из $2\pi i\mathbf{Z} - \{0\}$, все они — простые нули. Следствие вытекает тогда из предложения 12 и такой леммы:

Лемма 2. *Пусть E — комплексное банахово пространство, u — элемент из $\mathscr{L}(E)$, S — спектр элемента u в $\mathscr{L}(E)$* (*Спектр. теор.*, гл. I, § 1, n° 2), *f — комплексная голоморфная функция в открытой окрестности Ω множества S. Предположим, что f имеет в Ω только конечное число попарно различных нулей $z_1, \ldots, z_n$, имеющих кратности $h_1, \ldots, h_n$ соответственно. Тогда* $\operatorname{Ker} f(u)$ *есть прямая сумма пространств* $\operatorname{Ker}(u - z_i)^{h_i}$ *для* $1 \leqslant i \leqslant n$.

(Относительно определения элемента $f(u)$ см. *Спектр. теор.*, гл. I, § 4, n° 8.)

Существует голоморфная функция g в Ω, нигде не обращающаяся в нуль и такая, что $f(z) = (z - z_1)^{h_1} \ldots (z - k_n)^{h_n} g(z)$. Тогда $g(u) g^{-1}(u) = g^{-1}(u) g(u) = 1$, стало быть, $\operatorname{Ker} f(u) = \operatorname{Ker} \prod_{i=1}^{n} (u - z_i)^{h_i}$. Пространство $\operatorname{Ker} f(u)$ можно рассматривать как $\mathbf{C}[X]$-модуль, поскольку на нем задан внешний закон $(h, x) \mapsto h(u) x$, где $h \in \mathbf{C}[X]$, $x \in \operatorname{Ker} f(u)$. Используя *Alg.*, chap. VII, § 2, n° 1, proposition 1 [1]), мы видим, что $\operatorname{Ker} f(u)$ есть прямая сумма пространств $\operatorname{Ker}(u - z_i)^{h_i}$.

5. *Применение к линейным представлениям*

Предложение 13. *Пусть G — связная группа Ли, ρ — линейное аналитическое представление группы G в полном нормируемом пространстве E и E_1, E_2 — два замкнутых векторных подпространства в E, таких, что $E_2 \subset E_1$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) $\rho(g) x \equiv x \pmod{E_2}$ *для любых* $g \in G$ и $x \in E_1$;

(ii) *элементы из* $L(\rho)(L(G))$ *отображают* E_1 *в* E_2.

В самом деле,

$$\rho(g) x \equiv x \pmod{E_2} \text{ для любых } g \in G \text{ и } x \in E_1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \rho(\exp a) x \equiv x \pmod{E_2} \text{ для любых } a \in L(G) \text{ и } x \in E_1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\exp L(\rho) a) x \equiv x \pmod{E_2} \text{ для любых } a \in L(G) \text{ и } x \in E_1.$$

С другой стороны, если $u \in \mathscr{L}(E)$, то

$$(\exp \lambda u) x \equiv x \pmod{E_2} \text{ для любых } \lambda \in K \text{ и } x \in E_1 \Leftrightarrow u(E_1) \subset E_2,$$

откуда следует предложение.

Следствие 1. *Для устойчивости E_1 относительно ρ необходимо и достаточно, чтобы E_1 было устойчиво относительно $L(\rho)$.*

Достаточно положить $E_1 = E_2$ в предложении 13.

Следствие 2. *Предположим, что ρ конечномерно. Чтобы ρ было простым* (соотв. *полупростым*), *необходимо и достаточно, чтобы $L(\rho)$ было простым* (соотв. *полупростым*).

Это вытекает из следствия 1.

Следствие 3. *Для того чтобы $x \in E$ был инвариантен относительно $\rho(G)$ необходимо и достаточно, чтобы x аннулировался элементами из $L(\rho)(L(G))$ (т. е. чтобы x был инвариантен относительно $L(\rho)$ в смысле* гл. 1, § 3, определение 3).

Достаточно положить $E_1 = Kx$, $E_2 = 0$ в предложении 13.

---

[1]) См. также *Алг.*, гл. VII, § 2, n° 2, предложение 3. — *Прим. перев.*

Следствие 4. *Пусть* ρ' — *другое линейное аналитическое представление группы* G *в полном нормируемом пространстве* E'. *Пусть* $T \in \mathscr{L}(E, E')$. *Следующие условия эквивалентны*:

(i) $T\rho(g) = \rho'(g)T$ *для всякого* $g \in G$;

(ii) $TL(\rho)(a) = L(\rho')(a)T$ *для всякого* $a \in L(G)$.

Пусть σ — линейное представление группы G в $\mathscr{L}(E, E')$, полученное из ρ и ρ' (§ 3, n° 11, следствие 1 предложения 41). Условие (i) означает, что T инвариантен относительно $\sigma(G)$. Условие (ii) означает, что $L(\sigma)(L(G))$ аннулирует T. Теперь достаточно применить следствие 3.

Следствие 5. *Предположим* ρ *и* ρ' *конечномерными. Для эквивалентности* ρ *и* ρ' *необходимо и достаточно, чтобы* $L(\rho)$ *и* $L(\rho')$ *были эквивалентны.*

Это частный случай следствия 4.

Следствие 6. *Предположим, что* G *конечномерна. Пусть* $t \in U(G)$. *Чтобы* L_t (соотв. R_t) *был инвариантен справа* (соотв. *слева*), *необходимо и достаточно, чтобы* t *принадлежал центру алгебры* $U(G)$.

Чтобы L_t (соотв. R_t) был инвариантен справа (соотв. слева), необходимо и достаточно, чтобы $\varepsilon_g * t = t * \varepsilon_g$ для всякого $g \in G$, т. е. чтобы $(\operatorname{Int} g)_* t = t$. Существует целое число n, такое, что $t \in U_n(G)$. В силу следствия 3 и предложения 45 § 3, n° 12, $(\operatorname{Int} g)_* t = t$ для всякого $g \in G$ тогда и только тогда, когда $[a, t] = 0$ для всякого $a \in L(G)$, т. е. тогда и только тогда, когда t коммутирует с $U(G)$.

6. Нормальные интегральные подгруппы

Лемма 3. *Пусть* G — *группа Ли*, H_1 *и* H_2 — *интегральные подгруппы, топология которых допускает счетный базис, и* $g \in G$. *Тогда*

$$gH_1g^{-1} = H_2 \Leftrightarrow (\operatorname{Ad} g)(L(H_1)) = L(H_2).$$

Имеем $\operatorname{Ad} g = T_e(\operatorname{Int} g)$. Стало быть, благодаря переносу структуры $(\operatorname{Int} g)(H_1)$ имеет в качестве алгебры Ли $(\operatorname{Ad} g)(L(H_1))$. Поскольку H_1 и H_2 имеют счетный базис, совпадение множеств H_2 и $(\operatorname{Int} g)(H_1)$ эквивалентно тому, что интегральные подгруппы H_2 и $(\operatorname{Int} g)(H_1)$ совпадают (n° 2, следствие 3 предложения 3). Коль скоро это так, лемма следует из теоремы 2 (i).

Предложение 14. *Пусть* G — *группа Ли*, H — *интегральная подгруппа, топология которой допускает счетный базис. Следующие условия эквивалентны*:

(i) *H нормальна в G;*

(ii) *$L(H)$ инвариантна относительно $\mathrm{Ad}(G)$.*

Если, кроме того, G связна, эти условия эквивалентны следующему условию:

(iii) *$L(H)$ есть идеал в $L(G)$.*

Если, кроме того, G односвязна и $L(H)$ имеет конечную коразмерность в $L(G)$, из этих условий следует, что H есть подгруппа Ли в G и G/H односвязна.

Эквивалентность условий (i) и (ii) следует из леммы 3. Если, кроме того, G связна, то условие (ii) эквивалентно утверждению об устойчивости подалгебры Ли $L(H)$ относительно $\mathrm{ad}\,L(G)$ (n° 5, следствие 1 предложения 13, и § 3, n° 12, предложение 44).

Предположим, что G односвязна и $L(H)$ есть идеал конечной коразмерности в $L(G)$. Согласно теореме 3, n° 3, существует односвязная группа Ли G', такая, что $L(G')$ изоморфна алгебре Ли $L(G)/L(H)$. Существует непрерывный морфизм f из $L(G)$ на $L(G')$ с ядром $L(H)$. В силу теоремы 1, n° 1, существует морфизм φ из G в G', такой, что $L(\varphi)=f$. Этот морфизм есть субмерсия, и, стало быть, его ядро N является подгруппой Ли в G, такой, что $L(N)=\mathrm{Ker}\,f=L(H)$. Значит, H есть компонента единицы в N и, следовательно, подгруппа Ли в G. Пусть ψ — морфизм из G/H в G', полученный из φ переходом к фактору. Этот морфизм этален; поскольку G' односвязна, ψ является изоморфизмом из G/H на G'.

Следствие 1. *Пусть G — односвязная конечномерная группа Ли. Пусть $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{h}$ — подалгебры Ли в $L(G)$, такие, что $L(G)$ есть полупрямое произведение подалгебры $\mathfrak{m}$ на $\mathfrak{h}$. Пусть M, H — соответствующие интегральные подгруппы в G. Тогда M и H суть односвязные группы Ли и G, рассматриваемая как группа Ли, есть полупрямое произведение подгруппы M на H.*

В силу предложения 14 H есть нормальная подгруппа Ли в G, и группа Ли G/H односвязна. Пусть π — канонический морфизм из G на G/H. Существует морфизм θ из G/H в M, такой, что $L(\theta)$ является каноническим изоморфизмом из $L(G)/L(H)=L(G)/\mathfrak{h}$ на $L(M)=\mathfrak{m}$. Тогда

$$L(\pi\circ\theta)=L(\pi)\circ L(\theta)=\mathrm{Id}_{L(G/H)};$$

стало быть, $\pi\circ\theta=\mathrm{Id}_{G/H}$. В силу следствия 1 предложения 1, n° 1, $\theta(G/H)=M$. Согласно предложению 8 § 1, n° 4, M есть подгруппа Ли в G, и группа Ли G является полупрямым произведением подгруппы M на H.

Следствие 2. *Пусть G — односвязная конечномерная группа Ли, H — связная нормальная подгруппа в G и π — канонический морфизм из G на G/H.*

(i) *Существует аналитическое отображение* ρ *из* G/H *в* G, *такое, что* $\pi \circ \rho = \mathrm{Id}_{G/H}$.

(ii) *Для всякого отображения* ρ, *обладающего свойством* (i), *отображение* $(h, m) \mapsto h\rho(m)$ *из* $H \times (G/H)$ *в* G *есть изоморфизм аналитических многообразий.*

(iii) H *и* G/H *односвязны.*

Пусть $n = \dim G - \dim H$. Следствие очевидно для $n = 0$. Проведем индукцию по n.

Предположим, что существует идеал в $L(G)$, содержащий $L(H)$ и отличный от $L(G)$ и $L(H)$. Пусть H' — соответствующая связная подгруппа Ли в G. Пусть π_1: $G \to G/H'$ и π_2: $H' \to H'/H$ — канонические морфизмы. В силу предположения индукции существуют аналитические отображения ρ_1: $G/H' \to G$, ρ_2: $H'/H \to H'$, такие, что $\pi_1 \circ \rho_1 = \mathrm{Id}_{G/H'}$, $\pi_2 \circ \rho_2 = \mathrm{Id}_{H'/H}$. Пусть π_3: $G/H \to G/H'$ — канонический морфизм. Если $x \in G/H$ и y — представитель x в G, то y и $\rho_1(\pi_3(x))$ имеют одинаковый канонический образ по модулю H', а потому $x^{-1}\pi(\rho_1(\pi_3(x))) \in H'/H$. Положим $\rho(x) = \rho_1(\pi_3(x))\,\rho_2\big(\pi(\rho_1(\pi_3(x)))^{-1}x\big) \in G$. Ясно, что ρ — аналитическое отображение из G/H в G. Имеем

$$\pi(\rho(x)) = \pi(\rho_1(\pi_3(x)))\,\pi_2\big(\rho_2\big(\pi(\rho_1(\pi_3(x)))^{-1}x\big)\big) =$$
$$= \pi(\rho_1(\pi_3(x)))\,\pi(\rho_1(\pi_3(x)))^{-1}x = x.$$

Если теперь единственными идеалами в $L(G)$, содержащими $L(H)$, являются $L(G)$ и $L(H)$, то алгебра Ли $L(G)/L(H)$ либо имеет размерность 1, либо проста. В обоих случаях $L(G)$ есть полупрямое произведение некоторой подалгебры на $L(H)$, это вытекает из следствия 3 теоремы 5 гл. I, § 6. Утверждение (i) следует тогда из следствия 1.

Утверждение (ii) очевидно. Утверждение (iii) вытекает из (i) и (ii).

Заключения следствия 2 не обязательно выполняются, когда G бесконечномерна или когда H не является нормальной (упражнения 8 и 15).

Следствие 3. *Пусть* G — *связная конечномерная группа Ли,* H — *связная нормальная подгруппа Ли в* G. *Канонический морфизм из* $\pi_1(H)$ *в* $\pi_1(G)$ *инъективен.*

Пусть G_1 — универсальная накрывающая группы G, λ — каноническое отображение из G_1 на G. Алгебра Ли группы G_1 отождествляется с $L(G)$. Подгруппа Ли $\lambda^{-1}(H)$ в G_1 нормальна в G_1, и ее алгеброй Ли служит $L(H)$. Пусть H_1 — компонента единицы группы $\lambda^{-1}(H)$ и $\lambda_1 = \lambda \mid H_1$. Имеем $L(H_1) = L(H)$, и, стало быть, λ_1 — этальный морфизм из H_1 на H. С другой стороны, H_1 односвязна (следствие 2), а потому отождествляется с универсальной накрывающей группы H. Тогда, согласно *Тор.*

gén., chap. XI, канонический морфизм из $\pi_1(H)$ в $\pi_1(G)$ отождествляется с канонической инъекцией из $\operatorname{Ker}\lambda_1$ в $\operatorname{Ker}\lambda$.

7. Первообразные дифференциальных форм со значениями в алгебре Ли

Предложение 15. *Пусть G — группа Ли, M — многообразие класса C^r ($r \geqslant 2$), α — дифференциальная форма класса C^{r-1} и степени 1 на M со значениями в $L(G)$, такая, что $d\alpha + [\alpha]^2 = 0$. Предположим, что M односвязно. Для всякого $x \in M$ и всякого $s \in G$ существует одно и только одно отображение f класса C^{r-1} из M в G, такое, что $f(x) = s$ и $f^{-1}\,.\,df = \alpha$.*

Единственность отображения f вытекает из следствия 2 предложения 59 § 3, n° 17, и связности многообразия M. Докажем существование отображения f. Существует открытое покрытие $(U_i)_{i \in I}$ многообразия M и для любого $i \in I$ отображение $g_i\colon U_i \to G$ класса C^{r-1}, такое, что $g_i^{-1}\,.\,dg_i = \alpha$ на U_i (§ 4, n° 6, теорема 5). В силу следствия 2 предложения 59 § 3, n° 17, $g_i g_j^{-1}$ локально постоянно в $U_i \cap U_j$. Положим $g_i g_j^{-1} = g_{ij}$. Пусть G_d — группа G, наделенная дискретной топологией. Отображения $g_{ij}\colon U_i \cap U_j \to G_d$ непрерывны и $g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$ в $U_i \cap U_j \cap U_k$. Поскольку M односвязно, существуют непрерывные отображения[1] $\lambda_i\colon U_i \to G_d$, такие, что $g_i g_j^{-1} = \lambda_i \lambda_j^{-1}$ в $U_i \cap U_j$. Пусть g — отображение из M в G, ограничение которого на U_i есть $\lambda_i^{-1} g_i$, каково бы ни было $i \in I$. Это отображение принадлежит классу C^{r-1} и $g^{-1}\,.\,dg = \alpha$. Отображение f из M в G, определенное формулой $f = s\,(g(x))^{-1} g$, удовлетворяет условиям $f^{-1}\,.\,df = \alpha$ и $f(x) = s$.

8. Переход от законов инфинитезимального действия к законам действия

Лемма 4. Пусть G — связная топологическая группа, X — отделимое топологическое пространство, f_1 и f_2 — законы левого (соотв. *правого*) *действия группы G на X, такие, что для всякого $x \in X$ отображения $s \mapsto f_1(s, x)$ и $s \mapsto f_2(s, x)$ из G в X непрерывны. Предполагается, что существует такая окрестность V множества $\{e\} \times X$ в $G \times X$, что f_1 и f_2 совпадают на V. Тогда $f_1 = f_2$.*

Пусть $x \in X$ и A — множество таких $g \in G$, что $f_1(g, x) = f_2(g, x)$. Тогда A замкнуто в G. С другой стороны, пусть $g \in A$;

---

[1]) Главное расслоение с дискретным слоем, определенное коциклом g_{ij} (*Мн. Св. ред.*, 6.4), тривиально ввиду односвязности M; его непрерывное сечение над M и задает отображение λ_i. — *Прим. перев.*

положим $y = f_1(g, x) = f_2(g, x)$. Существует окрестность U элемента e в G, такая, что $f_1(t, y) = f_2(t, y)$ при $t \in U$, другими словами, такая, что $f_1(t', x) = f_2(t', x)$ для $t' \in Ug$ (соотв. gU). Стало быть, A открыто в G и, следовательно, $A = G$.

Предложение 16. *Пусть G — связная группа Ли, X — отделимое многообразие класса C^r и f_1, f_2 — законы левого* (соотв. *правого*) *действия класса C^r группы G на X. Если ассициированные с f_1 и f_2 законы инфинитезимального действия равны, то $f_1 = f_2$.*

В силу следствия предложения 11 из § 4, n° 7, существует окрестность V множества $\{e\} \times X$ в $G \times X$, такая, что f_1 и f_2 совпадают в V. Следовательно, $f_1 = f_2$ (лемма 4).

Лемма 5. *Пусть G — односвязная топологическая группа, X — отделимое топологическое пространство, U—открытая окрестность элемента e в G, ψ — непрерывное отображение из $U \times X$ в X, такое, что $\psi(e, x) = x$ и $\psi(s, \psi(t, x)) = \psi(st, x)$, каковы бы ни были $x \in X$ и s, t из U, такие, что $st \in U$. Пусть W — открытая связная симметричная окрестность элемента e, такая, что $W^3 \subset U$. Существует один и только один закон непрерывного левого действия ψ' группы G на X, такой, что ψ' и ψ совпадают в $W \times X$. Если G — группа Ли и X — многообразие класса C^r, а ψ принадлежит классу C^r, то ψ' принадлежит классу C^r.*

Единственность закона ψ следует из леммы 4. Пусть P — группа подстановок множества X. Для $u \in W^3$ отображение $x \mapsto \psi(u, x)$ является элементом $f(u)$ из P и

$$f(u_1u_2u_3) = f(u_1)\,f(u_2)\,f(u_3)$$

для u_1, u_2, u_3 из W. Применяя лемму 1, n° 1, получаем морфизм f' из G в P, продолжающий $f \mid W$. Положим $\psi'(g, x) = f'(g)(x)$ для любого $(g, x) \in G \times X$. Тогда ψ' есть закон левого действия группы G на X, совпадающий с ψ в $W \times X$. Поскольку $\psi'(g, \psi'(g', x)) = \psi'(gg', x)$ для $(g, g', x) \in G \times G \times X$, непрерывность отображения ψ в $W \times X$ влечет за собой непрерывность отображения ψ' в $gW \times X$, каков бы ни был элемент $g \in G$. Стало быть, ψ' непрерывно. Если ψ принадлежит классу C^r, то мы подобным же образом убеждаемся в том, что ψ' принадлежит классу C^r.

Теорема 5. *Пусть G — односвязная группа Ли, X — компактное многообразие класса C^r $(r \geqslant 2)$ и $a \mapsto D_a$ — закон инфинитезимального левого* (соотв. *правого*) *действия класса C^{r-1} алгебры Ли $L(G)$ на X. Существует один и только один закон левого* (соотв. *правого*) *действия класса C^{r-1} группы G на X,*

такой, что ассоциированным с ним законом инфинитезимального действия является $a \mapsto D_a$.

Единственность следует из предложения 16. В силу следствия 1 теоремы 6 § 4, n° 7, существуют окрестность V множества $\{e\} \times X$ в $G \times X$ и кусок закона левого (соотв. правого) действия класса C^{r-1} группы G на X, определенный в V, такой, что ассоциированным законом инфинитезимального действия является $a \mapsto D_a$. Поскольку X компактно, можно предположить, что V имеет вид $U \times X$, где U — открытая окрестность элемента e в G. Теперь достаточно применить лемму 5.

9. Экспоненциальное отображение в линейной группе

Предложение 17. *Пусть* Δ — *множество таких* $z \in \mathbf{C}$, *что* $-\pi < \mathscr{I}(z) < \pi$, *и* Δ' — *множество таких* $z \in \mathbf{C}$, *которые не являются вещественными числами* $\leqslant 0$. *Пусть* E — *полное нормируемое пространство над* $\mathbf{C}$, A (соотв. A') — *множество элементов* $x \in \mathscr{L}(E)$, *спектр которых* $\mathrm{Sp}\, x$ *содержится в* Δ (соотв. *в* Δ'). *Тогда* A (соотв. A') *является открытым подмножеством пространства* $\mathscr{L}(E)$ (соотв. $\mathbf{GL}(E)$), *и отображения* $\exp$: $A \to A'$ *и* $\log$: $A' \to A$ (*Спектр. теор.*, гл. I, § 4, n° 9) *суть обратные друг другу изоморфизмы аналитических многообразий.*

Это следует из *Спектр. теор.*, гл. I, § 4, предложение 10 и n° 9.

Теорема 6. *Пусть* E — *вещественное или комплексное гильбертово пространство,* U — *унитарная группа пространства* E.

(i) *Множество* H *эрмитовых элементов из* $\mathscr{L}(E)$ *является (относительно структуры вещественного нормированного пространства) замкнутым векторным пространством в* $\mathscr{L}(E)$, *допускающим топологическое дополнение.*

(ii) *Множество* H' *элементов* $\geqslant 0$ *в* $\mathbf{GL}(E) \cap H$ *есть вещественно-аналитическое подмногообразие в* $\mathbf{GL}(E)$.

(iii) *Ограничение на* H *отображения* $\exp$ *есть изоморфизм вещественно-аналитических многообразий из* H *на* H'.

(iv) *Отображение* $(h, u) \mapsto (\exp h) u$ *из* $H \times U$ *в* $\mathbf{GL}(E)$ *есть изоморфизм вещественно-аналитических многообразий.*

Напомним, что если $x \in \mathscr{L}(E)$, то через x^* обозначается элемент, сопряженный к x. Пусть H_1 — множество таких $x \in \mathscr{L}(E)$, что $x^* = -x$. Формула $x = \frac{1}{2}(x + x^*) + \frac{1}{2}(x - x^*)$ показывает, что относительно своей структуры вещественного нормированного пространства $\mathscr{L}(E)$ является прямой топологической суммой пространств H и H_1, откуда следует (i).

Предположим, что $K = \mathbf{C}$. В обозначениях предложения 17 H' есть множество таких $h \in H \cap A'$, что $\operatorname{Sp} h \subset \mathbf{R}_+^*$. Поскольку $\exp(\mathbf{R}) = \mathbf{R}_+^*$, утверждения (ii) и (iii) следуют из предложения 17, из *Спектр. теор.*, гл. I, § 4, предложение 8, и § 6, n° 5. Отображение $(h, u) \mapsto y = (\exp h) u$ из $H \times U$ в $\mathbf{GL}(E)$ биективно согласно *Спектр. теор.*, гл. I, § 6, предложение 15. В силу изложенного выше оно вещественно-аналитично. Отображение $y \mapsto h = \frac{1}{2} \log(yy^*)$ является вещественно-аналитическим, стало быть, таково же и отображение $y \mapsto u = (\exp h)^{-1} y$. Отсюда следует (iv).

Предположим, что $K = \mathbf{R}$. Пусть $\widetilde{E}$ — гильбертово пространство, являющееся комплексификацией пространства E, и J — отображение $\xi + i\eta \mapsto \xi - i\eta$ (для ξ, η, принадлежащих E) из $\widetilde{E}$ в $\widetilde{E}$. Обозначим через $\widetilde{H}$, $\widetilde{H}'$, $\widetilde{U}$ множества, определенные для $\widetilde{E}$ таким же образом, как множества H, H', U для E. Тогда H (соотв. H', U) отождествляется с множеством таких $x \in \widetilde{H}$ (соотв. $\widetilde{H}'$, $\widetilde{U}$), что $JxJ^{-1} = x$. Свойства (ii), (iii), (iv) сразу же следуют тогда из (i) и аналогичных свойств в комплексном случае.

Предложение 18. *Пусть E — полное нормируемое пространство над* $\mathbf{C}$, $v \in \mathscr{L}(E)$ *и* $g = \exp v$. *Предположим, что* $\operatorname{Sp}(v)$ *не содержит никакой точки вида $2i\pi n$, где $n \in \mathbf{Z} - \{0\}$. Тогда для всякого $x \in E$ условия $vx = 0$ и $gx = x$ эквивалентны.*

Это следует из леммы 2 n° 4, примененной к функции $z \mapsto e^z - 1$.

Следствие 1. *Пусть E — полное нормируемое пространство над* $\mathbf{C}$, *F — пространство непрерывных n-линейных отображений из E^n в E. Для всякого $v \in \mathscr{L}(E)$ пусть $\sigma(v)$ — элемент из $\mathscr{L}(F)$, определенный формулой*

$$(\sigma(v) f)(x_1, \ldots, x_n) = v(f(x_1, \ldots, x_n)) - \sum_{i=1}^{n} f(x_1, \ldots, vx_i, \ldots, x_n).$$

Для всякого $g \in \mathbf{GL}(E)$ пусть $\rho(g)$ — элемент из $\mathbf{GL}(F)$, определенный формулой

$$(\rho(g) f)(x_1, \ldots, x_n) = g(f(g^{-1}x_1, \ldots, g^{-1}x_n)).$$

Пусть элемент $u \in \mathscr{L}(E)$ таков, что всякая точка $z \in \operatorname{Sp} u$ удовлетворяет условию $|\mathscr{I}(z)| < 2\pi/(n+1)$. Тогда для всякого $f \in F$ условия $\sigma(u) f = 0$ и $\rho(\exp u) f = f$ эквивалентны.

Имеем $L(\rho) = \sigma$ (§ 3, n° 11, следствие 1 предложения 41); стало быть, $\rho(\exp u) = \exp \sigma(u)$ (n° 4, следствие 3 предложе-

ния 10). Принимая во внимание предложение 18, мы видим, что достаточно тогда доказать, что $\mathrm{Sp}\,\sigma(u)$ не пересекает множество $2i\pi(\mathbf{Z}-\{0\})$. Но это вытекает из следующей леммы:

Лемма 6. *Если* $v\in\mathcal{L}(E)$, *то* $\mathrm{Sp}\,\sigma(v)\subset\mathrm{Sp}\,v+\mathrm{Sp}\,v+\ldots+\mathrm{Sp}\,v$, *где сумма включает* $n+1$ *членов.*

Определим элементы $v_0, v_1, \ldots, v_n$ из $\mathcal{L}(F)$, положив для всякого $f\in F$

$$(v_0f)(x_1, \ldots, x_n)=v(f(x_1, \ldots, x_n)),$$
$$(v_if)(x_1, \ldots, x_n)=-f(x_1, \ldots, vx_i, \ldots, x_n) \quad \text{при} \quad 1\leqslant i\leqslant n.$$

Тогда $\sigma(v)=\sum\limits_{i=0}^{n} v_i$ и элементы v_i попарно перестановочны. Пусть A — замкнутая наполненная подалгебра в $\mathcal{L}(F)$, порожденная элементами v_i; она коммутативна (*Спектр. теор.*, гл. I, § 1, n° 4), и $\mathrm{Sp}_{\mathcal{L}(F)}\sigma(v)=\mathrm{Sp}_A\,\sigma(v)\subset\sum\limits_{i=0}^{n}\mathrm{Sp}\,v_i$ (*Спектр. теор.*, гл. I, § 3, предложение 3 (ii)). Но если точка $\lambda\in\mathbf{C}$ такова, что элемент $v-\lambda$ обратим, то ясно, что элементы $v_i-\lambda$ обратимы, а стало быть, $\mathrm{Sp}\,v_i\subset\mathrm{Sp}\,v$ для всякого i.

Следствие 2. *Пусть* E — *полная нормируемая алгебра над* $\mathbf{C}$ *и* $w\in\mathcal{L}(E)$. *Предположим, что любая точка* $z\in\mathrm{Sp}\,w$ *удовлетворяет условию* $|\mathcal{I}(z)|<(2\pi)/3$. *Следующие условия эквивалентны*:

(i) w *есть дифференцирование алгебры* E;

(ii) $\exp w$ *является автоморфизмом алгебры* E.

Это вытекает из следствия 1, где мы полагаем $n=2$ и в качестве f берем умножение в E.

Предложение 19. *Пусть* E — *полное нормируемое пространство над* $\mathbf{C}$, $v\in\mathcal{L}(E)$ *и* $g=\exp v$. *Предположим, что всякая точка* $z\in\mathrm{Sp}\,v$ *удовлетворяет условию* $-\pi<\mathcal{I}(z)<\pi$. *Тогда для всякого замкнутого векторного подпространства* E' *из* E *условия* $v(E')\subset E'$ *и* $g(E')=E'$ *эквивалентны.*

Из условия $v(E')\subset E'$ следует, что $g(E')\subset E'$ и $g^{-1}(E')\subset E'$, и потому $g(E')=E'$. Предположим, что $g(E')=E'$. Воспользуемся обозначениями Δ, Δ' предложения 17. Поскольку $\mathrm{Sp}\,v$ есть компактное подмножество в Δ, существует компактный прямоугольник $Q=[a, b]\times[a', b']$, такой, что $\mathrm{Sp}\,v\subset Q\subset\Delta$. Множество $\Delta-Q$ связно. Стало быть, $\mathrm{Sp}\,g\subset\exp Q\subset\Delta'$, множество $\exp Q$ компактно и множество $\Delta'-\exp Q$ связно. Замыкание последнего множества в $\mathbf{C}$ содержит $]-\infty, 0]$, и потому $(\Delta'-\exp Q)\cup]-\infty, 0]=\mathbf{C}-\exp Q$ связно. Тогда $\exp Q$ полиномиально выпукло (*Спектр. теор.*, гл. I, § 3, следствие 2

предложения 9), и, следовательно, функция log, определенная в Δ', есть предел в $\mathcal{O}(\exp Q)$ полиномиальных функций (*Спектр. теор.*, гл. I, § 4, предложение 3). Значит, $v = \log g$ является пределом в $\mathcal{L}(E)$ элементов вида $P(g)$, где P — многочлен (*Спектр. теор.*, гл. I, § 4, теорема 3). Поскольку $P(g)(E') \subset E'$, то $v(E') \subset E'$.

Следствие. *Пусть E—полное нормируемое пространство над $\mathbf{C}$, $v \in \mathcal{L}(E)$ и $g = \exp v$. Предположим, что всякая точка $z \in \operatorname{Sp} v$ удовлетворяет условию $-\pi/2 < \mathcal{I}(z) < \pi/2$. Тогда для всякого замкнутого векторного пространства M в $\mathcal{L}(E)$ условия $gMg^{-1} = M$ и $[v, M] \subset M$ эквивалентны.*

Пусть $F = \mathcal{L}(E)$, g' — отображение $f \mapsto gfg^{-1}$ из F в F и v' — отображение $f \mapsto [v, f]$ из F в F. Имеем $g' = \exp v'$ (n° 4, следствие 3 предложения 10, и § 3, n° 11, следствие 1 предложения 41). Лемма 6 показывает, что $-\pi < \mathcal{I}(z) < \pi$ для всякого $z \in \operatorname{Sp} v'$. Достаточно теперь применить предложение 19.

10. Комплексификация вещественной конечномерной группы Ли

Лемма 7. Пусть B — группа, A — нормальная подгруппа в B, C — группа B/A, i: $A \to B$ и p: $B \to C$ — канонические морфизмы. Пусть A' — группа, f — гомоморфизм из A в A' и ω — морфизм из B в группу автоморфизмов группы A'. Предположим, что для $a \in A$, $a' \in A'$, $b \in B$

$$f(bab^{-1}) = \omega(b) f(a), \qquad \omega(a) a' = f(a) a' f(a)^{-1}.$$

Пусть B'' — полупрямое произведение группы B на A' относительно ω, q — канонический морфизм из B'' на B.

(i) *Отображение $a \mapsto (f(a^{-1}), i(a))$ из A в B'' есть морфизм из A на некоторую нормальную подгруппу D в B''. Пусть $B' = B''/D$ и i': $A' \to B'$, g: $B \to B'$ — морфизмы групп A' и B в B', полученные при переходе к фактору из канонических инъекций групп A' и B в B''.*

(ii) *Морфизм $p \circ q$ из B'' в C при переходе к фактору определяет морфизм p' из B' в C.*

(iii) *Морфизм i' инъективен, p' сюръективен,* $\operatorname{Ker}(p') = \operatorname{Im}(i')$ *и нижеследующая диаграмма коммутативна*

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & C \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}_C} \\ A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{p'} & C \end{array} \qquad (4)$$

(iv) *Если $b \in B$ и $a' \in A'$, то*

$$g(b) i'(a') g(b)^{-1} = i'(\omega(b) a').$$

(i) Для a_1, a_2 из A в группе B''

$$(f(a_1^{-1}), i(a_1))(f(a_2^{-1}), i(a_2)) = (f(a_1^{-1})(\omega(a_1)f(a_2^{-1})), i(a_1)i(a_2)) =$$
$$= (f(a_1^{-1})f(a_1a_2^{-1}a_1^{-1}), i(a_1a_2)) = (f((a_1a_2)^{-1}), i(a_1a_2));$$

стало быть, $a \mapsto (f(a^{-1}), i(a))$ есть гомоморфизм h из A в B''. Пусть $a \in A$, $a' \in A'$, $b \in B$; тогда в B''

$$bh(a)b^{-1} = bf(a^{-1})ab^{-1} = (\omega(b)f(a^{-1}))(bab^{-1}) =$$
$$= f(ba^{-1}b^{-1})(bab^{-1}) = h(bab^{-1}),$$
$$a'h(a)a'^{-1} = a'f(a^{-1})aa'^{-1} = a'f(a^{-1})(\omega(a)a'^{-1})a =$$
$$= a'f(a^{-1})f(a)a'^{-1}f(a^{-1})a = h(a);$$

следовательно, группа $h(A) = D$ является нормальной в B''.

(ii) Для $a \in A$

$$(p \circ q)(h(a)) = p(q(f(a^{-1})a)) = p(a) = e,$$

а потому $p \circ q$ тривиален на D.

(iii) Пусть элемент $a' \in A'$ таков, что $i'(a') = e$; имеем $a' \in D$, и, стало быть, существует $a \in A$, такой, что $a' = f(a^{-1})a$; это влечет за собой $a = e$, откуда $a' = e$; таким образом, i' инъективен. Поскольку p и q сюръективны, p' сюръективен.

Обозначим через r канонический морфизм из B'' на B'. Пусть $a' \in A'$, $b \in B$ и $b' = r(a'b)$. Если $b' \in \operatorname{Im}(i')$, существует $a'_1 \in A'$, такой, что $b' = r(a'_1)$; тогда существует такой элемент $a \in A$, что $a'b = a'_1f(a^{-1})a$, откуда $b = a \in A$ и

$$p'(b') = p(q(a'b)) = p(b) = e;$$

таким образом, $\operatorname{Im}(i') \subset \operatorname{Ker}(p')$. Сохраним обозначения a', b, b', но предположим, что $b' \in \operatorname{Ker}(p')$; тогда $e = p'(b') = p(q(a'b)) = p(b)$. Стало быть, $b \in A$, откуда

$$b' = r(a'f(b)f(b^{-1})b) = r(a'f(b)) \in \operatorname{Im}(i');$$

таким образом, $\operatorname{Ker}(p') \subset \operatorname{Im}(i')$.

Если $a \in A$, то

$$i'(f(a)) = r(f(a)) = r(f(a)f(a^{-1})a) = r(a) = g(i(a)).$$

Если $b \in B$, то

$$p'(g(b)) = p(b),$$

а потому диаграмма (4) коммутативна.

(iv) Пусть $b \in B$, $a' \in A'$. Имеем

$$g(b)i'(a')g(b)^{-1} = r(b)r(a')r(b)^{-1} = r(ba'b^{-1}) =$$
$$= r(\omega(b)a') = i'(\omega(b)a').$$

Предложение 20. *Пусть G — вещественная группа Ли конечной размерности.*

(i) *Существует комплексная группа Ли $\tilde{G}$ и* $\mathbf{R}$-*аналитический морфизм γ из G в $\tilde{G}$, обладающие следующими свойствами: для всякой комплексной группы Ли H и всякого* $\mathbf{R}$-*аналитического морфизма φ из G в H существует один и только один* $\mathbf{C}$-*аналитический морфизм ψ из $\tilde{G}$ в H, такой, что $\varphi = \psi \circ \gamma$.*

(ii) *Если $(\tilde{G}', \gamma')$ обладают теми же свойствами, что и $(\tilde{G}, \gamma)$, то существует один и только один изоморфизм θ из $\tilde{G}$ на $\tilde{G}'$, такой, что $\theta \circ \gamma = \gamma'$.*

(iii) $\mathbf{C}$-*линейное отображение из $L(G) \otimes \mathbf{C}$ в $L(\tilde{G})$, продолжающее $L(\gamma)$, сюръективно; в частности, $\dim_{\mathbf{C}}(\tilde{G}) \leqslant \dim_{\mathbf{R}}(G)$.*

Утверждение (ii) очевидно. Докажем существование пары $(\tilde{G}, \gamma)$, обладающей свойствами (i) и (iii).

a) Предположим сначала, что G связна. Пусть $\mathfrak{g} = L(G)$, $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ — комплексификация алгебры Ли $\mathfrak{g}$, S (соотв. S') — вещественная (соотв. комплексная) односвязная группа Ли, такая, что $\mathfrak{g}$ (соотв. $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$) — ее алгебра Ли, σ — единственный $\mathbf{R}$-аналитический морфизм из S в S', такой, что $L(\sigma)$ есть каноническая инъекция из $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$. Пусть π — единственный $\mathbf{R}$-аналитический морфизм из S на G, такой, что $L(\pi) = \mathrm{Id}_{L(G)}$, и $F = \operatorname{Ker} \pi$.

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi"'] & S' \arrow[d, "\lambda"] \arrow[ddr, "\varphi^*"] & \\
G \arrow[r, "\gamma"] \arrow[drr, "\varphi"'] & \tilde{G} \arrow[dr, "\psi"] & \\
 & & H
\end{tikzcd}$$

Для всякой комплексной группы Ли H и всякого $\mathbf{R}$-аналитического морфизма φ из G в H отображение $L(\varphi)\colon \mathfrak{g} \to L(H)$ обладает единственным $\mathbf{C}$-линейным продолжением на $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$, и это продолжение имеет вид $L(\varphi^*)$, где φ^* — некоторый $\mathbf{C}$-аналитический морфизм из S' в H. Имеем

$$L(\varphi \circ \pi) = L(\varphi) \circ L(\pi) = L(\varphi) = L(\varphi^*) \circ L(\sigma) = L(\varphi^* \circ \sigma)$$

и, стало быть, $\varphi \circ \pi = \varphi^* \circ \sigma$. Следовательно, $\varphi^*(\sigma(F)) = \varphi(\pi(F)) = \{e\}$, откуда

$$\sigma(F) \subset \operatorname{Ker} \varphi^*.$$

Пусть P — пересечение подгрупп $\operatorname{Ker} \varphi^*$ при изменяющемся φ. Это нормальная подгруппа Ли в S' (n° 2, следствие 3 предложе-

ния 1). Пусть $\widetilde{G}=S'/P$ и $\lambda\colon S'\to\widetilde{G}$ — канонический морфизм. Имеем $\sigma(F)\subset P$, а потому существует один и только один $\mathbf{R}$-аналитический морфизм γ из G в $\widetilde{G}$, такой, что $\gamma\circ\pi=\lambda\circ\sigma$. Если $\psi\colon \widetilde{G}\to H$ означает морфизм, полученный из φ^* при переходе к фактору, то

$$(\psi\circ\gamma)\circ\pi=\psi\circ(\lambda\circ\sigma)=\varphi^*\circ\sigma=\varphi\circ\pi,$$

откуда $\psi\circ\gamma=\varphi$. Ясно, что $L(\psi)$, а следовательно, ψ однозначно определены равенством $\psi\circ\gamma=\varphi$. Доказано таким образом, что пара $(\widetilde{G},\gamma)$ удовлетворяет условиям (i) и (iii).

б) Перейдем к общему случаю. Пусть F — компонента единицы группы G, $M=G/F$, $i\colon F\to G$ и $p\colon G\to M$ — канонические морфизмы. Применим к F часть а) доказательства. Получаем пару $(\widetilde{F},\delta)$. Для всякого $g\in G$ отображение $\operatorname{Int} g\,|\,F=\omega'(g)$ есть автоморфизм группы F. В силу свойства универсальности группы $\widetilde{F}$ существует один и только один автоморфизм $\omega(g)$ комплексной группы Ли $\widetilde{F}$, такой, что $\delta\circ\omega'(g)=\omega(g)\circ\delta$. Ясно, что ω есть морфизм из G в $\operatorname{Aut}(\widetilde{F})$. Если $g\in G$ и $f\in F$, то

$$\delta(gfg^{-1})=(\delta\circ\omega'(g))(f)=(\omega(g)\circ\delta)(f)=\omega(g)(\delta(f)).$$

Если $f\in F$, то $\delta\circ(\operatorname{Int}_F f)=(\operatorname{Int}_{\widetilde{F}}\delta(f))\circ\delta$ и $\operatorname{Int}_{\widetilde{F}}\delta(f)$ есть автоморфизм комплексной группы Ли $\widetilde{F}$; стало быть, $\operatorname{Int}_{\widetilde{F}}\delta(f)=\omega(f)$.

Можно, следовательно, применить лемму 7, и мы получаем диаграмму

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\delta"'] & G \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\gamma"] & M \arrow[d, "\mathrm{Id}"] \\ \widetilde{F} \arrow[r, "\widetilde{i}"] & \widetilde{G} \arrow[r, "\widetilde{p}"] & M \end{tikzcd}$$

Отождествим $\widetilde{F}$ с нормальной подгруппой в $\widetilde{G}$ с помощью $\widetilde{i}$. Группа $\widetilde{G}$ порождена подгруппами $\widetilde{F}$ и $\gamma(G)$; стало быть, автоморфизмы группы $\widetilde{F}$, определяемые элементами из $\widetilde{G}$, суть автоморфизмы структуры комплексной группы Ли. Согласно предложению 18 § 1, n° 9, на $\widetilde{G}$ существует одна и только одна структура комплексной группы Ли, такая, что $\widetilde{F}$ есть открытая подгруппа Ли в $\widetilde{G}$. С этого места мы наделяем $\widetilde{G}$ этой структурой. Поскольку δ является $\mathbf{R}$-аналитическим морфизмом, γ есть $\mathbf{R}$-аналитический морфизм.

Пара $(\widetilde{G},\gamma)$ обладает свойством (iii), сформулированным в предложении. Покажем, что она обладает свойством (i). Пусть H — комплексная группа Ли и ψ — некоторый $\mathbf{R}$-аналитический морфизм из G в H. Существует $\mathbf{C}$-аналитический морфизм η

из $\widetilde{F}$ в H, такой, что $\eta \circ \delta = \varphi | F$. Пусть $g \in G$. Отображения

$$f \mapsto \eta(\omega(g) f), \qquad f \mapsto \varphi(g) \eta(f) \varphi(g)^{-1}$$

из $\widetilde{F}$ в H суть $\mathbf{C}$-аналитические морфизмы; они совпадают на $\delta(F)$, ибо если $f' \in F$, то

$$\varphi(g) \eta(\delta(f')) \varphi(g)^{-1} = \varphi(g) \varphi(f') \varphi(g)^{-1} = \varphi(g f' g^{-1}) =$$
$$= \eta(\delta(g f' g^{-1})) = \eta(\omega(g) \delta(f')),$$

следовательно, $\eta(\omega(g) f) = \varphi(g) \eta(f) \varphi(g)^{-1}$ для любых $g \in G$ и $f \in \widetilde{F}$. Если через G' обозначено полупрямое произведение группы G на $\widetilde{F}$ относительно ω, то существует, стало быть, морфизм ζ группы G' в H, совпадающий с φ на G и с η на $\widetilde{F}$. Для $f \in F$

$$\zeta\left(\delta\left(f^{-1}\right) f\right) = \eta\left(\delta\left(f^{-1}\right)\right) \varphi(f) = \varphi\left(f^{-1}\right) \varphi(f) = e.$$

Следовательно, ζ определяет при переходе к фактору морфизм ψ из $\widetilde{G}$ в H. Имеем $\psi \circ \gamma = \varphi$ и $\psi \circ \tilde{i} = \eta$. Из последнего равенства следует, что ψ является $\mathbf{C}$-аналитическим.

Пусть, наконец, ψ' есть $\mathbf{C}$-аналитический морфизм из $\widetilde{G}$ в H, такой, что $\varphi = \psi' \circ \gamma$. Тогда

$$\psi' \circ \tilde{i} \circ \delta = \psi' \circ \gamma \circ i = \varphi \circ i = \psi \circ \tilde{i} \circ \delta,$$

а потому $\psi' \circ \tilde{i} = \psi \circ \tilde{i}$. Поскольку $\widetilde{G}$ порождается подгруппами $\tilde{i}(\widetilde{F})$ и $\gamma(G)$, мы получаем $\psi' = \psi$.

Определение 4. *Говорят, что* $(\widetilde{G}, \gamma)$, *или просто* $\widetilde{G}$, *есть универсальная комплексификация группы* G.

Замечания. 1) Пусть $(\widetilde{G}, \gamma)$ — *универсальная комплексификация группы* G. Пусть G_0 (соотв. $\widetilde{G}_0$) — компонента единицы группы G (соотв. $\widetilde{G}$). Согласно доказательству предложения 20, $(\widetilde{G}_0, \gamma | G_0)$ является универсальной комплексификацией группы G_0, а сквозной морфизм

$$G \to \widetilde{G} \to \widetilde{G}/\widetilde{G}_0$$

определяет при переходе к фактору изоморфизм из G/G_0 на $\widetilde{G}/\widetilde{G}_0$.

2) Предположим, что G односвязна. Пусть $\mathfrak{g} = L(G)$, $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ — комплексификация алгебры Ли $\mathfrak{g}$, S' — односвязная комплексная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$, σ — морфизм из G в S', такой, что $L(\sigma)$ есть каноническая инъекция из $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$. Примем вновь обозначения части а) доказательства предложения 20. Если

$H=S'$ и $\varphi=\sigma$, имеем $\varphi^*=\mathrm{Id}_{S'}$. Стало быть, (S', σ) — универсальная комплексификация группы G. Отметим, что σ, вообще говоря, не инъективен (упражнение 16); однако *его ядро дискретно*, ибо $L(\sigma)$ инъективен. С другой стороны, пусть θ — инволюция алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$, определяемая подалгеброй Ли $\mathfrak{g}$, и пусть η — соответствующий автоморфизм вещественной группы Ли, лежащей ниже S'; пусть S'^{η} — множество точек в S', инвариантных относительно η; это — вещественная подгруппа Ли в S' с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ (§ 3, n° 8, следствие 1 предложения 29). В силу следствия 1 предложения 1 n° 1 $\sigma(G)$ есть вещественная интегральная подгруппа в S' с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ и, стало быть, $\sigma(G)$ *является компонентой единицы в* S'^{η}; в частности, $\sigma(G)$ — вещественная подгруппа Ли в S'.

§ 7. Группы Ли над ультраметрическими полями

В этом параграфе мы предполагаем, что нормированное поле K является ультраметрическим и имеет характеристику 0. Через A обозначается кольцо нормирования поля K, через $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в A, через p — характеристика поля классов вычетов $A/\mathfrak{m}$. Если K локально компактно, то $p \neq 0$ (*Комм. алг.*, гл. VI, § 9, теорема 1).

1. Переход от алгебр Ли к группам Ли

Предложение 1. *Пусть G — групускула Ли с единичным элементом e. Существует фундаментальная система открытых окрестностей элемента e в G, образованная подгруппами Ли в G.*

Наделим $L(G)$ нормой, согласованной с ее топологией и такой, что $\|[x, y]\| \leqslant \|x\|\|y\|$, каковы бы ни были x, y в $L(G)$. Пусть G_1 — группа Ли, определяемая алгеброй Ли $L(G)$. В силу теоремы 2 § 4, n° 2, G и G_1 локально изоморфны. Теперь достаточно применить лемму 3 (iii) § 4, n° 2.

Теорема 1. *Пусть L — полная нормируемая алгебра Ли. Существует группа Ли G, такая, что $L(G)$ и L изоморфны. Две такие группы локально изоморфны.*

Первое утверждение было доказано в лемме 3 § 4, n° 2. Второе является частным случаем теоремы 2 § 4, n° 2.

Теорема 2. *Пусть G — группа Ли, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Ли в $L(G)$, допускающая топологическое дополнение. Существует такая подгруппа Ли H в G, что $L(H)=\mathfrak{h}$. Если H_1 и H_2 — две подгруппы Ли в G, такие, что $L(H_1)=L(H_2)=\mathfrak{h}$, то $H_1 \cap H_2$ открыта в H_1 и в H_2.*

Первое утверждение следует из предложения 1 и из теоремы 3 § 4, n° 2. Второе является частным случаем теоремы 3 § 4, n° 2.

Теорема 3. *Пусть G и H — группы Ли, h — непрерывный морфизм из $L(G)$ в $L(H)$.*

(i) *Существуют открытая подгруппа G' в G и морфизм групп Ли φ из G' в H, такой, что $h = L(\varphi)$.*

(ii) *Пусть G_1, G_2 — открытые подгруппы в G и φ_i — морфизм из G_i в H, такой, что $h = L(\varphi_i)$. Тогда φ_1 и φ_2 совпадают в некоторой открытой подгруппе в G.*

Ввиду предложения 1 это следует из теоремы 1 § 4, n° 1.

Предложение 2. *Пусть G — группа Ли, $\mathfrak{h}$ — подалгебра Ли в $L(G)$, допускающая топологическое дополнение. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *Существует открытая подгруппа G' в G и нормальная подгруппа Ли H в G', такие, что $L(H) = \mathfrak{h}$.*

(ii) *$\mathfrak{h}$ есть идеал в $L(H)$.*

Если существуют G' и H со свойствами, указанными в (i), то $L(G') = L(G)$ и $L(H)$ есть идеал в $L(G')$ в силу предложения 47 § 3, n° 12.

Предположим, что $\mathfrak{h}$ есть идеал в $L(G)$. Существует такая группа Ли F, что $L(F) = L(G)/\mathfrak{h}$ (теорема 1). Пусть h — канонический морфизм из $L(G)$ на $L(F)$. В силу теоремы 3 (i) существуют открытая подгруппа Ли G' в G и такой морфизм групп Ли φ из G' в F, что $L(\varphi) = h$. Согласно n° 8, § 3, ядро H морфизма φ является подгруппой Ли в G' и $L(H) = \operatorname{Ker} L(\varphi) = \operatorname{Ker} h = \mathfrak{h}$. Наконец, H нормальна в G', поскольку $H = \operatorname{Ker} \varphi$.

2. Экспоненциальные отображения

Предложение 3. *Пусть G — группа Ли. Существует экспоненциальное отображение φ для G, обладающее следующими свойствами:*

(i) *φ определено в некоторой открытой подгруппе U аддитивной группы $L(G)$;*

(ii) *$\varphi(U)$ есть открытая подгруппа в G, и φ есть изоморфизм аналитического многообразия U на аналитическое многообразие $\varphi(U)$;*

(iii) *$\varphi(nx) = \varphi(x)^n$ для всякого $x \in U$ и всякого $n \in \mathbf{Z}$.*

Наделим $L(G)$ нормой, согласованной с ее топологией и такой, что $\|[x, y]\| \leqslant \|x\| \|y\|$ для x, y из $L(G)$. Пусть G_1 — группа Ли, определенная алгеброй Ли $L(G)$. Пусть $\psi = \mathrm{Id}_{G_1}$; это — экспоненциальное отображение для G_1. Для всякого $\mu > 0$ обозначим через L_μ множество таких $x \in L(G)$, что $\|x\| < \mu$.

Тогда, для достаточно малого μ, L_μ — открытая подгруппа аддитивной группы $L(G)$, $\psi(L_\mu)$ — открытая подгруппа в G_1 (§ 4, n° 2, лемма 3), $\psi \mid L_\mu$ — морфизм аналитических многообразий из L_μ на $\psi(L_\mu)$ и $\psi(nx) = \psi(x)^n$ для всякого $x \in L_\mu$ и всякого $n \in \mathbf{Z}$. Множества L_μ образуют фундаментальную систему окрестностей элемента 0 в $L(G)$. В силу теоремы 1 существуют число μ и открытая подгруппа G' в G, такие, что $\psi(L_\mu)$ и G' изоморфны, откуда следует требуемое утверждение.

Предложение 4. *Пусть G — группа Ли, φ — инъективное экспоненциальное отображение для G. Предположим, что $p > 0$. Каковы бы ни были x, y в $L(G)$,*

$$x + y = \lim_{n \to +\infty} p^{-n} \varphi^{-1} (\varphi(p^n x) \varphi(p^n y)), \tag{1}$$

$$[x, y] = \lim_{n \to +\infty} p^{-2n} \varphi^{-1} (\varphi(p^n x) \varphi(p^n y) \varphi(-p^n x) \varphi(-p^n y)). \tag{2}$$

Это частные случаи предложения 4 § 4, n° 3.

3. Стандартные группы [1])

Если $S(X_1, X_2, \ldots, X_r)$ — формальный ряд с коэффициентами из A, то, каковы бы ни были $x_1, \ldots, x_r$ в $\mathfrak{m}$, ряд $S(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ сходится. Более точно, $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \times \ldots \times \mathfrak{m}$ содержится в области строгой сходимости ряда S (*Мн. Св. рез.*, 4.1.3).

Определение 1. *Пусть r — целое число $\geqslant 0$. Стандартной группой размерности r над K называется группа Ли G, обладающая следующими свойствами*:

(i) *аналитическое многообразие, лежащее ниже G, есть* $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \times \ldots \times \mathfrak{m}$ (r множителей);

(ii) *существует формальный ряд F от $2r$ переменных с коэффициентами в A^r, не имеющий свободного члена и такой, что $x \,.\, y = F(x, y)$, каковы бы ни были x, y в G.*

Имеем тогда $0 \,.\, 0 = 0$, стало быть, единичный элемент в G является началом координат в $\mathfrak{m} \times \ldots \times \mathfrak{m}$.

Отождествим $L(G)$ с K^r. Согласно формуле (13) § 5, структурные константы алгебры Ли $L(G)$ относительно канонического базиса принадлежат кольцу A. Нам придется в одном и том же рассуждении рассматривать элементы из $\mathfrak{m} \times \ldots \times \mathfrak{m}$ то как элементы из G, то как элементы из $L(G)$.

Пример. Пусть $G = 1 + \mathbf{M}_n(\mathfrak{m})$; это открытое подмножество в $\mathbf{M}_n(K)$. Если $x \in G$, то $\det x \in 1 + \mathfrak{m}$ и потому $G \subset \mathbf{GL}(n, K)$.

[1]) Результаты n° 3 и 4 и их доказательства остаются в силе, если поле K имеет характеристику > 0.

Ясно, что $GG \subset G$. Если $x = 1 + y$, где $y \in \mathbf{M}_n(\mathfrak{m})$, то вычисление обратной матрицы показывает сначала, что $x^{-1} \in \mathbf{M}_n(A)$; полагая $x^{-1} = 1 + y'$, получаем $y + y' + yy' = 0$; стало быть, $y' \in \mathbf{M}_n(\mathfrak{m})$ и, следовательно, $x^{-1} \in G$. Таким образом, G есть открытая подгруппа в $\mathbf{GL}(n, K)$. Отождествим G с $\mathfrak{m}^{n^2}$ при помощи отображения $(\delta_{ij} + y_{ij}) \longmapsto (y_{ij})$. Ясно, что G — стандартная группа.

Теорема 4. *Пусть G — конечномерная группа Ли. Существует открытая подгруппа в G, изоморфная стандартной группе.*

Заменив G некоторой ее открытой подгруппой, сведем все к случаю, когда G является открытым подмножеством из K^r с единичным элементом 0, а координаты произведения x, y и обратного элемента $x^{[-1]}$ задаются формулами

$$(x \,.\, y)_i = x_i + y_i + \sum_{|\alpha| \geqslant 1,\, |\beta| \geqslant 1} c_{\alpha\beta i} x^\alpha y^\beta \quad (i = 1, 2, \ldots, r), \tag{3}$$

$$(x^{[-1]})_i = -x_i + \sum_{|\alpha| > 1} d_{\alpha i} x^\alpha \quad (i = 1, 2, \ldots, r), \tag{4}$$

причем ряды в правых частях этих формул сходятся при x, y из G (§ 5, n° 1). Пусть $\lambda \in K^*$; перенесем групповой закон с G на $G' = \lambda G$ посредством гомотетии порядка λ. Для x', y' из G' произведение $x' \,.\, y'$ и обратный элемент $x'^{[-1]}$, вычисленные в G', имеют координаты

$$(x' \,.\, y')_i = x'_i + y'_i + \sum_{|\alpha| \geqslant 1,\, |\beta| \geqslant 1} c'_{\alpha\beta i} x'^\alpha y'^\beta \quad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

$$(x'^{[-1]})_i = -x'_i + \sum_{|\alpha| > 1} d'_{\alpha i} x'^\alpha \quad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

где

$$c'_{\alpha\beta i} = \lambda^{-|\alpha| - |\beta| + 1} c_{\alpha\beta i}, \quad d'_{\alpha i} = \lambda^{-|\alpha| + 1} d_{\alpha i}.$$

Поскольку ряды (3) и (4) сходятся, мы видим, что при достаточно больших $|\lambda|$ и произвольных α, β, i

$$|c^i_{\alpha\beta i}| \leqslant 1, \quad |d'_{\alpha i}| \leqslant 1,$$

т. е. $c'_{\alpha\beta i} \in A$ и $d'_{\alpha i} \in A$; с другой стороны, $G' \supset \mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \times \ldots \times \mathfrak{m}$. Тогда $\mathfrak{m} \times \mathfrak{m} \times \ldots \times \mathfrak{m}$ есть открытая подгруппа в G' и стандартная группа.

4. Фильтрация стандартных групп

Примем вновь обозначения определения 1. Выберем число $a > 1$ и такое вещественное нормирование v поля K, что $|x| = a^{-v(x)}$ для всякого $x \in K$ (*Комм. алг.*, гл. VI, § 6, предложение 3). Если $\mathfrak{a}$ — ненулевой (стало быть, открытый) идеал в A,

содержащийся в $\mathfrak{m}$, обозначим через $G(\mathfrak{a})$ множество элементов в G, координаты которых принадлежат $\mathfrak{a}$. Если $\lambda \in \mathbf{R}$, через $\mathfrak{a}_\lambda$ (соотв. $\mathfrak{a}_\lambda^+$) обозначается множество таких $x \in K$, что $v(x) \geqslant \lambda$ соотв. $v(x) > \lambda$); имеем $\mathfrak{a}_0 = A$, $\mathfrak{a}_0^+ = \mathfrak{m}$. Для $x = (x_1, \ldots, x_r) \in G$ положим

$$\omega(x) = \inf(v(x_1), \ldots, v(x_r)). \tag{5}$$

Предложение 5. *Пусть G — стандартная группа.*

(i) *Если $\mathfrak{a}$ — ненулевой идеал кольца A, содержащийся в $\mathfrak{m}$, то $G(\mathfrak{a})$ есть открытая нормальная подгруппа в G.*

(ii) *Множества $G(\mathfrak{a}_\lambda)$ для $\lambda > 0$ образуют фундаментальную систему окрестностей элемента e в G.*

(iii) *Предположим, что $\mathfrak{a}_\lambda \subset \mathfrak{a}$ для $\lambda \geqslant \lambda_0$, и наделим факторгруппы $G(\mathfrak{a})/G(\mathfrak{a}_\lambda)$ для $\lambda \geqslant \lambda_0$ дискретной топологией. Тогда топологическая группа $G(\mathfrak{a})$ есть проективный предел групп $G(\mathfrak{a})/G(\mathfrak{a}_\lambda)$.*

(iv) *Пусть $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — ненулевые идеалы в A, содержащиеся в $\mathfrak{m}$, такие, что $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b} \supset \mathfrak{a}^2$. Отображение $x \mapsto (x_1 \bmod \mathfrak{b}, \ldots, x_r \bmod \mathfrak{b})$ из $G(\mathfrak{a})$ в $(\mathfrak{a}/\mathfrak{b}) \times \ldots \times (\mathfrak{a}/\mathfrak{b})$ определяет при переходе к фактору изоморфизм группы $G(\mathfrak{a})/G(\mathfrak{b})$ на аддитивную группу $(\mathfrak{a}/\mathfrak{b}) \times \ldots \times (\mathfrak{a}/\mathfrak{b})$.*

Если $x \in G$ и $y \in G(\mathfrak{a})$, то координаты элементов x и $x.y$ равны по модулю $\mathfrak{a}$. Стало быть, если x', x'' лежат в G и y', y'' лежат в $G(\mathfrak{a})$, то координаты элементов $x'.x''$ и $(x'.y').(x''.y'')$ равны по модулю $\mathfrak{a}$. Это доказывает (i).

Утверждение (ii) очевидно, а (iii) следует из изложенного выше и из *Общ. топ.*, 1968, гл. III, § 7, предложение 2.

Если $x \in G(\mathfrak{a})$ и $y \in G(\mathfrak{a})$, то координаты элемента $x.y$ сравнимы с координатами элемента $x+y$ по модулю $G(\mathfrak{a}^2)$ в силу формулы (4) из § 5. Это доказывает (iv).

Следствие. *Предположим, что K локально компактно, и пусть $q = \mathrm{Card}(A/\mathfrak{m})$.*

(i) *Если $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}^a$ и $\mathfrak{b} = \mathfrak{m}^b$, где $b \geqslant a \geqslant 1$, то $G(\mathfrak{a})/G(\mathfrak{b})$ есть p-группа мощности $q^{r(b-a)}$.*

(ii) *$G(\mathfrak{a})$ является проективным пределом p-групп.*

Число элементов группы $G(\mathfrak{a})/G(\mathfrak{b})$ равно $(\mathrm{Card}(\mathfrak{a}/\mathfrak{b}))^r$; если $b = a + 1$, то $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ есть векторное пространство размерности 1 над $A/\mathfrak{m}$, откуда следует утверждение (i) в этом случае; общий случай получается теперь индукцией по $b - a$. Утверждение (ii) следует из (i) и предложения 5 (iii).

Предложение 6. *Пусть $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{c}'$ — ненулевые идеалы кольца A, содержащиеся в $\mathfrak{m}$ и такие, что*

$$\mathfrak{c}' \subset \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{a}\mathfrak{b}^2 \subset \mathfrak{c}', \quad \mathfrak{a}^2\mathfrak{b} \subset \mathfrak{c}'.$$

Если $x \in G(\mathfrak{a})$ *и* $y \in G(\mathfrak{b})$, *то элементы* $x^{[-1]} . y^{[-1]} . x . y$, $x . y . x^{[-1]} . y^{[-1]}$, $[x, y]$ *принадлежат* $G(\mathfrak{c})$ *и сравнимы по модулю* $G(\mathfrak{c}')$.

В силу предложения 1 § 5, n° 2, существуют такие $c_{\alpha\beta} \in A^r$, что

$$x^{[-1]} . y^{[-1]} . x . y - [x, y] = \sum_{|\alpha|+|\beta| \geqslant 3} c_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta.$$

Если $x = 0$ или если $y = 0$, то $x^{[-1]} . y^{[-1]} . x . y - [x, y] = 0$; стало быть, $c_{0\beta} = c_{\alpha 0} = 0$. С другой стороны, из условий

$$x \in G(\mathfrak{a}), \quad y \in G(\mathfrak{b}), \quad |\alpha| \geqslant 1, \quad |\beta| \geqslant 1, \quad |\alpha| + |\beta| \geqslant 3$$

следует, что

$$c_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta \in G(\mathfrak{a}^2\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathfrak{b}^2) \subset G(\mathfrak{c}');$$

стало быть, $x^{[-1]} . y^{[-1]} . x . y - [x, y] \in G(\mathfrak{c}')$. Аналогично, видим, что

$$x . y . x^{[-1]} . y^{[-1]} - [x, y] \in G(\mathfrak{c}').$$

Наконец, в силу формулы (13) из § 5 $[x, y] \in G(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) \subset G(\mathfrak{c})$. Ч. Т. Д.

Предложение 7. (i) *Семейство* $(G(\mathfrak{a}_\lambda))$ *есть центральная фильтрация на* G (гл. II, § 4, n° 4, определение 2).

(ii) *Для* $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$ *имеем* $G(\mathfrak{a}_\lambda) = \{x \in G \mid \omega(x) \geqslant \lambda\}$, $G(\mathfrak{a}_\lambda^+) = \{x \in G \mid \omega(x) > \lambda\}$.

Утверждение (ii) очевидно. Докажем (i). Ясно, что $G(\mathfrak{a}_\lambda) = \bigcap_{\mu < \lambda} G(\mathfrak{a}_\mu)$ и что $G = \bigcup_{\lambda > 0} G(\mathfrak{a}_\lambda)$. С другой стороны, если $x \in G(\mathfrak{a}_\lambda)$ и $y \in G(\mathfrak{a}_\mu)$, то

$$x^{[-1]} . y^{[-1]} . x . y \in G(\mathfrak{a}_{\lambda+\mu})$$

в силу предложения 6, применяя которое мы полагаем $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\lambda$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_\mu$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}' = \mathfrak{a}_{\lambda+\mu}$.

В силу гл. II, § 4, n° 4, можно образовать группу $\operatorname{gr}(G)$, ассоциированную с группой G, наделенной центральной фильтрацией $(G(\mathfrak{a}_\lambda))$. Положив $G_\lambda = G(\mathfrak{a}_\lambda)/G(\mathfrak{a}_\lambda^+)$ для всякого $\lambda > 0$, получим $\operatorname{gr}(G) = \bigoplus_{\lambda > 0} G_\lambda$. Напомним (*там же*, предложение 1), что коммутатор в G позволяет следующим образом определить операцию коммутирования в $\operatorname{gr}(G)$, относительно которой $\operatorname{gr}(G)$ является алгеброй Ли: если $\bar{x} \in G_\lambda$ и $\bar{y} \in G_\mu$, выберем в $G(\mathfrak{a}_\lambda)$ представитель x элемента $\bar{x}$ и в $G(\mathfrak{a}_\mu)$ представитель y элемента $\bar{y}$; тогда $[\bar{x}, \bar{y}]$ есть класс элемента $x^{[-1]} . y^{[-1]} . x . y \in G(\mathfrak{a}_{\lambda+\mu})$ в $G_{\lambda+\mu}$. Применяя предложение 6 с $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\lambda$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_\mu$, $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}_{\lambda+\mu}$, $\mathfrak{c}' = \mathfrak{a}_{\lambda+\mu}^+$, видим, что $[\bar{x}, \bar{y}]$ также является классом элемента $[x, y]$ в $G_{\lambda+\mu}$. Таким образом, если G рассматривается как подал-

гебра Ли в $L(G) = K^r$, фильтрованная идеалами $G(\mathfrak{a}_\lambda)$, то ассоциированная с ней градуированная алгебра Ли (гл. II, § 4, n° 3) совпадает с $\mathrm{gr}(G)$.

5. Степени в стандартных группах

Сохраняются обозначения n° 4.

Предложение 8. *Пусть $n \in \mathbf{Z}$ и h_n — отображение $x \mapsto x^n$ из G в G. Пусть $\mathfrak{a}$ — ненулевой идеал кольца A, содержащийся в $\mathfrak{m}$ и такой, что $n \notin \mathfrak{a}$. Тогда $h_n | G(\mathfrak{a})$ есть изоморфизм аналитического многообразия $G(\mathfrak{a})$ на аналитическое многообразие $G(n\mathfrak{a})$.*

По определению стандартных групп h_n совпадает во всей группе G с суммой некоторого степенного ряда с коэффициентами из A^r. В силу формулы (4) § 5 этот ряд имеет вид

$$h_n(x) = nx + \sum_{|\alpha| \geqslant 2} a_\alpha x^\alpha.$$

Стало быть, при $x \in G$

$$h_n(nx) = n^2\Big(x + \sum_{|\alpha| \geqslant 2} a_\alpha n^{|\alpha|-2} x^\alpha\Big) = n^2 S(x),$$

если положить $S(x) = x + \sum_{|\alpha| \geqslant 2} a_\alpha n^{|\alpha|-2} x^\alpha$. Этот ряд $S(x)$ определяет аналитическое отображение из G в G, которое мы также обозначим через S. В силу *Alg.*, chap. IV, § 6, proposition 8, существует такой степенной ряд S' от r переменных с коэффициентами в A^r, что $S'(S(X)) = S(S'(X)) = X$. Стало быть, S есть изоморфизм аналитического многообразия G на себя, и для всякого ненулевого идеала $\mathfrak{b}$ кольца A, содержащегося в $\mathfrak{m}$, имеем $S(G(\mathfrak{b})) \subset G(\mathfrak{b})$, $S'(G(\mathfrak{b})) \subset G(\mathfrak{b})$, а потому $S(G(\mathfrak{b})) = G(\mathfrak{b})$. Поскольку $h_n(y) = n^2 S\left(\frac{1}{n} y\right)$ для $y \in nG$, мы видим, что $h_n | nG(\mathfrak{b})$ является изоморфизмом аналитического многообразия $nG(\mathfrak{b})$ на аналитическое многообразие $n^2 G(\mathfrak{b})$. Но поскольку $n \notin \mathfrak{a}$, $|n| > |\lambda|$ для всякого $\lambda \in \mathfrak{a}$ и, следовательно, $n^{-1}\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$, значит, $\mathfrak{a}$ имеет вид $n\mathfrak{b}$, где $\mathfrak{b}$ — ненулевой идеал кольца A, содержащийся в $\mathfrak{m}$.

Следствие. *Если n обратимо в A, то h_n есть изоморфизм аналитического многообразия G на себя. Для всякого ненулевого идеала $\mathfrak{a}$ кольца A, содержащегося в $\mathfrak{m}$, имеем $h_n(G(\mathfrak{a})) = G(\mathfrak{a})$. Для всякого $x \in G$ имеем $\omega(x^n) = \omega(x)$.*

Это сразу следует из предложения 8.

Предложение 9. *Предположим, что* $p \neq 0$.

(i) *Пусть* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ — *ненулевые идеалы кольца* A, *такие, что* $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$. *В группе* $G(\mathfrak{a})/G(\mathfrak{b})$ *порядок любого элемента есть степень числа* p.

(ii) *Предположим, что* $v(p) = 1$. *Если элемент* $x \in G$ *таков, что* $\omega(x) > 1/(p-1)$, *то*

$$\omega(x^p) = \omega(x) + 1.$$

В силу формулы (4) из § 5 для всякого $x \in G$

$$x^p = px + \sum_{|\alpha| \geqslant 2} c_\alpha x^\alpha,$$

где $c_\alpha \in A^r$ для всякого α. При доказательстве утверждения (i) также можно предполагать, что $v(p) = 1$. Тогда, если $\omega(x) \geqslant 1$, мы получаем отсюда, что $\omega(x^p) \geqslant \omega(x) + 1$; стало быть, $\omega\left(x^{p^n}\right)$ стремится к $+\infty$, когда n стремится к $+\infty$; это доказывает (i). Поскольку $\binom{p}{i}$ делится на p для $1 \leqslant i \leqslant p-1$, предложение 2 § 5, n° 3, показывает, что $c_\alpha \in pA^r$ для $2 \leqslant |\alpha| \leqslant$ $\leqslant p-1$; значит,

$$\omega(c_\alpha x^\alpha) > \omega(px) = \omega(x) + 1 \quad \text{для} \quad 2 \leqslant |\alpha| \leqslant p-1.$$

С другой стороны, если $|\alpha| \geqslant p$, то $\omega(c_\alpha x^\alpha) \geqslant p\omega(x)$ и $p\omega(x) >$ $> \omega(x) + 1$, если $\omega(x) > 1/(p-1)$. Это доказывает (ii).

6. Логарифмическое отображение

Лемма 1. *Предположим, что* $p \neq 0$. *Пусть* G — *группа Ли,* G_1 — *открытая подгруппа в* G, *изоморфная стандартной группе, и* $x \in G$. *Следующие условия эквивалентны*:

(i) *существует степень элемента* x, *принадлежащая группе* G_1;

(ii) *существует такая строго возрастающая последовательность* (n_i) *целых чисел, что* x^{n_i} *стремится к* e, *когда* i *стремится к* $+\infty$.

Импликация (ii) $\Rightarrow$ (i) очевидна.

Для доказательства импликации (i) $\Rightarrow$ (ii) предположим, что $y = x^m \in G_1$. Согласно предложению 9 (i) n° 5, y^{p^n} стремится к e, когда n стремится к $+\infty$; другими словами, x^{mp^n} стремится к e, когда n стремится к $+\infty$.

Предложение 10. *Предположим, что* $p \neq 0$. *Пусть* G — *конечномерная группа Ли и* $G_\mathfrak{f}$ — *множество элементов* $x \in G$, *для каждого из которых существует такая строго возрастающая последовательность* (n_i) *целых чисел, что* x^{n_i} *стремится к* e, *когда* i *стремится к* $+\infty$.

(i) *Множество* $G_{\mathfrak{f}}$ *открыто в* G.

(ii) *Существует одно и только одно отображение* ψ *из* $G_{\mathfrak{f}}$ *в* $L(G)$, *обладающее следующими свойствами*:

а) $\psi(x^n) = n\psi(x)$ *для всякого* $x \in G_{\mathfrak{f}}$ *и всякого* $n \in \mathbf{Z}$;

б) *существует такая открытая окрестность* V *элемента* e *в* $G_{\mathfrak{f}}$, *что* $\psi | V$ *является обратным отображением к некоторому инъективному экспоненциальному отображению.*

(iii) *Отображение* ψ *аналитично.*

Существует открытая подгруппа в G, изоморфная стандартной группе (n° 3, теорема 4). Утверждение (i) следует тогда из леммы 1.

Пусть U — открытая подгруппа в $L(G)$ и $\varphi: U \to \varphi(U)$ — экспоненциальное отображение для G, обладающее свойствами, указанными в предложении 3 n° 2. Можно считать U настолько малой, что $\varphi(U) \subset G_{\mathfrak{f}}$. Пусть $x \in G_{\mathfrak{f}}$. Существует такое $m \in \mathbf{Z} - \{0\}$, что $x^m \in \varphi(U)$. Элемент $\frac{1}{m}\varphi^{-1}(x^m)$ не зависит от выбора числа m. В самом деле, пусть $m' \in \mathbf{Z} - \{0\}$ таково, что $x^{m'} \in \varphi(U)$. Тогда $x^{mm'} \in \varphi(U)$ и

$$m'\varphi^{-1}(x^m) = \varphi^{-1}(x^{mm'}) = m\varphi^{-1}(x^{m'}),$$

откуда следует наше утверждение. Положим $\psi(x) = \frac{1}{m}\varphi^{-1}(x^m)$. Имеем $\psi | \varphi(U) = \varphi^{-1}$. С другой стороны, если $n \in \mathbf{Z}$, то

$$\psi(x^n) = \frac{1}{m}\varphi^{-1}(x^{nm}) = \frac{n}{m}\varphi^{-1}(x^m) = n\psi(x).$$

Стало быть, ψ обладает свойствами а) и б) предложения. В окрестности элемента x отображение ψ является композицией отображений $x \mapsto x^m$, $y \mapsto \varphi^{-1}(y)$ и $z \mapsto \frac{1}{m}z$; значит, ψ аналитично в $G_{\mathfrak{f}}$.

Наконец, пусть ψ' — отображение из $G_{\mathfrak{f}}$ в $L(G)$ и V' — окрестность элемента e в $G_{\mathfrak{f}}$, такие, что $\psi'(x^n) = n\psi'(x)$ для $x \in G_{\mathfrak{f}}$ и $n \in \mathbf{Z}$, и такие, что $\psi' | V'$ является обратным к некоторому инъективному экспоненциальному отображению. Тогда ψ и ψ' совпадают в некоторой окрестности W элемента e. Если $x \in G_{\mathfrak{f}}$, существует такое $n \in \mathbf{Z}$, что $x^n \in W$. Тогда

$$n\psi'(x) = \psi'(x^n) = \psi(x^n) = n\psi(x),$$

а потому $\psi = \psi'$.

Определение 2. *Отображение* ψ *из предложения* 10 *называется логарифмическим отображением для* G *и обозначается через* $\log_G$ *или просто* $\log$.

Предложение 11. *Предположим, что* $p \neq 0$. *Пусть* x, y — *два перестановочных элемента в* $G_{\mathfrak{f}}$. *Тогда* $xy \in G_{\mathfrak{f}}$ *и* $\log(xy) = \log x + \log y$.

То, что $xy \in G_{\mathfrak{f}}$, следует из леммы 1. Пусть U — открытая подгруппа аддитивной группы $L(G)$ и φ: $U \to \varphi(U)$ — экспоненциальное отображение для G, обладающие свойствами, указанными в предложении 3 n° 2; можно считать U настолько малой, что $\log|\varphi(U)$ будет обратным отображением к φ. При подходящем выборе числа $n \in \mathbf{Z} - \{0\}$ получаем $x^n \in \varphi(U)$, $y^n \in \varphi(U)$. Положим $u = \log x^n$, $v = \log y^n$, откуда $x^n = \varphi(u)$, $y^n = \varphi(v)$. Согласно формуле (2), $[u, v] = 0$. Формула Хаусдорфа показывает тогда, что $\varphi(\lambda(u+v)) = \varphi(\lambda u)\varphi(\lambda v)$, если $|\lambda|$ достаточно мало; стало быть, для всякого достаточно большого целого числа i

$$\varphi(p^i(u+v)) = \varphi(p^i u)\varphi(p^i v),$$

т. е.

$$p^i(\log x^n + \log y^n) = \log\left(x^{np^i} y^{np^i}\right),$$

откуда

$$np^i(\log x + \log y) = np^i \log(xy).$$

Предложение 12. *Предположим, что* $p \neq 0$. *Пусть* $x \in G_{\mathfrak{f}}$. *Следующие условия эквивалентны*:

(i) $\log x = 0$;

(ii) x *имеет конечный порядок в* G.

Если существует такое целое число $n > 0$, что $x^n = e$, то мы получаем

$$n \log x = \log x^n = 0,$$

откуда $\log x = 0$. Если $\log x = 0$, обозначим через V окрестность элемента e в $G_{\mathfrak{f}}$, такую, что $\log|V$ является обратным отображением к некоторому инъективному экспоненциальному отображению. Существует такое целое число $n > 0$, что $x^n \in V$; равенство $\log x^n = 0$ влечет за собой $x^n = e$.

Предложение 13. *Предположим, что* $p \neq 0$. *Если* G *компактна или стандартна, то* $G_{\mathfrak{f}} = G$.

Если G стандартна, достаточно воспользоваться леммой 1. Допустим, что G компактна. Пусть $x \in G$ и V — некоторая окрестность элемента e в G. Обозначим через y некоторую предельную точку последовательности $(x^n)_{n \geqslant 0}$. Каково бы ни было $n > 0$, существует два целых числа n_1, n_2, такие, что $n_1 \geqslant 2n_2 \geqslant 2n$ и $x^{n_1} \in yV$, $x^{n_2} \in yV$, откуда $x^{n_1 - n_2} \in V^{-1}V$ и $n_1 - n_2 \geqslant n$. Следовательно, $x \in G_{\mathfrak{f}}$.

Следствие. *Предположим, что K локально компактно. Тогда $G_{\mathfrak{f}}$ является объединением всех компактных подгрупп группы G.*

Пусть $x \in G$. Если x принадлежит некоторой компактной подгруппе в G, то $x \in G_{\mathfrak{f}}$ (предложение 13). Предположим, что $x \in G_{\mathfrak{f}}$. Поскольку K локально компактно, существует открытая подгруппа G_1 в G, которая компактна. Далее, существует такое целое число $m > 0$, что $x^m \in G_1$. Замкнутая подгруппа G_2, порожденная элементом x^m, содержится в G_1 и, значит, компактна. Тогда x коммутирует с элементами из G_2, а потому $G_2 \cup xG_2 \cup \ldots \cup x^{m-1}G_2$ есть компактная подгруппа в G, содержащая x.

Пример. Предположим, что K локально компактно. Пусть U — множество обратимых элементов кольца A; это открытая и компактная подгруппа группы Ли K^*. В силу предложения 13 $U \subset (K^*)_{\mathfrak{f}}$; с другой стороны, если элемент $x \in K^*$ таков, что $x \notin U$, то либо x^n стремится к 0, когда n стремится к $+\infty$, либо x^n стремится к 0, когда n стремится к $-\infty$; стало быть, $U = (K^*)_{\mathfrak{f}}$. Функция $\log_{K^*}$ определена и аналитична в U, принимает значения в $L(K^*) = K$ и такова, что $\log_{K^*}(xy) = \log_{K^*}(x) + \log_{K^*}(y)$, каковы бы ни были x, y из U; элементы из U, такие, что $\log_{K^*}(x) = 0$, суть корни из единицы в K.

Вернемся к обозначениям из n°n° 3, 4, 5.

Предложение 14. *Предположим, что $p \neq 0$ и v выбрано так, что $v(p) = 1$. Пусть G — стандартная группа, $E(X)$* (соотв. *$L(X)$*) *— разложение в степенной ряд в 0 некоторого экспоненциального отображения для G* (соотв. *логарифмического отображения для G*).

(i) *Область строгой сходимости* (*Мн. Св. рез.*, 4.1.3) *ряда E содержит множество Δ таких $x \in G$, что $\omega(x) > 1/(p-1)$. Обозначим через E' отображение, определенное в Δ с помощью этого ряда. Тогда E' является экспоненциальным отображением для G и изоморфизмом многообразия Δ на себя.*

(ii) *Область строгой сходимости ряда L содержит G. Обозначим через L' отображение, определенное в G этим рядом. Тогда L' есть логарифмическое отображение для G, и ограничение отображения L' на Δ является обратным отображением к E'.*

(iii) *Отображение E' есть изоморфизм множества Δ, наделенного законом умножения, определяемым формулой Хаусдорфа, на подгруппу Δ в G.*

Вернемся к обозначениям из § 5, n°n° 3 и 4. Имеем $E = \sum_{m \geqslant 1} \psi_{m,m}/m!$ (§ 5, n° 4, предложение 3). Поскольку коэффициенты $c_{\alpha\beta\gamma}$ принадлежат кольцу A, получаем $\|\psi_{m,m}\| \leqslant 1$

(*Мн. Св. рез.*, приложение; мы предполагаем, что K^r наделено нормой

$$\|(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)\| = \sup(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_r|).)$$

Согласно лемме 1 гл. II, § 8, n° 1, $v(m!) \leqslant (m-1)/(p-1)$. Если $\omega(x) > 1/(p-1)$, мы видим, что $m\omega(x) - v(m!)$ стремится к $+\infty$ вместе с m, откуда следует, что $\frac{1}{|m!|}\|x\|^m$ стремится к 0, когда m стремится к $+\infty$.

$$\left\|\frac{\psi_{m,m}}{m!}\right\| \|x^m\| \leqslant \frac{1}{|m!|}\|x\|^m,$$

$$\omega\left(\frac{\psi_{m,m}(x)}{m!}\right) > \frac{m}{p-1} - \frac{m-1}{p-1} = \frac{1}{p-1} \quad \text{для} \quad m \geqslant 1.$$

Следовательно, Δ содержится в области строгой сходимости ряда E и $E'(\Delta) \subset \Delta$. Ясно, что E' — экспоненциальное отображение.

Если L_m обозначает однородную компоненту степени m ряда L, то предложение 3 § 5, n° 4, показывает, что всякий коэффициент в L_m имеет вид $a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \ldots + \frac{1}{m}a_m$, где $a_1, a_2, \ldots, a_m$ принадлежат A; но

$$\inf\left(v(1), v\left(\frac{1}{2}\right), \ldots, v\left(\frac{1}{m}\right)\right) = O(\log m),$$

когда m стремится к $+\infty$, и

$$\inf\left(v(1), v\left(\frac{1}{2}\right), \ldots, v\left(\frac{1}{m}\right)\right) \geqslant v\left(\frac{1}{m!}\right) \geqslant -\frac{m-1}{p-1}.$$

Следовательно, если $\omega(x) > 0$, то $\|L_m\| \cdot \|x\|^m$ стремится к 0, когда m стремится к $+\infty$, так что G содержится в области строгой сходимости ряда L. С другой стороны, если $\omega(x) > \frac{1}{p-1}$, то $\omega(L_m(x)) > \frac{m}{p-1} - \frac{m-1}{p-1} = \frac{1}{p-1}$ при $m \geqslant 1$ и потому $L'(\Delta) \subset \Delta$.

Поскольку формальные ряды $L(E(X))$ и $E(L(X))$ равны X, n° 4.1.5 из *Мн. Св. рез.* показывает, что $L'(E'(x)) = E'(L'(x)) = x$ при $x \in \Delta$. Стало быть, E' является изоморфизмом многообразия Δ на себя, и обратный морфизм есть ограничение отображения L' на Δ.

Для целого числа $n > 0$ справедливо равенство $L(X^{[n]}) = nL(X)$ (см. § 5, n° 4). Поскольку G содержится в области строгой сходимости рядов L и $X^{[n]}$, для всякого $x \in G$ получаем, следовательно, $L'(x^n) = nL'(x)$. Из соотношения $L' | \Delta = E'^{-1}$ вытекает, что $L'(x^n) = \log x^n$ для достаточно больших n. Значит, $L'(x) = \log x$. Таким образом, мы доказали утверждения (i) и (ii).

Пусть $H = \sum_{r, s \geqslant 0} H_{r,s}$ — формальный ряд Хаусдорфа и h—функция Хаусдорфа для алгебры Ли $L(G)$. Область строгой сходимости $\tilde{H}$ содержит $\Delta \times \Delta$, и h определена в $\Delta \times \Delta$ (гл. II, § 8, предложение 2). Если x, y достаточно близки к 0, то

$$E'(x) E'(y) = E'(h(x, y))$$

(§ 4, теорема 4(v)). Стало быть, в обозначениях определения 1 n° 3 формальные ряды $F(E(X), E(Y))$ и $E(H(X, Y))$ совпадают. Пусть x, y лежат в Δ. В силу формулы (14) гл. II, § 8,

$$\sup_m \left\| \frac{\psi_{m,m}}{m!} \right\| (\sup(\|x\|, \|y\|))^m < 1,$$

$$\sup_{r,s} \| H_{r,s} \| \|x\|^r \|y\|^s < |p|^{1/(p-1)}.$$

Согласно *Мн. Св. рез.*, 4.1.5, заменяя в ряде $F(E(X), E(Y))$ элементы X, Y элементами x, y, мы получаем $E'(x) E'(y)$, и делая в ряде $E(H(X, Y))$ такую же подстановку, получаем $E'(h(x, y))$. Стало быть, $E'(x) E'(y) = E'(h(x, y))$.

§ 8. Группы Ли над R или $\mathbf{Q}_p$

1. Непрерывные морфизмы

Теорема 1. *Пусть G и H — две групускулы Ли над* **R** *или* $\mathbf{Q}_p$. *Пусть f — непрерывный морфизм из G в H. Тогда f аналитичен.*

Наделим $L(G)$ и $L(H)$ нормами, определяющими их топологию и такими, что $\|[x, y]\| \leqslant \|x\| \|y\|$, каковы бы ни были x, y. Существует открытый шар V с центром 0 в $L(G)$ и определенное в V экспоненциальное отображение φ для G, такие, что 1) $\varphi(V)$ — открытая окрестность элемента e в G; 2) φ — изоморфизм аналитического многообразия V на аналитическое многообразие $\varphi(V)$; 3) $\varphi(nx) = \varphi(x)^n$ для всех таких $x \in V$ и $n \in \mathbf{Z}$, что $nx \in V$. Определим аналогичным образом W и ψ для H. Уменьшив, если понадобится V, можно предполагать, что $f(\varphi(V)) \subset \psi(W)$. Тогда $g = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ является непрерывным отображением из V в W.

Покажем, что

$$(x \in V,\ \lambda \in \mathbf{Q} \text{ и } \lambda x \in V) \Rightarrow g(\lambda x) = \lambda g(x). \tag{1}$$

Можно считать, что $\lambda \neq 0$. Пусть $\lambda = \frac{p}{q}$, где p, q принадлежат $\mathbf{Z}$—$\{0\}$. Пусть $y = \frac{p}{q} x$.

Если $K=\mathbf{R}$, положим $z=\frac{x}{q}=\frac{y}{p}\in V$. Тогда $x=qz$, $y=pz$, откуда

$$g(x)=\psi^{-1}(f(\varphi(qz)))=\psi^{-1}\big(f\big(\varphi(z)^q\big)\big)=\psi^{-1}\big(f(\varphi(z))^q\big)=$$
$$=q\psi^{-1}(f(\varphi(z)))=qg(z).$$

Аналогично, $g(y)=pg(z)$, откуда следует (1).

Если $K=\mathbf{Q}_p$, положим $z=px=qy\in V$, откуда $g(z)=$ $=pg(x)=qg(y)$, и мы опять получаем (1).

Поскольку $\mathbf{Q}$ плотно в K, (1) влечет за собой

$$(x\in V,\ \lambda\in K \text{ и } \lambda x\in V)\Rightarrow g(\lambda x)=\lambda g(x). \tag{2}$$

Пусть $x\in L(G)$ и λ, $\lambda'\in K^*$ таковы, что $\lambda x\in V$, $\lambda' x\in V$. Тогда, согласно (2),

$$g(\lambda' x)=g\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\lambda x\right)=\frac{\lambda'}{\lambda}g(\lambda x);$$

значит, $\frac{1}{\lambda}g(\lambda x)=\frac{1}{\lambda'}g(\lambda' x)$. Поэтому мы определим продолжение h отображения g на $L(G)$, положив $h(x)=\frac{1}{\lambda}g(\lambda x)$ для любого такого λ, что $\lambda x\in V$. Ясно, что h непрерывно. Покажем, что

$$(x\in L(G) \text{ и } \lambda\in K)\Rightarrow h(\lambda x)=\lambda h(x). \tag{3}$$

Пусть элемент $\lambda'\in K^*$ таков, что $\lambda' x\in V$ и $\lambda'\lambda x\in V$. Тогда

$$h(\lambda x)=\frac{1}{\lambda'}g(\lambda'\lambda x)=\frac{1}{\lambda'}\lambda g(\lambda' x)=\lambda\frac{1}{\lambda'}g(\lambda' x)=\lambda h(x).$$

Пусть x, y принадлежит $L(G)$. В силу предложения 4 § 4, n° 3.

$$h(x)+h(y)=\lim_{\lambda\in K^*,\ \lambda\to 0}\lambda^{-1}\psi^{-1}(\psi(\lambda h(x))\,\psi(\lambda h(y)))=$$
$$=\lim_{\lambda\in K^*,\ \lambda\to 0}\lambda^{-1}\psi^{-1}(\psi(h(\lambda x))\,\psi(h(\lambda y))).$$

Если $|\lambda|$ достаточно мало, то $\lambda x\in V$ и $\lambda y\in V$ и, стало быть, предыдущее выражение равно

$$\lim_{\lambda\in K^*,\ \lambda\to 0}\lambda^{-1}\psi^{-1}(f(\varphi(\lambda x))\,f(\varphi(\lambda y)))=$$
$$=\lim_{\lambda\in K^*,\ \lambda\to 0}\lambda^{-1}\big(\psi^{-1}\circ f\big)(\varphi(\lambda x)\,\varphi(\lambda y))=$$
$$=\lim_{\lambda\in K^*,\ \lambda\to 0}\lambda^{-1}g\big(\varphi^{-1}(\varphi(\lambda x)\,\varphi(\lambda y))\big)=$$
$$=\lim_{\lambda\in K^*,\ \lambda\to 0}h\big(\lambda^{-1}\varphi^{-1}(\varphi(\lambda x)\,\varphi(\lambda y))\big)=$$
$$=h\big(\lim_{\lambda\in K^*\ \lambda\to 0}\lambda^{-1}\varphi^{-1}(\varphi(\lambda x)\,\varphi(\lambda y))\big)=h(x+y).$$

Таким образом, h есть линейное непрерывное отображение и, следовательно, $g = h \mid V$ аналитично, но тогда f аналитично в $\varphi(V)$; значит, f есть аналитическое отображение (§ 1, n° 10).

Следствие 1. *Пусть G — топологическая группа. На G может существовать не более одной структуры аналитического многообразия над* $\mathbf{R}$ (соотв. *над* $\mathbf{Q}_p$), *согласованной с групповой структурой и топологией на G.*

Это сразу следует из теоремы 1.

Определение 1. *Говорят, что топологическая группа G есть вещественная* (соотв. *p-адическая*) *группа Ли, если на G существует структура вещественной* (соотв. *p-адической*) *группы Ли, согласованная с ее топологией.*

Эта структура тогда единственна, и можно поэтому говорить о *размерности* подобной группы. Если G и H — две такие группы, всякий непрерывный гомоморфизм из G в H аналитичен.

Следствие 2. *Пусть G — топологическая группа, V — открытая окрестность элемента e. Предположим, что V наделена структурой аналитического многообразия, которая превращает ее в вещественную* (соотв. *p-адическую*) *групускулу Ли. Тогда G является вещественной* (соотв. *p-адической*) *группой Ли.*

Пусть $g \in G$. Существует такая открытая окрестность V' элемента e в G, что $V' \cup gV'g^{-1} \subset V$. Отображение $v \mapsto gvg^{-1}$ из V' в V есть непрерывный и, стало быть, аналитический, морфизм групускулы Ли V' в групускулу Ли V. Достаточно теперь применить предложение 18 § 1, n° 9.

Замечания. 1) Теорема 1 и ее следствие становятся неверными, если заменить в них $\mathbf{R}$ (соотв. $\mathbf{Q}_p$), например, на $\mathbf{C}$ (упражнение 1).

2) Пусть G — топологическая группа. Можно доказать[1]) эквивалентность следующих условий: а) G — вещественная группа Ли конечной размерности; б) G локально компактна и существует окрестность элемента e, не содержащая никакой подгруппы, отличной от $\{e\}$; в) существует открытая окрестность элемента e, гомеоморфная открытому шару пространства $\mathbf{R}^n$. (По поводу значительно менее трудного результата см. упражнение 6.)

Предложение 1. *Пусть G, G' — топологические группы, f — непрерывный морфизм из G в G'. Допустим, что имеет место один из следующих трех случаев:*

---

[1]) См., например, D. Montgomery, L. Zippin, Topological transformation groups, Interscience tracts in pure and applied mathematics, n° 1, Interscience publishers, New York, 1955 (в частности, стр. 169 и 184).

а) *G есть вещественная группа Ли и G' есть p-адическая группа Ли:*

б) *G есть p-адическая группа Ли и G' есть вещественная группа Ли;*

в) *G есть p-адическая группа Ли и G' есть p'-адическая группа Ли, причем $p \neq p'$.*

Тогда морфизм f локально постоянен.

Случай а). Пусть G_0 — компонента единицы группы G. Тогда $f(G_0)$ — связная подгруппа в G' и, стало быть, $f(G_0) = \{e\}$, а G_0 открыта в G.

Случай б). Пусть V' — такая окрестность элемента e в G', что всякая подгруппа в G', содержащаяся в V', сводится к $\{e\}$ (§ 4, n° 2, следствие 1 теоремы 2). Существует такая окрестность V элемента e в G, что $f(V) \subset V'$. Далее, существует открытая подгруппа G_1 в G, такая, что $G_1 \subset V$ (§ 7, n° 1, предложение 1). Тогда $f(G_1) = \{e\}$.

Случай в). Согласно теореме 4 и следствию предложения 8 § 7, существует такая окрестность V' элемента e в G', что для всякого $x' \in V' - \{e\}$ выражение x'^{p^n} не стремится к e, когда n стремится к $+\infty$. Найдется такая окрестность V элемента e в G, что $f(V) \subset V'$. В силу теоремы 4 и предложения 9 § 7 существует такая открытая подгруппа G_1 в G, что $G_1 \subset V$ и для всякого $x \in G_1$ выражение x^{p^n} стремится к e, когда n стремится к $+\infty$. Тогда $f(G_1) = \{e\}$.

2. Замкнутые подгруппы

Теорема 2. *Пусть G — группа Ли конечной размерности над $\mathbf{R}$ или $\mathbf{Q}_p$. Всякая замкнутая подгруппа в G является подгруппой Ли в G. Более общо, пусть U — открытая окрестность элемента e в G и H — такое замкнутое непустое подпространство в U, что условия $x \in H$, $y \in H$ и $xy^{-1} \in U$ влекут за собой $xy^{-1} \in H$. Тогда H есть подгрупускула Ли в G.*

Пусть $\mathfrak{h}$ — касательная подалгебра Ли к H в точке e (§ 4, n° 5, определение 2). Существует подгрупускула Ли H_0 в G с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$, содержащаяся в H. Мы покажем сейчас, что H_0 открыта в H относительно топологии, индуцированной топологией группы G, т. е. что H — аналитическое многообразие в G; тем самым теорема будет установлена.

Найдутся дополнительное к $\mathfrak{h}$ векторное подпространство $\mathfrak{k}$ в $L(G)$, открытые симметричные окрестности нуля V_1, V_2 в $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{k}$ соответственно и определенное в $V_1 + V_2$ экспоненциальное отображение φ для G, обладающие следующими свойствами:

а) отображение $(a_1, a_2) \longmapsto \varphi(a_1)\varphi(a_2)$ есть аналитический изоморфизм из $V_1 \times V_2$ на некоторое открытое подмножество V в G;

б) $\varphi(V_1) \subset H_0$;

в) $V^2 \subset U$.

Мы покажем сейчас (и это завершит доказательство), что существует такая открытая окрестность V_2' элемента 0 в V_2, что $H \cap (\varphi(V_1)\varphi(V_2')) = \varphi(V_1)$.

Допустим, что это утверждение неверно. Тогда можно так выбрать последовательность (x_n) в V_1 и стремящуюся к 0 последовательность (y_n) в $V_2 - \{0\}$, что $\varphi(x_n)\varphi(y_n) \in H$ для всех n. В силу в) тогда $\varphi(y_n) \in H$.

Если $K = \mathbf{Q}_p$, можно, кроме этого, предположить, что V_2 есть аддитивная подгруппа в $\mathfrak{k}$ и что $\varphi(na) = \varphi(a)^n$ для всех $a \in V_2$ и всех $n \in \mathbf{Z}$. Тогда $\varphi(\lambda y_1) \in H$ для всех $\lambda \in \mathbf{Z}$ и, значит, по непрерывности для всех $\lambda \in \mathbf{Z}_p$. Отображение $f\colon \lambda \longmapsto \varphi(\lambda y_1)$ из $\mathbf{Z}_p$ в G аналитично, принимает значения в H и $(T_0 f)(1) = y_1$. Следовательно, $y_1 \in \mathfrak{h}$ — противоречие. Тем самым теорема установлена в случае поля $\mathbf{Q}_p$.

Если $K = \mathbf{R}$, можно предположить, что V_2 выпукла и что y_n принадлежит $\frac{1}{4}V_2 - \{0\}$. Заменив (y_n) некоторой ее подпоследовательностью, можно найти последовательность (λ_n) таких ненулевых скаляров, что $\lambda_n^{-1}y_n$ стремится к некоторому элементу $y \in V_2 - \{0\}$. Последовательность (λ_n) стремится к 0. Пусть элемент $\lambda \in \mathbf{R}$ таков, что $\lambda y \in \frac{1}{4}V_2$; докажем, что $\exp(\lambda y) \in H$. Можно считать, что $\lambda\lambda_n^{-1}y_n \in \frac{1}{4}V_2$ для всех n. Выберем $k_n \in \mathbf{Z}$ так, чтобы величина $|\lambda - k_n\lambda_n|$ стремилась к нулю. Если n достаточно велико, то $(\lambda - k_n\lambda_n)\lambda_n^{-1}y_n \in \frac{1}{4}V_2$, стало быть, $k_n y_n \in \frac{1}{2}V_2$. Поэтому $\exp(hy_n) \in H$, если h — целое число и $0 \leqslant |h| \leqslant |k_n|$ (это устанавливается индукцией по $|h|$). Тогда

$$\exp(\lambda y) = \lim_{n\to\infty} \exp\left(\lambda\lambda_n^{-1}y_n\right) =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(\exp\left((\lambda - k_n\lambda_n)\lambda_n^{-1}y_n\right)\exp(k_n y_n)\right) = \lim_{n\to\infty}\exp k_n y_n \in H.$$

Стало быть, отображение $f\colon \lambda \longmapsto \exp\lambda y$, где $\lambda y \in \frac{1}{4}V_2$, принимает значения в H и $(T_0 f)(1) = y$. Значит, $y \in \mathfrak{h}$, и мы получили противоречие. Таким образом, теорема установлена в случае поля $\mathbf{R}$.

Теорема 2 становится неверной, если не предполагать, что группа G конечномерна (упражнение 12).

Следствие 1. *Пусть G' — локально компактная группа, G — группа Ли конечной размерности над* $\mathbf{R}$ (соотв. *над* $\mathbf{Q}_p$), *f — непрерывный морфизм из G' в G. Если ядро морфизма f дискретно, G' является вещественной* (соотв. *p-адической*) *группой Ли конечной размерности.*

Существует компактная окрестность V элемента e в G', такая, что $f|V$ есть гомеоморфизм из V на некоторое компактное подпространство в G. Если U — достаточно малая окрестность элемента e в G, то условия теоремы 2 выполняются для $H = f(V) \cap U$. Стало быть, H есть подгрупускула Ли в G. Пусть W — ее прообраз относительно отображения $f|V$. Тогда W является окрестностью элемента e в G'. Наделим W структурой аналитического многообразия, перенесенной посредством $(f|W)^{-1}$ с H. Для всякого $z \in G'$ отображение $x \mapsto f(z)xf(z)^{-1}$ из G в G аналитично; значит, существует такая открытая окрестность W' элемента e в W, что отображение $x' \mapsto zx'z^{-1}$ из W' в W аналитично. Согласно предложению 18 § 1, n° 9, на G' существует структура группы Ли, которая на всякой достаточно малой открытой окрестности элемента e индуцирует ту же аналитическую структуру, что и W, и, стало быть, ту же топологию, что и данная топология на G'.

Следствие 2. *Пусть G — конечномерная группа Ли над K, H — подгруппа в G, V — открытая окрестность элемента e в G, $(M_i)_{i \in I}$ — семейство аналитических многообразий над K; для всякого $i \in I$ пусть f_i есть K-аналитическое отображение из V в M_i, такое, что $H \cap V = \{x \in V \mid f_i(x) = f_i(e)$ для всякого $i \in I\}$.*

(i) *Если $K = \mathbf{C}$, то H — подгруппа Ли в G.*

(ii) *Если K является расширением поля $\mathbf{Q}_p$ конечной степени и I конечно, то H есть подгруппа Ли в G.*

(i) Предположим, что $K = \mathbf{C}$. Рассмотрим G как вещественную группу Ли. Тогда H является вещественной подгруппой Ли в G (теорема 2). Пусть $a \in L(H)$. Существует такая открытая связная окрестность W элемента 0 в $\mathbf{C}$, что $\exp \lambda a \in V$ для всякого $\lambda \in W$. Пусть $i \in I$. Если $\lambda \in \mathbf{R} \cap W$, то $f_i(\exp \lambda a) = f_i(e)$. Стало быть, $f_i(\exp \lambda a) = f_i(e)$ при $\lambda \in W$ в силу принципа аналитического продолжения. Таким образом, $\exp \lambda a \in H$ при $\lambda \in W$ и, следовательно, $\mu a \in L(H)$ для любого $\mu \in \mathbf{C}$. Поэтому H есть подгруппа Ли комплексной группы Ли G (§ 4, n° 2, предложение 2).

(ii) Предположим, что K есть расширение конечной степени поля $\mathbf{Q}_p$. Рассмотрим G как группу Ли над $\mathbf{Q}_p$. Она конечномерна, и из теоремы 2 следует, что H есть p-адическая подгруппа Ли в G. Поскольку I конечно, $\prod_{i \in I} M_i$ есть многообразие и можно предположить, что семейство (f_i) сводится к единственному отображению f. Пусть $a \in L(G)$. Пусть φ — экспоненциальное отображение для G. Если $\lambda \in \mathbf{Q}_p$ и $|\lambda|$ достаточно мало, то $f(\varphi(\lambda a)) = f(e)$. Так как отображение f является K-аналитическим, мы выводим отсюда, что $f(\varphi(\lambda a)) = f(e)$ при $\lambda \in K$ и достаточно малых $|\lambda|$. Стало быть, $\varphi(\lambda a) \in H$ для $\lambda \in K$ и достаточно малых $|\lambda|$, и потому $\mu a \in L(H)$ для всех $\mu \in K$. Доказательство завершается, как в (i).

Следствие 2 (ii) теряет силу, если опустить требование конечности множества I.

§ 9. Коммутаторы, централизаторы, нормализаторы в группе Ли

В этом параграфе мы предполагаем, что характеристика поля K равна нулю.

1. *Коммутаторы в топологической группе*

Пусть G — топологическая группа. Определим группы $\overline{D^0G}$, $\overline{D^1G}$, $\overline{D^2G}$, ... и $\overline{C^1G}$, $\overline{C^2G}$, $\overline{C^3G}$, ... формулами

$$\overline{D^0G} = G, \quad \overline{D^{i+1}G} = \overline{(\overline{D^iG}, \overline{D^iG})},$$
$$\overline{C^1G} = G, \quad \overline{C^{i+1}G} = \overline{(G, \overline{C^iG})}.$$

Предложение 1. *Пусть G — топологическая группа, A и B — подгруппы в G. Тогда* $\overline{(\overline{A}, \overline{B})} = \overline{(A, B)}$, $\overline{D^i\overline{A}} = \overline{D^iA}$, $\overline{C^i\overline{A}} = \overline{C^iA}$.

Пусть φ — непрерывное отображение $(x, y) \mapsto x^{-1}y^{-1}xy$ из $G \times G$ в G. Тогда $\varphi(A \times B) \subset (A, B)$ и, стало быть, $\varphi(\overline{A} \times \overline{B}) \subset \overline{(A, B)}$, откуда $\overline{(\overline{A}, \overline{B})} \subset \overline{(A, B)}$; обратное включение очевидно, следовательно, $\overline{(A, B)} = \overline{(\overline{A}, \overline{B})}$. Ясно, что $\overline{D^0\overline{A}} = \overline{D^0A}$; считая равенство $\overline{D^i\overline{A}} = \overline{D^iA}$ справедливым, получаем

$$\overline{D^{i+1}\overline{A}} = \overline{(\overline{D^i\overline{A}}, \overline{D^i\overline{A}})} = \overline{(\overline{D^iA}, \overline{D^iA})} = \overline{(D^iA, D^iA)} = \overline{D^{i+1}A};$$

значит, $\overline{D^i\overline{A}} = \overline{D^iA}$ для всех i. Доказательство формулы $\overline{C^i\overline{A}} = \overline{C^iA}$ аналогично.

Следствие 1. *Если топология группы G отделима, то следующие условия эквивалентны*:

(i) G *разрешима* (соотв. *нильпотентна*);

(ii) $\overline{D^iG} = \{e\}$ (соотв. $\overline{C^iG} = \{e\}$) *для достаточно больших* i.

Имеем $D^iG \subset \overline{D^iG}$, $C^iG \subset \overline{C^iG}$, и потому (ii)$\Rightarrow$(i). Но $\{e\} = \{\bar{e}\}$ и, значит, (i)$\Rightarrow$(ii), согласно предложению 1.

Следствие 2. *Пусть G — отделимая топологическая группа, A — подгруппа в G. Чтобы A была разрешима* (соотв. *нильпотентна, коммутативна*), *необходимо и достаточно, чтобы подгруппа $\overline{A}$ обладала тем же свойством.*

Это сразу же следует из предложения 1.

Предложение 2. *Пусть G — топологическая группа, а A и B — ее подгруппы. Если A связна, то (A, B) также связна.*

Если элемент $y \in B$ зафиксирован, множество M_y пар (x, y), где $x \in A$, связно (поскольку отображение $x \mapsto (x, y)$ из A в G непрерывно). Так как $e \in M_y$, объединение R множеств M_y для всех $y \in B$ связно. Но (A, B) есть подгруппа в G, порожденная множеством R, откуда следует предложение.

2. Коммутаторы в группе Ли

Предложение 3. *Пусть G — конечномерная группа Ли, H_1 и H_2 — ее подгруппы. Пусть $\mathfrak{h}_1$, $\mathfrak{h}_2$ и $\mathfrak{h}$ — касательные алгебры Ли в точке e к H_1, H_2 и (H_1, H_2) соответственно. Тогда $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2] \subset \mathfrak{h}$.*

Пусть $a \in \mathfrak{h}_1$, $b \in \mathfrak{h}_2$. Существует открытая окрестность I элемента 0 в K и аналитические отображения f_1, f_2 из I в G, такие, что

$$f_1(0) = f_2(0) = e, \quad f_1(I) \subset H_1, \quad f_2(I) \subset H_2, \quad (T_0 f_1)\,1 = a, \quad (T_0 f_2)\,1 = b.$$

Положим

$$f(\lambda, \mu) = (f_1(\lambda), f_2(\mu)) \in (H_1, H_2) \text{ при } \lambda, \mu \in I.$$

Отождествим некоторую открытую окрестность элемента e в G с открытым подмножеством в K^r при помощи карты, которая переводит e в 0. Тогда $L(G)$ отождествляется с K^r. В силу предложения 1 § 5, n° 2, разложение отображения $f(\lambda, \mu)$ в степенной ряд в начале координат имеет вид

$$f(\lambda, \mu) = \lambda\mu[a, b] + \sum_{i \geqslant 1,\ j \geqslant 1,\ i+j \geqslant 3} \lambda^i \mu^j a_{ij},$$

где $a_{ij} \in K^r$ (коэффициенты при λ^i или μ^j в разложении отображения $f(\lambda, \mu)$ равны нулю, поскольку $f(\lambda, 0) = f(0, \mu) = 0$).

Фиксируем $\mu \in I$. Устремив λ к 0, видим, что

$$\mu [a, b] + \sum_{j \geqslant 2} \mu^j a_{1j} \in \mathfrak{h}.$$

Поскольку это справедливо для всякого $\mu \in I$, отсюда следует, что $[a, b] \in \mathfrak{h}$.

Замечание. Даже если H_1 и H_2 — связные подгруппы Ли в G, подалгебра Ли в $L(G)$, порожденная множеством $[\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2]$, вообще говоря, отлична от $\mathfrak{h}$.

Предложение 4. *Пусть G — вещественная или комплексная группа Ли конечной размерности. Пусть A, B, C — интегральные подгруппы в G, такие, что $[L(A), L(C)] \subset L(C)$, $[L(B), L(C)] \subset L(C)$. Если $[L(A), L(B)] \subset L(C)$, то $(A, B) \subset C$. Если $[L(A), L(B)] = L(C)$, то $(A, B) = C$.*

Предположим, что $[L(A), L(B)] \subset L(C)$. Сумма $L(A) + L(B) + L(C)$ есть подалгебра Ли в $L(G)$. Рассмотрев интегральную подгруппу в G, алгебра Ли которой есть $L(A) + L(B) + L(C)$, мы приходим к случаю, когда

$$L(A) + L(B) + L(C) = L(G)$$

и G связна. Тогда $L(C)$ есть идеал в $L(G)$. Допустим сначала, что G односвязна. Тогда C — нормальная подгруппа Ли в G (§ 6, n°6, предложение 14). Пусть φ — канонический морфизм из G на G/C. Тогда

$$[L(\varphi)(L(A)), L(\varphi)(L(B))] = \{0\};$$

стало быть, в силу формулы Хаусдорфа подгруппы $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$ коммутируют; следовательно, $(A, B) \subset C$. В общем случае пусть G' — универсальная накрывающая группы G и A', B', C' — интегральные подгруппы в G', такие, что $L(A') = L(A)$, $L(B') = L(B)$, $L(C') = L(C)$. Тогда $(A', B') \subset C'$ и A, B, C суть канонические образы подгрупп A', B', C' в G, откуда $(A, B) \subset C$. С другой стороны, (A, B) есть множество, лежащее ниже некоторой интегральной подгруппы в G (§ 6, n°2, следствие предложения 4), и алгебра Ли этой подгруппы содержит $[L(A), L(B)]$ (предложение 3). Если $[L(A), L(B)] = L(C)$, то $(A, B) \supset C$, откуда $(A, B) = C$.

Следствие. *Пусть G — вещественная или комплексная связная конечномерная группа Ли, алгебра Ли которой есть $\mathfrak{g}$. Подгруппы D^iG* (соотв. C^iG) *суть интегральные подгруппы, алге-*

брами Ли которых являются $\mathscr{D}^i\mathfrak{g}$ (соотв. $\mathscr{C}^i\mathfrak{g}$). *Если* G *односвязна, эти подгруппы суть подгруппы Ли.*

Первое утверждение выводится из предложения 4 индукцией по i. Второе утверждение следует из первого и предложения 14 § 6, n° 6.

Предложение 5. *Пусть* G — *вещественная или комплексная группа Ли конечной размерности,* A — *интегральная подгруппа в* G. *Тогда* $D\overline{A} = DA$. *В частности,* A *является нормальной подгруппой в* $\overline{A}$, *и факторгруппа* $\overline{A}/A$ *коммутативна.*

Положим $\mathfrak{a} = L(A)$. Пусть G_1 — множество элементов $g \in G$, таких, что

$$(\operatorname{Ad} g)\, x \equiv x \pmod{\mathscr{D}\mathfrak{a}} \text{ для всякого } x \in \mathfrak{a}.$$

Тогда G_1 есть замкнутая подгруппа в G. Если $y \in \mathfrak{a}$, то $\exp y \in G_1$ согласно следствию 3 (ii) предложения 10, § 6, n° 4. Стало быть, G_1 содержит A и, значит, $\overline{A}$. Таким образом, если $g \in \overline{A}$, то алгебра Ли $\mathfrak{a}$ устойчива относительно $L(\operatorname{Int} g)$ и, следовательно, A устойчива относительно $\operatorname{Int} g$; более точно, $L(\operatorname{Int} g)$ определяет тождественный автоморфизм алгебры $\mathfrak{a}/\mathscr{D}\mathfrak{a}$ и, стало быть, $\operatorname{Int} g$ определяет тождественный автоморфизм группы A/DA. Это показывает, что $(\overline{A}, A) \subset DA$. Относительно структуры вещественной группы Ли на G подгруппа $\overline{A}$ является подгруппой Ли (§ 8, n° 2, теорема 2); пусть $\mathfrak{b}$ — ее алгебра Ли. Обозначим через G_2 множество таких $g \in G$, что

$$(\operatorname{Ad} g)\, x \equiv x \quad \pmod{\mathscr{D}\mathfrak{a}} \text{ для всякого } x \in \mathfrak{b}.$$

В силу изложенного выше, $G_2 \supset A$ и, следовательно, $G_2 \supset \overline{A}$. Значит, если $g \in \overline{A}$, то $\operatorname{Int} g$ оставляет устойчивой DA и определяет тождественный автоморфизм группы $\overline{A}/DA$. Стало быть, $DA \supset D\overline{A}$.

Предложение 6. *Будем считать поле* K *ультраметрическим. Пусть* G — *конечномерная группа Ли и* A, B, C — *подгруппы Ли в* G, *такие, что* $[L(A), L(C)] \subset L(C)$, $[L(B), L(C)] \subset L(C)$. *Если* $[L(A), L(B)] \subset L(C)$, *то существуют такие открытые подгруппы* A', B' *в* A, B *соответственно, что* $(A', B') \subset C$. *Если* $[L(A), L(B)] = L(C)$, *то существуют такие открытые подгруппы* A', B', C' *в* A, B, C *соответственно, что* $(A', B') = C'$.

Предположим, что $[L(A), L(B)] \subset L(C)$. Как и в доказательстве предложения 4, мы сведем все к случаю, когда $L(C)$ есть идеал в $L(G)$. Затем, заменив G некоторой ее открытой подгруппой, мы сводим все к случаю, когда C нормальна в G

(§ 7, n° 1, предложение 2). Пусть φ — канонический морфизм из G на G/C. Тогда

$$[L(\varphi)(L(A)),\ L(\varphi)(L(B))] = \{0\}.$$

В силу формулы Хаусдорфа существуют открытые подгруппы A', B' в A, B соответственно, такие, что $\varphi(A')$ и $\varphi(B')$ коммутируют, откуда $(A', B') \subset C$. Допустим теперь также, что

$$[L(A),\ L(B)] = L(C).$$

Согласно предложению 3, касательная подалгебра Ли в точке e к (A', B') содержит $L(C)$. Стало быть, (A', B') содержит некоторую подгрупускулу Ли в G с алгеброй Ли $L(C)$. Следовательно, (A', B') является открытой подгруппой в C.

Следствие. *Предположим, что поле K ультраметрическое. Пусть G — конечномерная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Существует такая открытая подгруппа G_0 в G, что для всякого i подгруппа D^iG_0* (соотв. C^iG_0) *есть подгруппа Ли в G с алгеброй Ли $\mathscr{D}^i\mathfrak{g}$* (соотв. $\mathscr{C}^i\mathfrak{g}$).

а) Последовательно применяя предложение 3, мы получаем с помощью индукции по i, что для всякой открытой подгруппы G_1 в G подгруппа D^iG_1 при любом i содержит некоторую подгрупускулу Ли в G с алгеброй Ли $\mathscr{D}^i\mathfrak{g}$.

б) Пусть G' — такая открытая подгруппа в G, что при любом $i \leqslant n$ подгруппа D^iG' есть подгруппа Ли в G с алгеброй Ли $\mathscr{D}^i\mathfrak{g}$. В силу предложения 6 существуют открытые подгруппы H_1, H_2 в D^nG', такие, что (H_1, H_2) есть подгруппа Ли с алгеброй Ли $\mathscr{D}^{n+1}\mathfrak{g}$. Пусть G'' — открытая подгруппа в G', настолько малая, что $D^nG'' \subset H_1 \cap H_2$. Тогда $D^{n+1}G'' \subset (H_1, H_2)$. Включения

$$D^0G'' \subset D^0G',\ D^1G'' \subset D^1G',\ \ldots,\ D^nG'' \subset D^nG',\ D^{n+1}G'' \subset (H_1, H_2)$$

показывают, если принять во внимание п. а), что D^iG'' есть подгруппа Ли в G с алгеброй Ли $\mathscr{D}^i\mathfrak{g}$ при $i \leqslant n+1$.

в) Найдется целое число p, такое, что $\mathscr{D}^p\mathfrak{g} = \mathscr{D}^{p+1}\mathfrak{g} = \ldots$. В силу изложенного выше существует такая открытая подгруппа G_0 в G, что при $i \leqslant p$ подгруппа D^iG_0 есть подгруппа Ли в G с алгеброй Ли $\mathscr{D}^i\mathfrak{g}$. Но с учетом п. а) это утверждение остается верным при $i > p$, поскольку $D^pG_0 \supset D^iG_0$ при $i > p$.

г) Для подгруппы C^i рассуждения аналогичны.

3. Централизаторы

Напомним, что два элемента x, y некоторой группы называются перестановочными, если $(x, y) = e$, или $(\operatorname{Int} x)\, y = y$, или $(\operatorname{Int} y)\, x = x$; напомним, что два элемента a, b некоторой алгебры Ли называются перестановочными, если $[a, b] = 0$, или $(\operatorname{ad} a) \, . \, b = 0$, или $(\operatorname{ad} b) \, . \, a = 0$. Пусть G — группа Ли, $x \in G$, $a \in L(G)$; будем говорить, что x и a перестановочны, если $(\operatorname{Ad} x) \, . \, a = a$, т. е. $xa = ax$ в $T(G)$.

Пусть G — группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, A — подмножество в G, $\mathfrak{a}$ — подмножество в $\mathfrak{g}$. Через $Z_G(A)$ (соотв. $Z_G(\mathfrak{a})$) обозначается множество элементов из G, перестановочных со всеми элементами из A (соотв. из $\mathfrak{a}$). Это замкнутая подгруппа в G. Через $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(A)$ (соотв. $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$) обозначается множество элементов из $\mathfrak{g}$, перестановочных со всеми элементами из A (соотв. из $\mathfrak{a}$). Это замкнутая подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$.

Предложение 7. *Пусть G — конечномерная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — подмножество в $\mathfrak{g}$. Тогда $Z_G(\mathfrak{a})$ есть подгруппа Ли в G с алгеброй Ли $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$.*

Это следует из предложения 44 и следствия 2 предложения 39 § 3.

Предложение 8. *Пусть G — вещественная или комплексная группа Ли конечной размерности, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, A — подмножество в G. Тогда $Z_G(A)$ есть подгруппа Ли в G с алгеброй Ли $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(A)$.*

Предположим, что A состоит из единственной точки a. Тогда $Z_G(A)$ является множеством неподвижных точек автоморфизма $\operatorname{Int} a$; стало быть, $Z_G(A)$ есть подгруппа Ли в G и $L(Z_G(A))$ есть множество неподвижных точек отображения $\operatorname{Ad} a$, т. е. совпадает с $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(A)$ (§ 3, n° 8, следствие 1 предложения 29). Общий случай выводится отсюда с помощью следствия 3 предложения 1 § 6, n° 2.

Предложение 9. *Пусть G — вещественная или комплексная группа Ли конечной размерности, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, A — интегральная подгруппа в G, $\mathfrak{a} = L(A)$. Тогда $Z_G(A) = Z_G(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(A) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ и $Z_G(A)$ является интегральной подгруппой в G с алгеброй Ли $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$.*

Пусть $x \in G$. Тогда

$$\begin{aligned} x \in Z_G(A) \Leftrightarrow A \subset Z_G(\{x\}) \Leftrightarrow & \\ \Leftrightarrow \mathfrak{a} \subset L(Z_G(\{x\})) & \quad (\text{§ 6, следствие 2 предложения 3}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \mathfrak{a} \subset \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\{x\}) & \quad (\text{предложение 8}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x \in Z_G(\mathfrak{a}) & \end{aligned}$$

и, следовательно, $Z_G(A) = Z_G(\mathfrak{a})$. Пусть $u \in \mathfrak{g}$. Тогда

$$u \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(A) \Leftrightarrow A \subset Z_G(\{u\}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathfrak{a} \subset L(Z_G(\{u\})) \quad (\text{§ 6, следствие 2 предложения 3}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \mathfrak{a} \subset \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\{u\}) \quad (\text{предложение 7}) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow u \in \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a});$$

стало быть, $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(A) = \mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$. Последнее утверждение следует тогда из предложения 7 или из предложения 8.

4. *Нормализаторы*

Пусть G — группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, A — подмножество в G, $\mathfrak{a}$ — подмножество в $\mathfrak{g}$. В этом пункте мы обозначаем через $N_G(A)$ множество таких $g \in G$, что $gAg^{-1} = A$. Это подгруппа в G, которая замкнута, если A замкнуто. Через $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ обозначается множество таких $x \in \mathfrak{g}$, что $[x, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$ (см. гл. I, § 1, n° 4). Это подалгебра в $\mathfrak{g}$, которая замкнута, если $\mathfrak{a}$ замкнуто. Через $N_G(\mathfrak{a})$ обозначается множество таких $g \in G$, что $g\mathfrak{a}g^{-1} = \mathfrak{a}$.

Предложение 10. *Пусть G — конечномерная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, $\mathfrak{a}$ — векторное подпространство в $\mathfrak{g}$. Тогда $N_G(\mathfrak{a})$ есть подгруппа Ли в G с алгеброй Ли $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$.*

Это следует из предложения 44 и следствия 1 предложения 39 § 3.

Предложение 11. *Пусть G — вещественная или комплексная группа Ли конечной размерности, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, A — интегральная подгруппа в G и $\mathfrak{a} = L(A)$. Тогда $N_G(A) = N_G(\mathfrak{a})$ и $N_G(A)$ есть подгруппа Ли в G, содержащая $\overline{A}$, с алгеброй Ли $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$.*

Равенство $N_G(A) = N_G(\mathfrak{a})$ вытекает из следствия 2 предложения 3 § 6, n° 2. Согласно предложению 10, $N_G(A)$ является тогда подгруппой Ли в G с алгеброй Ли $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$. Стало быть, $N_G(A)$ замкнута. Поскольку $N_G(A) \supset A$, имеем $N_G(A) \supset \overline{A}$.

Следствие. *Если $\mathfrak{a} = \mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$, то A есть подгруппа Ли в G и компонента единицы группы $N_G(A)$.*

В самом деле, эта компонента единицы является подгруппой Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{n}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a})$ (предложение 11), и, стало быть, она равна A в силу теоремы 2 (i) § 6, n° 2.

5. *Нильпотентные группы Ли*

Предложение 12. *Пусть G — конечномерная группа Ли. Для нильпотентности $L(G)$ необходимо и достаточно, чтобы G обладала открытой нильпотентной подгруппой.*

Допустим, что G обладает открытой нильпотентной подгруппой G_0. В силу следствий предложений 4 и 6 из n° 2 $\mathscr{C}^i L(G_0) = \{0\}$ для достаточно большого i. Следовательно, алгебра Ли $L(G_0) = L(G)$ нильпотентна.

Допустим, что $L(G)$ нильпотентна. Если $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, то компонента единицы G_0 группы G нильпотентна в силу следствия предложения 4 n° 2 и G_0 открыта в G. Если поле K ультраметрическое, то, согласно следствию предложения 6 n° 2, существуют открытая подгруппа G_1 в G, целое число $i > 0$ и окрестность V элемента e в G, такие, что $C^i G_1 \cap V = \{e\}$. Тогда если G_0 — достаточно малая подгруппа в G_1, то $C^i G_0 \subset V$ и, стало быть, $C^i G_0 = \{e\}$, а G_0 нильпотентна. Ч. Т. Д.

Пусть $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли. В отвечающем ей ряде Хаусдорфа $H(X, Y)$ лишь конечное число членов отлично от нуля, и мы знаем (гл. II, § 6, n° 5, *замечание* 3), что закон композиции $(x, y) \mapsto H(x, y)$ определяет на $\mathfrak{g}$ структуру группы. Предположим дополнительно, что $\mathfrak{g}$ нормируема и полна. Ясно, что закон композиции H является непрерывным многочленом (*Мн. Св. рез.*, приложение). Стало быть, $\mathfrak{g}$, наделенная законом композиции H, является группой Ли G. Говорят, что G *ассоциирована* с $\mathfrak{g}$. В силу лемм 2 и 3 § 4, n° 2, имеем $L(G) = \mathfrak{g}$. Тождественное отображение φ из $\mathfrak{g}$ в G является экспоненциальным отображением, причем $\varphi(\lambda x)\varphi(\lambda' x) = \varphi((\lambda + \lambda')x)$, каковы бы ни были $x \in \mathfrak{g}$, $\lambda \in K$, $\lambda' \in K$. Всякая подалгебра Ли $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$, допускающая топологическое дополнение, является подгруппой Ли H в G и $L(H) = \mathfrak{h}$.

Предложение 13. *Пусть G — односвязная нильпотентная группа конечной размерности над* $\mathbf{R}$ *или* $\mathbf{C}$.

(i) $\exp_G$ *есть изоморфизм ассоциированной с $L(G)$ группы Ли на G.*

(ii) *Любая интегральная подгруппа в G является односвязной подгруппой Ли в G.*

Пусть $\mathfrak{g} = L(G)$; это нильпотентная алгебра Ли (предложение 12). Поскольку две односвязные группы Ли над $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, имеющие одну и ту же алгебру Ли, изоморфны (§ 6, n° 3, теорема 3 (ii)), достаточно доказать предложение в случае, когда G — группа, ассоциированная с $\mathfrak{g}$. Тогда утверждения (i) и (ii) следуют из того, что было сказано перед предложением.

Предложение 14. *Пусть G — связная группа Ли конечной размерности над* **R** *или* **C**.

(i) *Если G нильпотентна, то* $\exp_G$ *этально и сюръективно.*

(ii) *Если $K = \mathbf{C}$ и $\exp_G$ этально, то G нильпотентна.*

Пусть G' — универсальная накрывающая группы G и φ — канонический морфизм из G' на G. Тогда $\exp_G = \varphi \circ \exp_{G'}$ (§ 6, n° 4, предложение 10); стало быть, (i) следует из предложения 13 (i).

Если $K = \mathbf{C}$ и если exp этально, то каков бы ни был $x \in L(G)$, никакое собственное значение оператора $\operatorname{ad} x$ не принадлежит множеству $2i\pi(\mathbf{Z}-\{0\})$ (§ 6, n° 4, следствие предложения 12). Применяя это к λx, где λ меняется в **C**, мы заключаем отсюда, что все собственные значения элемента $\operatorname{ad} x$ нулевые, а потому $\operatorname{ad} x$ нильпотентен. Следовательно, алгебра $L(G)$ нильпотентна (гл. I, § 4, следствие 1 теоремы 1); значит, и G нильпотентна (предложение 12).

Предложение 15. *Пусть G — связная нильпотентная группа Ли конечной размерности над* **R** *или* **C**, *A — интегральная подгруппа в G. Тогда $Z_G(A)$ есть связная подгруппа Ли в G с алгеброй Ли $\mathfrak{z}_G(L(A))$.*

С учетом предложения 9 n° 3 достаточно доказать, что $Z_G(A)$ связна. Пусть $g \in Z_G(A)$. Существует такой элемент $x \in L(G)$, что $g = \exp x$ (предложение 14). Тогда $\operatorname{Ad} g \mid L(A) = 1$ (n° 3, предложение 9) и, стало быть, $\operatorname{Ad} g^n \mid L(A) = 1$ для всех $n \in \mathbf{Z}$, а потому $\exp(\operatorname{ad} nx) \mid L(A) = 1$ для всех $n \in \mathbf{Z}$. Поскольку отображение $\lambda \longmapsto \exp(\operatorname{ad} \lambda x) \mid L(A)$ из K в $\mathscr{L}(L(A), L(G))$ полиномиально, получаем $\exp(\operatorname{ad} \lambda x) \mid L(A) = 1$ для всех $\lambda \in K$, т. е. $\exp(\lambda x) \in Z_G(A)$ для всех $\lambda \in K$.

Предложение 16. *Пусть G — нильпотентная группа Ли конечной размерности над* **R** *или* **C**, *A — интегральная подгруппа в G, отличная от G. Тогда $N_G(A)$ есть связная подгруппа Ли в G, отличная от A.*

Имеем $N_G(A) \neq A$ (*Alg.*, chap. I, § 6, corollaire 1 de la proposition 8). С учетом предложения 11 n° 4 все сводится к доказательству связности группы $N_G(A)$. Пусть $g \in N_G(A)$. Существует такой $x \in L(G)$, что $g = \exp x$ (предложение 14). Пусть E — векторное подпространство в $\mathscr{L}(L(G))$, образованное такими $u \in \mathscr{L}(L(G))$, что $u(L(A)) \subset L(A)$. Тогда $\operatorname{Ad} g^n \in E$, и потому $\exp(\operatorname{ad} nx) \in E$ для всех $n \in \mathbf{Z}$. Стало быть, $\exp(\operatorname{ad} \lambda x) \in E$ для всех $\lambda \in K$, т. е. $\exp(\lambda x) \in N_G(A)$ для всех $\lambda \in K$.

Предложение 17. *Пусть $\mathfrak{g}$ — нильпотентная алгебра Ли конечной размерности над K, $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \ldots, \mathfrak{g}_n)$ — убывающая последовательность идеалов в $\mathfrak{g}$, таких, что $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_n = \{0\}$, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_i] \subset$*

$\subset \mathfrak{g}_{i+1}$ *при* $0 \leqslant i < n$. *Пусть* $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_p$ — *такие векторные подпространства в* $\mathfrak{g}$, *что всякий идеал* $\mathfrak{g}_i$ *является прямой суммой своих пересечений с подпространствами* $\mathfrak{a}_j$. *Наделим* $\mathfrak{g}$ *законом композиции Хаусдорфа* $\vdash\!\dashv$. *Пусть* φ — *отображение*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_p) \mapsto x_1 \vdash\!\dashv x_2 \vdash\!\dashv \ldots \vdash\!\dashv x_p$$

из $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 \times \ldots \times \mathfrak{a}_p$ в $\mathfrak{g}$.

(i) φ *есть биекция из* $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 \times \ldots \times \mathfrak{a}_p$ *на* $\mathfrak{g}$;

(ii) φ *и* φ^{-1} *суть полиномиальные отображения*;

(iii) *отображение* $(x, y) \mapsto \varphi^{-1}\left(\varphi(x) \cdot \varphi(y)^{-1}\right)$ *из* $(\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 \times \ldots \times \mathfrak{a}_p)^2$ *в* $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 \times \ldots \times \mathfrak{a}_p$ *полиномиально.*

Предложение очевидно, если $\dim \mathfrak{g} = 0$. Допустим, что $\dim \mathfrak{g} > 0$ и предложение установлено для всех размерностей, меньших, чем $\dim \mathfrak{g}$. Можно предполагать, что $\mathfrak{g}_{n-1} \neq \{0\}$, и тогда $\mathfrak{g}_{n-1}$ является ненулевым центральным идеалом в $\mathfrak{g}$. Существует такой индекс j, что $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_{n-1} \cap \mathfrak{a}_j \neq \{0\}$. Пусть $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, θ — канонический морфизм из $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}'_i = \theta(\mathfrak{g}_i)$, $\mathfrak{a}'_i = \theta(\mathfrak{a}_i)$. Тогда $(\mathfrak{g}'_0, \mathfrak{g}'_1, \ldots, \mathfrak{g}'_n)$ — убывающая последовательность идеалов в $\mathfrak{g}'$, таких, что $\mathfrak{g}'_0 = \mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}'_n = \{0\}$, $[\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'_i] \subset \mathfrak{g}'_{i+1}$ при $0 \leqslant i < n$, и всякий идеал $\mathfrak{g}'_i$ является суммой своих пересечений с подпространствами $\mathfrak{a}'_r$. Пусть φ' — отображение

$$(x'_1, x'_2, \ldots, x'_p) \mapsto x'_1 \vdash\!\dashv x'_2 \vdash\!\dashv \ldots \vdash\!\dashv x'_p$$

из $\mathfrak{a}'_1 \times \mathfrak{a}'_2 \times \ldots \times \mathfrak{a}'_p$ в $\mathfrak{g}'$. В силу предположения индукции φ' биективно и φ', φ'^{-1} суть полиномиальные отображения.

Пусть $x \in \mathfrak{g}$. Положим

$$\varphi'^{-1}(\theta(x)) = (x'_1(x), x'_2(x), \ldots, x'_p(x)). \tag{1}$$

Тогда

$$\theta(x) = x'_1(x) \vdash\!\dashv x'_2(x) \vdash\!\dashv \ldots \vdash\!\dashv x'_p(x). \tag{2}$$

Пусть $\mathfrak{h}_1$ — векторное подпространство, дополнительное к $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$, которое является суммой подпространств $\mathfrak{a}_k$ для $k \neq j$ и дополнения к подпространству $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{a}_j$. Существует биекция η из $\mathfrak{g}'$ на $\mathfrak{h}_1$, такая, что $\theta \circ \eta = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}'}$. Для $x \in \mathfrak{g}$ положим

$$\zeta(x) = \eta(x'_1(x)) \vdash\!\dashv \eta(x'_2(x)) \vdash\!\dashv \ldots \vdash\!\dashv \eta(x'_p(x)) \in \mathfrak{g}, \tag{3}$$

$$y(x) = \zeta(x)^{-1} \vdash\!\dashv x = (-\zeta(x)) \cdot x. \tag{4}$$

Согласно (2) и (3), имеем $\theta(\zeta(x)) = \theta(x)$ и, стало быть, $y(x) \in \mathfrak{h}$. Положим, наконец,

$$\psi(x) = (\eta(x'_1(x)), \ldots, \eta(x'_j(x)) + y(x), \ldots, \eta(x'_p(x))) \in$$
$$\in \mathfrak{a}_1 \times \ldots \times \mathfrak{a}_p. \tag{5}$$

Поскольку $y(x)$ лежит в центре алгебры Ли $\mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}\varphi(\psi(x)) &= \eta(x_1'(x)) \mathbin{\vdash\!\dashv} \ldots \mathbin{\vdash\!\dashv} \eta(x_j'(x)) \mathbin{\vdash\!\dashv} \ldots \mathbin{\vdash\!\dashv} \eta(x_p'(x)) \mathbin{\vdash\!\dashv} y(x) = \\ &= \zeta(x) \mathbin{\vdash\!\dashv} y(x) \quad (\text{в силу } (3)) = \\ &= x \quad (\text{в силу } (4)).\end{aligned}$$

Стало быть, $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$. Пусть теперь $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in \mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 \times \ldots \times \mathfrak{a}_p$ и положим $x = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_p) = x_1 \mathbin{\vdash\!\dashv} x_2 \mathbin{\vdash\!\dashv} \ldots \mathbin{\vdash\!\dashv} x_p$. Тогда $\theta(x) = \theta(x_1) \mathbin{\vdash\!\dashv} \theta(x_2) \mathbin{\vdash\!\dashv} \ldots \mathbin{\vdash\!\dashv} \theta(x_p)$, а потому $x_i'(x) = \theta(x_i)$ при $1 \leqslant i \leqslant p$ и, следовательно,

$$\zeta(x) = x_1 \mathbin{\vdash\!\dashv} x_2 \mathbin{\vdash\!\dashv} \ldots \mathbin{\vdash\!\dashv} (\eta\theta(x_j)) \mathbin{\vdash\!\dashv} \ldots \mathbin{\vdash\!\dashv} x_p,$$

$$y(x) = x_j - \eta\theta(x_j).$$

Тогда в силу (5)

$$\psi(x) = (x_1, \ldots, \eta\theta(x_j) + x_j - \eta\theta(x_j), \ldots, x_p) = (x_1, x_2, \ldots, x_p).$$

Значит, $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathfrak{a}_1 \times \ldots \times \mathfrak{a}_p}$. Это доказывает (i). Поскольку закон композиции Хаусдорфа полиномиален, φ полиномиально. Согласно предположению индукции φ'^{-1} полиномиально; формула (1) показывает тогда, что функции x_j' полиномиальны, а потому ζ полиномиально (формула (3)), y полиномиально (формула (4)), ψ полиномиально (формула (5)). Тем самым доказано (ii). Утверждение (iii) следует из (i) и (ii) и из полиномиальности закона композиции Хаусдорфа. Ч. Т. Д.

Пример нильпотентной группы Ли. Пусть G — нижняя строго треугольная подгруппа в $\mathbf{GL}(n, K)$. Это подгруппа Ли в $\mathbf{GL}(n, K)$, и $L(G) \subset \mathfrak{gl}(n, K)$ есть алгебра нижних треугольных матриц с нулевой диагональю (§ 3, n° 10, предложение 36). В силу *замечания* гл. II, § 4, n° 6, G нильпотентна. Будем предполагать в дальнейшем, что $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. Поскольку подгруппа G гомеоморфна пространству $K^{n(n-1)/2}$, G односвязна. Экспоненциальное отображение из $L(G)$ в G есть не что иное, как отображение

$$u \longmapsto \exp u = \sum_{k \geqslant 0} \frac{u^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^k}{k!}$$

(§ 6, n° 4, *пример*). Согласно предложению 13, экспоненциальное отображение является изоморфизмом многообразия $L(G)$ на многообразие G. Предложение 17 § 6, n° 9, доставляет обратную биекцию log. Наделим K^n некоторой нормой. В силу *Спектр. теор.*, гл. I, § 4, n° 9, при $g \in G$ и $\|g - 1\| < 1$ выполняется равенство

$$\log g = \sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (g-1)^k,$$

т. е.

$$\log g = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} (g-1)^k. \qquad (6)$$

Но обе части равенства (6) суть аналитические функции от g при $g \in G$, и, стало быть, они совпадают при всех $g \in G$.

Предложение 18. *Пусть k — поле, V — векторное пространство конечной размерности > 0 над k, G — подгруппа в $\mathbf{GL}(V)$, все элементы которой унипотентны.*

(i) *Существует ненулевой элемент v в V, такой, что $gv = v$ для всякого $g \in G$.*

(ii) *Существует базис B в V, такой, что для всякого $g \in G$ его матрица в базисе B является нижней треугольной, а все ее диагональные элементы равны 1.*

(iii) *Группа G нильпотентна.*

а) Допустим сначала, что поле k алгебраически замкнуто и тождественное представление группы G является простым. Пусть a, b — элементы из G. Тогда

$$\operatorname{Tr}(a(b-1)) = \operatorname{Tr}(ab-1) - \operatorname{Tr}(a-1) = 0 - 0 = 0,$$

поскольку $ab - 1$ и $a - 1$ нильпотентны. Поскольку векторное подпространство в $\mathscr{L}(V)$, порожденное множеством G, есть $\mathscr{L}(V)$ (*Alg.*, chap. VIII, § 4, corollaire 1 de la proposition 2[1])), $\operatorname{Tr}(u(b-1)) = 0$ для всякого $u \in \mathscr{L}(V)$, а потому $b = 1$. Таким образом, $G = \{1\}$.

б) Обратимся к общему случаю. Пусть $\bar{k}$ — алгебраическое замыкание поля k, $\bar{V} = V \otimes_k \bar{k}$ и $\bar{G} \subset \mathbf{GL}(\bar{V})$ — множество элементов $a \otimes 1$, где $a \in G$. Пусть W (соотв. W') — множество элементов в V (соотв. в $\bar{V}$), инвариантных относительно G (соотв. $\bar{G}$). Тогда $W' = W \otimes_k \bar{k}$, поскольку $W = \bigcap_{g \in G} \operatorname{Ker}(g-1)$ и $W' = \bigcap_{g \in G} \operatorname{Ker}(g-1) \otimes 1$. Если V_1 — минимальный элемент в множестве ненулевых векторных подпространств в $\bar{V}$, устойчивых относительно $\bar{G}$, то $V_1 \subset W'$ согласно п. а) доказательства; стало быть, $W \neq \{0\}$, что доказывает (i).

в) Индукцией по $\dim V$ мы выводим из (i) существование возрастающей последовательности $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ векторных подпространств в V, устойчивых относительно G, таких, что $V_n = V$ и группа автоморфизмов пространства V_i/V_{i-1}, канони-

---

[1]) См. также *Алг.*, гл. VIII, § 4, n° 3, следствие предложения 2. — *Прим. перев.*

чески определяемая группой G, сводится к $\{1\}$ для всех i (условимся, что $V_r = \{0\}$ при $r \leqslant 0$). Из этого следует сначала (ii), а затем (iii) (гл. II, § 4, n° 6, *замечание*).

Следствие 1. *Пусть G — вещественная или комплексная конечномерная группа Ли. Для нильпотентности G необходимо и достаточно, чтобы всякий элемент группы* $\mathrm{Ad}\, G$ *был унипотентным.*

Если все элементы группы $\mathrm{Ad}\, G$ унипотентны, то $\mathrm{Ad}\, G$ нильпотентна (предложение 18); стало быть, группа G, являющаяся ее центральным расширением, также нильпотентна. Если G нильпотентна, то $L(G)$ нильпотентна, а потому $\mathrm{ad}\, x$ нильпотентен для всякого $x \in L(G)$; следовательно, $\mathrm{Ad}(\exp x) = \exp \mathrm{ad}\, x$ унипотентен; но всякий элемент из G имеет вид $\exp x$ для некоторого $x \in L(G)$ (предложение 14).

Следствие 2. *Всякая интегральная подгруппа в* $\mathbf{GL}(n, K)$, *образованная унипотентными элементами, есть односвязная подгруппа Ли.*

Это следует из предложений 13 (ii), 18 (ii) и того факта, что нижняя строго треугольная группа односвязна.

6. Разрешимые группы Ли

Предложение 19. *Пусть G — конечномерная группа Ли. Для разрешимости $L(G)$ необходимо и достаточно, чтобы G обладала открытой разрешимой подгруппой.*

Доказательство аналогично доказательству предложения 12 n° 5.

Предложение 20. *Пусть G — разрешимая односвязная группа Ли конечной размерности n над* $\mathbf{R}$ *или* $\mathbf{C}$ *и $\mathfrak{g} = L(G)$. Пусть $(\mathfrak{g}_n, \mathfrak{g}_{n-1}, \ldots, \mathfrak{g}_0)$ — последовательность подалгебр в $\mathfrak{g}$ размерностей $n, n-1, \ldots, 0$ соответственно, такая, что $\mathfrak{g}_{i-1}$ есть идеал в $\mathfrak{g}_i$ при $i = n, n-1, \ldots, 1$*[1]*. Пусть G_i — интегральная подгруппа в G, отвечающая подалгебре Ли $\mathfrak{g}_i$, x_i — некоторый вектор в $\mathfrak{g}_i$, не принадлежащей $\mathfrak{g}_{i-1}$, и φ_i — отображение*

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i) \mapsto (\exp \lambda_1 x_1)(\exp \lambda_2 x_2) \ldots (\exp \lambda_i x_i)$$

из K^i в G. Тогда φ_n есть изоморфизм аналитических многообразий и $\varphi_i(K^i) = G_i$ для любого i.

При $n = 0$ предложение очевидно. Проведем индукцию по n. Пусть H — такая интегральная подгруппа в G, что $L(H) = Kx_n$. В силу следствия 1 предложения 14 § 6, n° 6, H и G_{n-1} суть

[1]) Такая последовательность существует в силу предложения 2 гл. I, § 5.

односвязные подгруппы Ли в G, и G, рассматриваемая как группа Ли, есть полупрямое произведение подгруппы H на G_{n-1}. Стало быть, $\lambda \mapsto \exp(\lambda x_n)$ является изоморфизмом из K на H, и, согласно предположению индукции, отображение

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}) \mapsto (\exp \lambda_1 x_1)(\exp \lambda_2 x_2) \ldots (\exp \lambda_{n-1} x_{n-1})$$

есть изоморфизм аналитического многообразия K^{n-1} на аналитическое многообразие G_{n-1}, переводящий $K^i \times \{0\}$ в G_i при $i = 1, 2, \ldots, n-1$. Отсюда следует предложение.

Предложение 21. *Пусть G — разрешимая группа Ли над* $\mathbf{R}$ *или* $\mathbf{C}$, *которая односвязна, и M — интегральная подгруппа в G. Тогда M — подгруппа Ли в G и притом односвязная.*

Воспользуемся обозначениями n, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_i$, x_i, φ из предложения 20, но наложим на векторы x_i следующее дополнительное условие: пусть $i_p > i_{p-1} > \ldots > i_1$ — те из целых чисел i, для которых $L(M) \cap \mathfrak{g}_i \neq L(M) \cap \mathfrak{g}_{i-1}$; мы выбираем тогда $x_{i_k} \in L(M) \cap \mathfrak{g}_{i_k}$ при $k = 1, 2, \ldots, p$. С помощью индукции по n мы без труда получаем, что $\left(x_{i_p}, x_{i_{p-1}}, \ldots, x_{i_1}\right)$ есть базис в $L(M)$. Пусть N — односвязная группа Ли, такая, что существует изоморфизм h из $L(N)$ на $L(M)$, и $y_p = h^{-1}\left(x_{i_p}\right), \ldots$ $\ldots, y_1 = h^{-1}\left(x_{i_1}\right)$. В силу предложения 20 отображение

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p) \mapsto (\exp \lambda_1 y_1)(\exp \lambda_2 y_2) \ldots (\exp \lambda_p y_p)$$

является изоморфизмом многообразия K^p на многообразие N. Существует морфизм τ группы Ли N в группу Ли G, такой, что $h = L(\tau)$, и тогда $\tau(N) = M$ (§ 6, n° 2, следствие 1 предложения 1). Стало быть, M есть множество элементов из G вида

$$\tau((\exp \lambda_1 y_1) \ldots (\exp \lambda_p y_p)) = \exp(\lambda_1 L(\tau) y_1) \ldots \exp(\lambda_p L(\tau) y_p) =$$
$$= \exp\left(\lambda_1 x_{i_1}\right) \ldots \exp\left(\lambda_p x_{i_p}\right).$$

Таким образом, $M = \varphi(T)$, где T — некоторое векторное подпространство в K^n.

Предложение 22. *Предположим, что $K = $* $\mathbf{R}$ *или* $\mathbf{C}$. *Пусть V — векторное пространство конечной размерности, G — связная разрешимая подгруппа в* $\mathbf{GL}(V)$. *Предположим, что тождественное представление группы G является простым.*

(i) *Если $K = \mathbf{R}$, то $\dim V \leqslant 2$ и G коммутативна.*

(ii) *Если $K = \mathbf{C}$, то $\dim V = 1$.*

(i) Допустим, что $K = \mathbf{R}$. Тогда замыкание H подгруппы G в $\mathbf{GL}(V)$ есть связная подгруппа Ли в $\mathbf{GL}(V)$; она разрешима

(n° 1, следствие 2 предложения 1). Стало быть, $L(H)$ разрешима (предложение 19). Тождественное представление алгебры Ли $L(H)$ является простым (§ 6, n° 5, следствие 2 предложения 13). Значит, $\dim V \leqslant 2$ и $L(H)$ коммутативна (гл. I, § 5, следствия 1 и 4 теоремы 1). Поэтому H, а тем более и G, коммутативна.

(ii) Предположим, что $K = \mathbf{C}$. Пусть W — минимальный элемент среди ненулевых вещественных подпространств в V, устойчивых относительно G. Комплексное векторное подпространство в V, натянутое на W, совпадает с V, поскольку тождественное представление группы G является простым. В силу (i), $G|W$ коммутативна. Значит, G коммутативна. Поэтому всякий элемент из G есть гомотетия (*Alg.*, chap. VIII, § 4, corollaire 1 de la proposition 2[1])), так что $\dim V = 1$.

Следствие. *Пусть V — комплексное векторное пространство конечной размерности > 0, G — связная разрешимая подгруппа в* $\mathbf{GL}(V)$.

(i) *Существует такой ненулевой элемент $v \in V$, что $gv \in \mathbf{C}v$ для всякого $g \in G$.*

(ii) *Существует такой базис B в V, что матрица любого элемента $g \in G$ в этом базисе является нижней треугольной.*

Пусть V_1 — минимальный элемент в множестве ненулевых векторных подпространств в V, устойчивых относительно G. В силу предложения 22 (ii) $\dim V_1 = 1$. Это доказывает (i). С помощью индукции по $\dim V$ выводим отсюда существование возрастающей последовательности $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ векторных подпространств в V, устойчивых относительно G и таких, что $\dim V_{i+1}/V_i = 1$ при $i < n$ и $V_n = V$. Отсюда следует (ii).

7. Радикал группы Ли

Предложение 23. *Пусть G — вещественная или комплексная группа Ли конечной размерности, $\mathfrak{r}$ — радикал алгебры Ли $L(G)$* (гл. I, § 5, определение 2), *$\mathfrak{n}$ — наибольший нильпотентный идеал в $L(G)$* (гл. I, § 4, n° 4). *Пусть R* (соотв. *N*) *— интегральная подгруппа в G с алгеброй Ли $\mathfrak{r}$* (соотв. $\mathfrak{n}$). *Тогда R* (соотв. *N*) *является разрешимой* (соотв. *нильпотентной*) *подгруппой Ли в G, инвариантной относительно любого непрерывного автоморфизма группы G. Всякая связная нормальная разрешимая* (соотв. *нильпотентная*) *подгруппа в G содержится в R* (соотв. *в N*).

Группа R разрешима (n° 6, предложение 19). Допустим, что $K = \mathbf{R}$. Пусть G' — нормальная разрешимая связная подгруппа в G. Тогда $\overline{G'}$ есть подгруппа Ли в G (§ 8, n° 2, теорема 2),

[1]) См. также *Алг.*, гл. VIII, § 4, n° 3, следствие предложения 2. — *Прим. перев.*

которая нормальна, разрешима (n° 1, следствие 2 предложения 1) и связна. Стало быть, $L(\overline{G}')$ есть разрешимый идеал в $L(G)$, откуда $L(\overline{G}') \subset \mathfrak{r}$ и $\overline{G}' \subset R$. В частности, $\overline{R} \subset R$, а потому R замкнута и является, следовательно, подгруппой Ли в G. Допустим теперь, что $K = \mathbf{C}$. Пусть H — вещественная группа Ли, лежащая ниже G. Если $\mathfrak{r}'$ — радикал в $L(H)$, то $i\mathfrak{r}'$ — разрешимый идеал в $L(H)$, откуда $\mathfrak{r}' = i\mathfrak{r}'$; значит, $\mathfrak{r} \subset \mathfrak{r}' \subset \mathfrak{r}$ и, согласно изложенному выше, R замкнута в H, а потому в G. Таким образом, R есть подгруппа Ли в G. Всякая нормальная разрешимая связная подгруппа в G является нормальной разрешимой связной подгруппой в H; следовательно, она содержится в R. Таким образом, мы доказали, как для $K = \mathbf{R}$, так и для $K = \mathbf{C}$, что R — наибольшая нормальная разрешимая связная подгруппа в G; отсюда следует, что R инвариантна относительно всякого непрерывного автоморфизма группы G. Доказательство для N совершенно аналогично.

Определение 1. *Пусть G — вещественная или комплексная группа Ли конечной размерности. Радикалом группы G называется наибольшая нормальная разрешимая подгруппа в G.*

Замечание. Даже если G связна, могут существовать нормальные разрешимые подгруппы, не содержащиеся в радикале группы G.

Предложение 24. *Предположим, что $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. Пусть G_1, G_2 — две связные конечномерные группы Ли, R_1 и R_2 — их радикалы, φ — сюръективный морфизм из G_1 в G_2. Тогда $\varphi(R_1) = R_2$.*

В силу предложения 28 § 3, n° 8, $L(\varphi)$ сюръективен. Стало быть $L(\varphi)(L(R_1)) = L(R_2)$ (гл. I, § 6, следствие 3 предложения 2). Пусть i — каноническая инъекция группы R_1 в G_1. Тогда образ морфизма $\varphi \circ i$ есть R_2 (§ 6, n° 2, следствие 1 предложения 1).

Предложение 25. *Предположим, что $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. Пусть G_1, G_2 — связные конечномерные группы Ли, а R_1 и R_2 — их радикалы. Радикал группы $G_1 \times G_2$ есть $R_1 \times R_2$.*

Это следует из предложения 4 гл. I, § 5.

8. Полупростые группы Ли

Предложение 26. *Пусть G — вещественная или комплексная связная конечномерная группа Ли. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *$L(G)$ полупроста;*

(ii) *радикал группы G есть $\{e\}$;*

(iii) *всякая коммутативная нормальная интегральная подгруппа в G равна $\{e\}$.*

Условие (ii) означает, что радикал алгебры Ли $L(G)$ есть $\{0\}$; стало быть, (i)$\Leftrightarrow$(ii) (гл. I, § 6, теорема 1). Эквивалентность утверждений (i) и (iii) следует из предложения 14 § 6, n° 6.

Определение 2. *Вещественная или комплексная связная группа Ли называется полупростой, если она конечномерна и удовлетворяет условиям предложения* 26.

Замечание 1. Пусть G — вещественная или комплексная связная конечномерная группа Ли. Если G не является полупростой, она обладает связной коммутативной подгруппой Ли G', инвариантной относительно всякого непрерывного автоморфизма и такой, что $G' \neq \{e\}$. В самом деле, пусть $\mathfrak{n}$ — наибольший нильпотентный идеал в $L(G)$; тогда $\mathfrak{n} \neq \{0\}$ и соответствующая интегральная подгруппа N есть подгруппа Ли, инвариантная относительно любого непрерывного автоморфизма группы G (n° 7, предложение 23); центр G' группы N обладает требуемыми свойствами.

Предложение 27. *Пусть G — вещественная или комплексная связная конечномерная группа Ли. Следующие условия эквивалентны*:

(i) $L(G)$ *проста*;

(ii) *единственные нормальные интегральные подгруппы в G суть $\{e\}$ и G, и, кроме того, G не коммутативна.*

Это следует из предложения 14 § 6, n° 6.

Определение 3. *Вещественная или комплексная связная группа Ли называется почти простой, если она конечномерна и удовлетворяет условиям предложения* 27.

Предложение 28. *Пусть G — вещественная или комплексная односвязная группа Ли. Следующие условия эквивалентны*:

(i) G *полупроста*;

(ii) G *изоморфна произведению конечного числа почти простых групп.*

Если G есть конечное произведение почти простых групп Ли, то алгебра Ли $L(G)$ является конечным произведением простых алгебр Ли, и, стало быть, она полупроста. Если G полупроста, то $L(G)$ изоморфна произведению простых алгебр Ли $L_1, \ldots, L_n$. Пусть G_i — односвязная группа Ли с алгеброй Ли L_i; она почти проста. Тогда G и $G_1 \times \ldots \times G_n$ односвязны и имеют изоморфные алгебры Ли, значит, они изоморфны.

Лемма 1. *Пусть G — связная топологическая группа, Z — ее центр, Z' — дискретная подгруппа в Z. Тогда центр группы G/Z' есть Z/Z'.*

Пусть y — элемент в G, класс которого по модулю Z' является центральным элементом в G/Z'. Пусть φ — отображение $g \mapsto gyg^{-1}y^{-1}$ из G в G. Тогда $\varphi(G)$ связно и содержится в Z', а следовательно, $\varphi(G) = \varphi(\{e\}) = \{e\}$. Значит, $y \in Z$.

Предложение 29. *Пусть G — вещественная или комплексная связная полупростая группа Ли.*

(i) $G = (G, G)$.

(ii) *Центр Z группы G дискретен.*

(iii) *Центр группы G/Z равен $\{e\}$.*

Утверждение (i) вытекает из следствия предложения 4 n° 2 и теоремы 1 гл. I, § 6.

Утверждение (ii) вытекает из следствия 4 предложения 10 § 6, n° 4, и замечания 2 гл. I, § 6, n° 1. Утверждение (iii) следует из (ii) и из леммы 1.

Предложение 30. (i) *Пусть $\mathfrak{g}$ — вещественная или комплексная полупростая алгебра Ли. Тогда* $\operatorname{Int}\mathfrak{g}$ *является компонентой единицы группы* $\operatorname{Aut}\mathfrak{g}$.

(ii) *Пусть G — вещественная или комплексная связная полупростая группа Ли. Присоединенная к G группа есть компонента единицы группы* $\operatorname{Aut} L(G)$. *Ее центр сводится к единичному элементу.*

Всякое дифференцирование алгебры Ли $\mathfrak{g}$ является внутренним (гл. I, § 6, следствие 3 предложения 1); стало быть, $L(\operatorname{Int}\mathfrak{g}) = L(\operatorname{Aut}\mathfrak{g})$, что доказывает (i). Первое утверждение в (ii) следует из (i). Второе вытекает из предложения 29 (iii) и следствия 4(ii) предложения 10 § 6, n° 4.

Замечание 2. Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная полупростая алгебра Ли, $\mathfrak{g}_0$ — нижележащая вещественная алгебра Ли. Тогда группа $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ открыта в $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g}_0)$. В самом деле, $\operatorname{Int}(\mathfrak{g}_0) \subset \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$.

Предложение 31. *Пусть G — вещественная или комплексная односвязная конечномерная группа Ли и R — ее радикал. Существует такая односвязная полупростая подгруппа Ли S в G, что G, рассматриваемая как группа Ли, есть полупрямое произведение группы S на R. Если S' — полупростая интегральная подгруппа в G, существует такой элемент x нильпотентного радикала алгебры Ли $L(G)$, что* $(\operatorname{Ad}\exp x)\,(S') \subset S$.

Это вытекает из следствия 1 предложения 14 § 6, n° 6, и гл. I, § 6, теорема 5 и следствие 1.

Лемма 2. *Пусть G — группа* (соотв. *топологическая группа*), *G' — ее нормальная подгруппа, V — конечномерное векторное пространство над некоторым полем k* (соотв. *над K*), *ρ — линейное*

(соотв. *непрерывное линейное*) *представление группы* G *в* V *и* $\rho' = \rho \mid G'$.

(i) *Если* ρ *полупросто, то* ρ' *полупросто.*

(ii) *Если* ρ' *полупросто и всякое линейное* k-*представление* (соотв. *всякое непрерывное линейное* K-*представление*) *конечной размерности группы* G/G' (соотв. $G/\overline{G}'$) *полупросто, то* ρ *полупросто.*

Допустим, что ρ полупросто, и покажем, что ρ' полупросто. Достаточно рассмотреть случай, когда ρ просто. Пусть V' — минимальный ненулевой под-G'-модуль в V. Для всякого $g \in G$ имеем $\rho(G')\rho(g)V' = \rho(g)\rho(G')V' = \rho(g)V'$; другими словами, $\rho(g)V'$ инвариантно относительно $\rho(G')$; если V'' — некоторый под-G'-модуль в $\rho(g)V'$, то $\rho(g)^{-1}V''$ является тогда под-G'-модулем в V', и, стало быть, V'' есть либо $\{0\}$, либо $\rho(g)V'$. Таким образом, $\rho(g)V'$ — простой G'-модуль для всякого $g \in G$. Но $\sum\limits_{g \in G} \rho(g)V'$ есть ненулевой под-G-модуль в V, откуда $V = \sum\limits_{g \in G} \rho(g)V'$. Значит, ρ' полупросто. Допустим, что ρ' полупросто. Пусть W — ненулевой под-G-модуль в V. Поскольку ρ' полупросто, существует проекция f_0 из V на W, коммутирующая с $\rho(G')$. Пусть E — множество элементов $f \in \mathscr{L}(V, V)$, которые коммутируют с $\rho(G')$, отображают V в W и ограничение которых на W есть гомотетия. Для $f \in E$ обозначим через $\alpha(f)$ элемент поля k (соотв. K), отвечающий гомотетии $f \mid W$. Тогда $f_0 \in E$ и $\alpha(f_0) = 1$. Ясно, что α есть линейная форма на E. Пусть $F = \operatorname{Ker} \alpha$; это гиперплоскость в E. Для $f \in E$ и $g \in G$ положим $\sigma(g)f = \rho(g) \circ f \circ \rho(g)^{-1}$; тогда $\sigma(g)f$ отображает V в W, и его ограничение на W есть гомотетия, отвечающая элементу $\alpha(f)$; если $g' \in G'$, то

$$\begin{aligned}
\sigma(g)f \circ \rho(g') &= \rho(g) \circ f \circ \rho(g)^{-1} \circ \rho(g') = \\
&= \rho(g) \circ f \circ \rho(g^{-1}g'g) \circ \rho(g^{-1}) = \\
&= \rho(g) \circ \rho(g^{-1}g'g) \circ f \circ \rho(g^{-1}) = \\
&= \rho(g') \circ \rho(g) \circ f \circ \rho(g^{-1}) = \\
&= \rho(g') \circ \sigma(g)f.
\end{aligned}$$

Стало быть, $\sigma(g)f \in E$. Следовательно, σ есть линейное k-представление (соотв. линейное непрерывное K-представление) группы G в E, относительно которого F устойчиво. Имеем $\sigma(g) = \mathrm{Id}_E$ при $g \in G'$ и потому при $g \in \overline{G}'$ в топологическом случае. Допустим, что всякое k-линейное (соотв. всякое непрерывное K-линейное) конечномерное представление группы G/G' (соотв. $G/\overline{G}'$) полупросто. Тогда в E существует дополнение к F, устой-

чивое относительно G. Другими словами, существует элемент $f \in E$, такой, что $\alpha(f) = 1$, и он инвариантен относительно G[1]). Тогда f есть проекция из V на W, и для $g \in G$ получаем $\rho(g) \circ f \circ \rho(g^{-1}) = f$, т. е. f коммутирует с $\rho(G)$. Таким образом, ρ полупросто.

Теорема 1. *Пусть G — вещественная или комплексная конечномерная группа Ли, G_0 — ее компонента единицы, R — ее радикал, $\mathfrak{r}$ — радикал алгебры Ли $L(G)$ и G/G_0 конечна. Пусть ρ—конечномерное линейное аналитическое представление группы G. Следующие условия эквивалентны:*

(i) ρ *полупросто*;

(ii) $\rho \mid G_0$ *полупросто*;

(iii) $\rho \mid R$ *полупросто*;

(iv) $L(\rho)$ *полупросто*;

(v) $L(\rho) \mid \mathfrak{r}$ *полупросто.*

Импликации (i)$\Leftrightarrow$(ii) следуют из леммы 2 и *Интегр.*, гл. VII, § 3, предложение 1. Импликации (ii)$\Leftrightarrow$(iv) и (iii)$\Leftrightarrow$(v) верны в силу следствия 2 предложения 13 § 6, n° 5. Импликации (iv)$\Leftrightarrow$(v) справедливы в силу теоремы 4 гл. I, § 6.

Следствие 1. *Пусть ρ, ρ_1, ρ_2 — конечномерные полупростые линейные аналитические представления группы G и n — целое число $\geqslant 0$. Тогда представления $\rho_1 \otimes \rho_2$, $\mathsf{T}^n\rho$, $\mathsf{S}^n\rho$, $\bigwedge^n\rho$* (см. добавление) *полупросты.*

Полупростота представления $\rho_1 \otimes \rho_2$ следует из теоремы 1 и следствия 1 теоремы 4 гл. I, § 6. Полупростота представлений $\mathsf{T}^n\rho$, $\mathsf{S}^n\rho$, $\bigwedge^n\rho$ вытекает из полупростоты представления $\rho_1 \otimes \rho_2$.

Мы увидим позже, что если k — поле характеристики 0, Γ — группа, ρ_1 и ρ_2 — ее конечномерные полупростые линейные k-представления, то $\rho_1 \otimes \rho_2$ полупросто.

Следствие 2. *Пусть ρ — конечномерное полупростое линейное аналитическое представление группы G в векторном пространстве V, S — симметрическая алгебра пространства V и S^G — подалгебра в S, образованная элементами, инвариантными относительно $(\mathsf{S}\rho)(G)$. Тогда S^G есть алгебра конечного типа.*

Это следует из теоремы 1 и теоремы 6а) гл. I, § 6, и *Комм. алг.*, гл. V, § 1, теорема 2.

Следствие 3. *Пусть G — вещественная или комплексная группа Ли, G_0 — компонента единицы. Предположим, что G_0 по-*

---

[1]) Элемент f в дополнении к F в E, устойчивом относительно G, является G-инвариантным, поскольку G сохраняет форму α. — *Прим. перев.*

лупроста и G/G_0 конечна. Тогда всякое конечномерное линейное аналитическое представление группы G полупросто.

Предложение 32. *Пусть G — конечномерная вещественная связная группа Ли. Предположим, что $L(G)$ редуктивна. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *факторгруппа $G/\overline{D^1G}$ компактна;*

(ii) (соотв. (ii′)) *всякое конечномерное линейное аналитическое представление группы G в комплексном* (соотв. *вещественном*) *векторном пространстве полупросто.*

(i)$\Rightarrow$(ii′). Допустим, что $G/\overline{D^1G}$ компактна. Тогда любое непрерывное линейное представление группы $G/\overline{D^1G}$ в конечномерном вещественном векторном пространстве полупросто (*Интегр.*, гл. VII, § 3, предложение 1). Пусть ρ — конечномерное линейное аналитическое представление группы G в вещественном векторном пространстве. Тогда $\rho \mid D^1G$ аналитично; но D^1G полупроста (гл. I, § 6, предложение 5) и потому $\rho \mid D^1G$ полупросто (следствие 3 теоремы 1). Стало быть, ρ полупросто (лемма 2).

Аналогично получаем, что (i)$\Rightarrow$(ii).

Докажем импликацию (ii′)$\Rightarrow$(i). Допустим, что $G/\overline{D^1G}$ некомпактна и, следовательно, изоморфна группе вида $\mathbf{R}^p \times \mathbf{T}^q$, где $p > 0$ (§ 6, n° 4, предложение 11 (ii)). Тогда существует сюръективный морфизм из $G/\overline{D^1G}$ в $\mathbf{R}$ и, стало быть, сюръективный морфизм ρ из G в $\mathbf{R}$. Отображение

$$g \mapsto \sigma(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho(g) & 1 \end{pmatrix}$$

есть линейное аналитическое представление группы G в $\mathbf{R}^2$, которое не является полупростым, ибо единственное одномерное векторное подпространство в $\mathbf{R}^2$, устойчивое относительно $\sigma(G)$, есть $\mathbf{R}(0, 1)$.

Аналогично получаем, что (ii)$\Rightarrow$(i).

Предложение 33. *Пусть G — конечномерная комплексная группа Ли с конечным числом связных компонент, ρ — ее конечномерное линейное аналитическое представление, G' — интегральная подгруппа вещественной группы Ли G, такая, что $L(G')$ порождает $L(G)$ над $\mathbf{C}$. Тогда ρ полупросто в том и только том случае, когда $\rho \mid G'$ полупросто.*

Пусть $\rho' = \rho \mid G'$. Для полупростоты ρ (соотв. ρ') необходимо и достаточно, чтобы $L(\rho)$ (соотв. $L(\rho')$) было полупросто (теорема 1). Пусть V — пространство представления ρ. Для того чтобы некоторое векторное подпространство в V было устой-

чиво относительно $L(\rho)(L(G))$, необходимо и достаточно, чтобы оно было устойчиво относительно $L(\rho')(L(G'))$. Отсюда вытекает предложение.

§ 10. Группа автоморфизмов группы Ли

В этом параграфе мы предполагаем, что характеристика поля K равна нулю.

1. *Инфинитезимальные автоморфизмы*

Лемма 1. *Пусть G — группа Ли, α — векторное поле на G. Для всякого $g \in G$ пусть $\beta(g) = \alpha(g)g^{-1} \in L(G)$. Следующие условия эквивалентны:*

(i) *α есть гомоморфизм группы G в группу $T(G)$;*

(ii) *каковы бы ни были g, g' в G, имеем $\alpha(gg') = \alpha(g)g' + g\alpha(g')$;*

(iii) *каковы бы ни были g, g' в G, имеем $\beta(gg') = \beta(g) + (\operatorname{Ad} g)\beta(g')$.*

Условие (i) означает, что, каковы бы ни были g, g' в G, в группе $T(G)$

$$\beta(g)g\beta(g')g' = \beta(gg')gg',$$

или

$$\beta(g)((\operatorname{Ad} g)\beta(g'))gg' = \beta(gg')gg'.$$

Но произведение элементов $\beta(g)$ и $(\operatorname{Ad} g)\beta(g')$ в $T(G)$ есть не что иное, как их сумма в $L(G)$ (§ 2, n° 1, предложение 2). Стало быть, (i)$\Leftrightarrow$(iii). С другой стороны, условие (ii) записывается в виде $\beta(gg')gg' = \beta(g)gg' + g\beta(g')g'$, или

$$\beta(gg') = \beta(g) + (\operatorname{Ad} g)\beta(g');$$

значит, (ii)$\Leftrightarrow$(iii).

Определение 1. *Пусть G — группа Ли. Инфинитезимальным автоморфизмом группы G называется всякое аналитическое векторное поле на G, удовлетворяющее условиям леммы 1.*

Лемма 2. *Пусть K' — замкнутое недискретное подполе в K, A — многообразие над K', B и C — многообразия над K, f — некоторое K'-аналитическое отображение из $A \times B$ в C. Предположим, что для всякого $a \in A$ отображение $b \mapsto f(a, b)$ из B в C является K-аналитическим. Тогда для любого $t \in TA$ отображение $u \mapsto (Tf)(t, u)$ из TB в TC является K-аналитическим.*

Зафиксируем $t \in TA$ и положим $g(u) = (Tf)(t, u)$. Ясно, что g является K'-аналитическим отображением. В силу *Мн. Св.*

рез., 5.14.6, достаточно доказать, что отображения, касательные к g, K-линейны. Можно предположить, что A, B, C суть открытые окрестности элемента 0 в некоторых полных нормируемых пространствах E, F, G над K', K, K соответственно и что t есть касательный вектор к A в 0. Отождествим TA, TB, TC соответственно с $A\times E$, $B\times F$, $C\times G$, а вектор t — с элементом из E. Тогда для всякой пары $(x, y)\in TB=B\times F$

$$g(x, y)=(f(0, x), (D_1f)(0, x)(t)+(D_2f)(0, x)(y)).$$

Отождествим $T(B\times F)$ с $(B\times F)\times(F\times F)$ и $T(C\times G)$ с $(C\times G)\times\times(G\times G)$. Тогда для любого элемента $((x, y), (h, k))\in T(B\times F)==(B\times F)\times(F\times F)$ имеем $(Tg)((x, y), (h, k))=((a, b), (c, d))$, где

$$a=(f(0, x)),$$
$$b=(D_1f)(0, x)(t)+(D_2f)(0, x)(y), \quad c=(D_2f)(0, x)(h),$$
$$d=(D_2D_1f)(0, x)(t, h)+(D_2D_2f)(0, x)(y, h)+(D_2f)(0, x)(k).$$

Зафиксируем теперь $(x, y)\in B\times F$. Мы должны показать, что отображение $(h, k)\mapsto(c, d)$ из $F\times F$ в $G\times G$ является K-линейным. Поскольку отображение $x\mapsto f(0, x)$ из B в C является K-аналитическим, отображения

$$(h, k)\mapsto(D_2f)(0, x)(h), \quad (h, k)\mapsto(D_2D_2f)(0, x)(y, h),$$
$$(h, k)\mapsto(D_2f)(0, x)(k)$$

K-линейны. С другой стороны,

$$(D_2D_1f)(0, x)(t, h)=\lim_{\lambda\in K'^*,\ \lambda\to 0}\lambda^{-1}((D_2f)(\lambda t, x)(h)-(D_2f)(0, x)(h)),$$

и при фиксированном λ отображение $x\mapsto f(\lambda t, x)$ является K-аналитическим, так что отображение $h\mapsto(D_2f)(\lambda t, x)(h)$ является K-линейным.

Предложение 1. *Пусть K' — замкнутое недискретное подполе в K, G — группа Ли над K, V — многообразие над K' и $(v, g)\mapsto vg$ — некоторое K'-аналитическое отображение из $V\times G$ в G. Предположим, что для всякого $v\in V$ отображение $g\mapsto vg$ из G в G есть автоморфизм группы Ли G. Пусть ε — элемент из V, такой, что $\varepsilon g=g$ для всех $g\in G$, и $a\in T_\varepsilon(V)$. Тогда векторное поле $g\mapsto ag$ на G является инфинитезимальным автоморфизмом группы G.*

Если $v\in V$, $g_1\in G$, $g_2\in G$, то $v(g_1g_2)=(vg_1)(vg_2)$. Стало быть, если $u_1\in TG$, $u_2\in TG$, то $a(u_1u_2)=(au_1)(au_2)$ (§ 2, n° 1,

предложение 3). В частности, отображение $g \mapsto ag$ из G в TG есть гомоморфизм групп. С другой стороны, это отображение аналитично в силу леммы 2.

Предложение 2. *Пусть G — вещественная или комплексная группа Ли, α — инфинитезимальный автоморфизм группы G. Существует закон аналитического действия $(\lambda, g) \mapsto \varphi_\lambda(g)$ группы K на G, обладающий следующими свойствами:*

1) *если D — ассоциированный закон инфинитезимального действия, то $D(1) = \alpha$;*

2) *если $\lambda \in K$, то $\varphi_\lambda \in \operatorname{Aut} G$.*

а) Для всякого $\mu > 0$ обозначим через K_μ открытый шар с центром 0 радиуса μ в K. Для всякого $g \in G$ обозначим через $\mathscr{F}_g$ множество аналитических интегральных кривых f поля α, определенных в каком-либо из шаров K_μ и таких, что $f(0) = g$. В силу *Мн. Св. рез.*, 9.1.3 и 9.1.5, множество $\mathscr{F}_g$ непусто и любые два его элемента совпадают на пересечении областей их определения; пусть $\mu(g)$ — верхняя грань таких чисел μ, что найдется элемент из $\mathscr{F}_g$, который определен в K_μ; в $\mathscr{F}_g$ существует единственный элемент, определенный в $K_{\mu(g)}$; мы обозначим его через f_g.

б) Пусть g_1, g_2 лежат в G, $f_1 \in \mathscr{F}_{g_1}$, $f_2 \in \mathscr{F}_{g_2}$, причем f_1 и f_2 определены в одном и том же шаре K_μ. Тогда отображение $f_1 f_2\colon K_\mu \to G$ аналитично и $(f_1 f_2)(0) = g_1 g_2$. С другой стороны, если $\lambda \in K_\mu$, то

$$\begin{aligned}(T_\lambda(f_1 f_2))\,1 &= (T_\lambda f_1)\,1 \cdot f_2(\lambda) + f_1(\lambda) \cdot (T_\lambda f_2)\,1 \quad (\text{§ 2, предложение 7}) = \\ &= \alpha(f_1(\lambda))\,f_2(\lambda) + f_1(\lambda)\,\alpha(f_2\lambda)) = \\ &= \alpha((f_1 f_2)(\lambda)) \quad (\text{лемма 1});\end{aligned}$$

стало быть, $f_1 f_2 \in \mathscr{F}_{g_1 g_2}$. Это означает, что $\mu(g_1 g_2) \geqslant \inf(\mu(g_1), \mu(g_2))$.

в) В силу *Мн. Св. рез.*, 9.1.4 и 9.1.5, существует такая окрестность V элемента e в G, что $\sigma = \inf\limits_{g \in V} \mu(g) > 0$. Пусть $h \in G$ и C — его связная компонента. Для всякого $h' \in C$ получаем в силу б) $\mu(h') \geqslant \inf(\sigma, \mu(h)) > 0$. С другой стороны, функции $f_{h'}$ при $h' \in C$ принимают значения в C. В силу *Мн. Св. рез.*, 9.1.4 и 9.1.5, $\mu = +\infty$ в C и, наконец, $\mu = +\infty$ в G. Положим тогда $f_g(\lambda) = \varphi_\lambda(g)$ для всех $g \in G$ и $\lambda \in K$. В силу *Мн. Св. рез.*, 9.1.4 и 9.1.5, отображение $(\lambda, g) \mapsto \varphi_\lambda(g)$ является законом аналитического действия группы K на G. Ясно, что если D — ассоциированный закон инфинитезимального

действия, то $D(1)=\alpha$. Согласно б),

$$\varphi_\lambda(g_1g_2)=\varphi_\lambda(g_1)\varphi_\lambda(g_2),$$

каковы бы ни были $\lambda\in K$, $g_1\in G$, $g_2\in G$.

Предложение 3. *Предположим, что K ультраметрично. Пусть G — компактная группа Ли, α — ее инфинитезимальный автоморфизм. Существуют открытая подгруппа I в K и закон аналитического действия $(\lambda, g)\mapsto\varphi_\lambda(g)$ группы I на G, обладающий следующими свойствами:*

1) *если D — ассоциированный закон инфинитезимального действия, то $D(1)=\alpha$;*

2) *$\varphi_\lambda\in\operatorname{Aut}G$ для всякого $\lambda\in I$.*

Поскольку G компактна, существуют открытая подгруппа I' в K и закон аналитического действия $(\lambda, g)\mapsto\varphi_\lambda(g)$ группы I' на G, обладающие свойством 1) предложения (§ 4, n° 7, следствие 2 теоремы 6). Положим $f_g(\lambda)=\varphi_\lambda(g)$ при $\lambda\in I'$ и $g\in G$. Если g_1, g_2 лежат в G и $\lambda\in I'$, то

$$\begin{aligned}(T_\lambda(f_{g_1}f_{g_2}))1&=(T_\lambda f_{g_1})1\cdot f_{g_2}(\lambda)+f_{g_1}(\lambda)\cdot(T_\lambda f_{g_2})1=\\&=\alpha(f_{g_1}(\lambda))f_{g_2}(\lambda)+f_{g_1}(\lambda)\alpha(f_{g_2}(\lambda))=\alpha(f_{g_1}(\lambda)f_{g_2}(\lambda))\end{aligned}$$

и $(f_{g_1}f_{g_2})(0)=g_1g_2=f_{g_1g_2}(0)$. Стало быть, $f_{g'_1g'_2}(\lambda)=f_{g'_1}(\lambda)f_{g'_2}(\lambda)$, если (g'_1, g'_2, λ) лежит в некоторой окрестности элемента $(g_1, g_2, 0)$ (*Мн. Св. рез.*, 9.1.8). Поскольку G компактна, существует такая открытая подгруппа I в I', что $f_{g_1g_2}(\lambda)=f_{g_1}(\lambda)f_{g_2}(\lambda)$, каковы бы ни были $g_1\in G$, $g_2\in G$, $\lambda\in I$. Другими словами, $\varphi_\lambda\in\operatorname{Aut}G$ при $\lambda\in I$.

Лемма 3. Пусть G и G' — группы Ли, φ — гомоморфизм из G в $\operatorname{Aut}(G')$. *Положим $f(g, g')=(\varphi(g))(g')$ при $g\in G$, $g'\in G'$. Рассмотрим следующие условия:*

(i) *f аналитично;*

(ii) *f аналитично в некоторой окрестности элемента $(e_G, e_{G'})$;*

(iii) *для всякого $g'\in G'$ отображение $g\mapsto f(g, g')$ аналитично.*

Тогда (i)$\Leftrightarrow$((ii) *и* (iii)). *Если G' связна, то* (i)$\Leftrightarrow$(ii).

Ясно, что из (i) следуют (ii) и (iii). Пусть $g_0\in G$, $g'_0\in G'$. Каковы бы ни были $g\in G$, $g'\in G'$,

$$f(gg_0, g'g'_0)=(\varphi(g)\varphi(g_0))(g'g'_0)=\varphi(g)(\varphi(g_0)g')\cdot\varphi(g)(\varphi(g_0)g'_0).$$

Это доказывает импликацию ((ii) и (iii))$\Rightarrow$(i). Наконец, если G' связна, то G' порождается всякой окрестностью элемента $e_{G'}$, а потому (ii)$\Rightarrow$(iii).

2. Группа автоморфизмов группы Ли (вещественный или комплексный случай)

В этом пункте мы предполагаем, что $K = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$.

Лемма 4. *Пусть H — односвязная конечномерная группа Ли.*

(i) *Для всякого $u \in \operatorname{Aut} L(H)$ обозначим через $\theta(u)$ единственный автоморфизм группы H, такой, что $L(\theta(u)) = u$. Тогда отображение $(u, g) \mapsto \theta(u) g$ из $(\operatorname{Aut} L(H)) \times H$ в H аналитично.*

(ii) *Пусть N — подгруппа Ли в H и $\operatorname{Aut}(H, N)$ — множество элементов $v \in \operatorname{Aut} H$, таких, что $v(N) = N$. Тогда $\theta^{-1}(\operatorname{Aut}(H, N))$ есть подгруппа Ли в $\operatorname{Aut} L(H)$.*

(iii) *Предположим, что N дискретна и нормальна, так что алгебра Ли группы $G = H/N$ отождествляется с $L(H)$. Для всякого $w \in \operatorname{Aut} G$ пусть $\eta(w)$ — единственный автоморфизм группы H, такой, что $L(\eta(w)) = L(w)$. Тогда отображение η является изоморфизмом группы $\operatorname{Aut} G$ на группу $\operatorname{Aut}(H, N)$.*

Для доказательства утверждения (i) достаточно, согласно лемме 3 n° 1, проверить, что отображение $(u, g) \mapsto \theta(u) g$ аналитично в некоторой окрестности элемента $(\mathrm{Id}_{L(H)}, e)$. Существует открытая окрестность B элемента 0 в $L(H)$, такая, что $\psi = \exp_H | B$ есть аналитический изоморфизм из B на некоторую открытую окрестность элемента e в H. Существуют открытая окрестность U элемента $\mathrm{Id}_{L(H)}$ в $\operatorname{Aut} L(H)$ и открытая окрестность B' элемента 0 в $L(H)$, такие, что $U(B') \subset B$. Тогда отображение $(u, g) \mapsto \theta(u) g$ из $U \times \psi(B')$ в H разлагается в композицию следующих отображений:

$$
\begin{array}{lll}
(u, g) \mapsto (u, \psi^{-1}(g)) & \text{из } U \times \psi(B') & \text{в } U \times B'; \\
(u, x) \mapsto u(x) & \text{из } U \times B' & \text{в } B; \\
y \mapsto \psi(y) & \text{из } B & \text{в } G.
\end{array}
$$

Следовательно, это отображение аналитично.

Пусть p — каноническая проекция группы H на однородное пространство H/N. Тогда $\theta^{-1}(\operatorname{Aut}(H, N)$ есть множество таких $u \in \operatorname{Aut} L(H)$, что

$$p(\theta(u) g) = p(e), \quad p(\theta(u^{-1}) g) = p(e)$$

для всякого $g \in N$. Если принять во внимание теорему 2 и ее следствие 2 из § 8, n° 2, то (ii) будет доказано.

Предположим, что подгруппа N нормальна и дискретна. Пусть $w \in \operatorname{Aut} G$. Тогда

$$L(p \circ \eta(w)) = L(\eta(w)) = L(w) = L(w \circ p),$$

а потому $p \circ \eta(w) = w \circ p$ и, следовательно, $\eta(w) \in \operatorname{Aut}(H, N)$. Ясно, что отображение η из $\operatorname{Aut}(G)$ в $\operatorname{Aut}(H, N)$ является

инъективным гомоморфизмом. Этот гомоморфизм сюръективен, поскольку p: $H \to G$ есть субмерсия Ч. Т. Д.

Пусть G — локально компактная группа, Γ — группа ее автоморфизмов. Напомним, что на Γ была определена топология $\mathcal{T}_\beta$ (*Общ. топ.*, гл. X, § 3, n° 5). Это наименее сильная топология, относительно которой отображения $v \mapsto v$ и $v \mapsto v^{-1}$ из Γ в $\mathscr{C}_c(G; G)$ (пространство непрерывных отображений из G в G, наделенное топологией компактной сходимости) непрерывны. Топология $\mathcal{T}_\beta$ согласована с групповой структурой на Γ (*там же*). Для всякого компактного подмножества L в G и всякой окрестности U элемента e_G в G обозначим через $N(L, U)$ множество таких $\varphi \in \Gamma$, что $\varphi(g) \in gU$ и $\varphi^{-1}(g) \in gU$ для любого $g \in L$; тогда множества $N(L, U)$ образуют фундаментальную систему окрестностей элемента e_Γ. Если G порождается компактным подмножеством C, то топология $\mathcal{T}_\beta$ также является наименее сильной топологией относительно которой отображения $v \mapsto v|C$ и $v \mapsto v^{-1}|C$ из Γ в $\mathscr{C}_c(C; G)$ непрерывны (ибо всякое компактное подмножество в G содержится в $(C \cup C^{-1})^n$ при достаточно большом n). Если K локально компактно и V — конечномерное векторное пространство над K, то топология $\mathcal{T}_\beta$ на $\mathbf{GL}(V)$ совпадает с обычной топологией.

Теорема 1. *Пусть G — конечномерная группа Ли, G_0 — ее компонента единицы. Предположим, что G порождается подгруппой G_0 и некоторым конечным множеством элементов.*

(i) *На* $\operatorname{Aut} G$ *существует одна, и только одна, структура аналитического многообразия, удовлетворяющая условию*

(AUT) *если M — произвольное аналитическое многообразие и f — отображение из M в* $\operatorname{Aut} G$, *то f аналитично тогда и только тогда, когда отображение $(m, g) \mapsto f(m)g$ из $M \times G$ в G аналитично.*

В формулировке остальных утверждений теоремы мы предполагаем, что $\operatorname{Aut} G$ *наделена этой структурой.*

(ii) $\operatorname{Aut} G$ *есть конечномерная группа Ли.*

(iii) *Морфизм φ: $u \mapsto L(u)$ из* $\operatorname{Aut} G$ *в* $\operatorname{Aut} L(G)$ *аналитичен.*

(iv) *Если G связна, то φ является изоморфизмом группы Ли* $\operatorname{Aut} G$ *на некоторую подгруппу Ли в* $\operatorname{Aut} L(G)$; *эта подгруппа Ли совпадает с* $\operatorname{Aut} L(G)$, *если G односвязна.*

(v) *Пусть $\mathfrak{a}$ — множество инфинитезимальных автоморфизмов группы G. Тогда $\mathfrak{a}$ есть алгебра Ли векторных полей и закон инфинитезимального действия, ассоциированный с отображением $(u, g) \mapsto u(g)$ из* $(\operatorname{Aut} G) \times G$ *в G, устанавливает изоморфизм из* $L(\operatorname{Aut} G)$ *на $\mathfrak{a}$.*

(vi) *Топология группы Ли* $\operatorname{Aut} G$ *совпадает с топологией $\mathcal{T}_\beta$.*

а) Единственность аналитической структуры, о которой идет речь в п. (i), очевидна.

б) Предположим, что G связна. Пусть H — ее универсальная накрывающая, p — канонический морфизм из H на G и $N = \operatorname{Ker} p$. Введем обозначения θ, η и $\operatorname{Aut}(H, N)$ леммы 4. Посредством θ перенесем на $\operatorname{Aut} H$ структуру группы Ли на $\operatorname{Aut} L(G)$. Тогда $\operatorname{Aut} H$ становится конечномерной группой Ли, а $\operatorname{Aut}(H, N)$ — ее подгруппой Ли (лемма 4 (ii)). Посредством η^{-1} перенесем на $\operatorname{Aut} G$ структуру группы Ли на $\operatorname{Aut}(H, N)$. Тогда $\operatorname{Aut} G$ становится конечномерной группой Ли. Утверждения (ii), (iii) и (iv) теоремы выполнены, и отображение $(u, g) \mapsto u(g)$ из $(\operatorname{Aut} G) \times G$ в G аналитично (лемма 4(i)). Пусть M — аналитическое многообразие, f — отображение из M в $\operatorname{Aut} G$ и φ — отображение $(m, g) \mapsto f(m) g$ из $M \times G$ в G. Ясно, что если f аналитично, то φ аналитично. Допустим, что φ аналитично. Тогда отображение $T\varphi\colon TM \times TG \to TG$ аналитично; его ограничение на $M \times L(G)$, т. е. отображение $(m, x) \mapsto L(f(m))x$ из $M \times L(G)$ в $L(G)$, также, стало быть, аналитично; поскольку $L(G)$ имеет конечную размерность, отсюда следует, что отображение $m \mapsto L(f(m))$ из M в $\operatorname{Aut} L(G)$ аналитично, а потому f аналитично. Таким образом, мы проверили (i).

Наделим $L(G)$ некоторой нормой. Для всякого $\lambda > 0$ обозначим через B_λ открытый шар с центром в 0 радиуса λ в $L(G)$. Выберем $\lambda > 0$ настолько малым, чтобы $\psi = \exp_G | B_\lambda$ было изоморфизмом аналитического многообразия B_λ на открытое подмногообразие $\psi(B_\lambda)$ в G. Пусть Φ — фильтр на $\operatorname{Aut} G$. Для сходимости фильтра Φ к Id_G в $\operatorname{Aut} G$ необходимо и достаточно, чтобы $L(\Phi)$ сходился к $\mathrm{Id}_{L(G)}$ в $\operatorname{Aut} L(G)$, т. е. чтобы $L(\Phi) | B_{\lambda/2}$ и $L(\Phi^{-1}) | B_{\lambda/2}$ равномерно сходились к $\mathrm{Id}_{B_{\lambda/2}}$. Из этого условия следует, что $\Phi | \psi(B_{\lambda/2})$ и $\Phi^{-1} | \psi(B_{\lambda/2})$ равномерно сходятся к $\mathrm{Id}_{\psi(B_{\lambda/2})}$. Обратно, допустим, что $\Phi | \psi(B_{\lambda/2})$ равномерно сходится к $\mathrm{Id}_{\psi(B_{\lambda/2})}$. Существует такое $M \in \Phi$, что если $u \in M$, то $u(\psi(B_{\lambda/2})) \subset \psi(B_{2\lambda/3})$; тогда $L(u)(B_{\lambda/2})$ есть связное подмножество в $L(G)$, образ которого при $\exp_G$ содержится в $\psi(B_{2\lambda/3})$; поэтому $L(u)(B_{\lambda/2})$ не пересекается с $B_\lambda - B_{2\lambda/3}$ и, следовательно, $L(u)(B_{\lambda/2}) \subset B_\lambda$. Из предположения, что $\Phi | \psi(B_{\lambda/2})$ равномерно сходится к $\mathrm{Id}_{\psi(B_{\lambda/2})}$, следует тогда, что $L(\Phi) | B_{\lambda/2}$ равномерно сходится к $\mathrm{Id}_{B_{\lambda/2}}$. Отсюда мы получаем, что

$$(\Phi \text{ сходится к } \mathrm{Id}_G \text{ в } \operatorname{Aut} G) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\Phi \text{ сходится к } \mathrm{Id}_G \text{ в топологии } \mathcal{T}_\beta).$$

Это доказывает (vi).

Пусть D — закон инфинитезимального действия, ассоциированный с законом левого действия группы $\operatorname{Aut} G$ на G. В силу

предложений 1 и 2 n° 1 $D(L(\operatorname{Aut} G)) = \mathfrak{a}$. Значит, $\mathfrak{a}$ есть алгебра Ли векторных полей и D является морфизмом из $L(\operatorname{Aut} G)$ на $\mathfrak{a}$. Пусть x_1 и x_2 — элементы из $L(\operatorname{Aut} G)$, такие, что $D(x_1) = D(x_2)$. Тогда законы действия $(\lambda, g) \mapsto (\exp \lambda x_1) g$ и $(\lambda, g) \mapsto (\exp \lambda x_2) g$ группы K на G имеют одинаковый ассоциированный закон инфинитезимального действия. Следовательно, при достаточно малых $|\lambda|$ автоморфизмы $\exp \lambda x_1$ и $\exp \lambda x_2$ совпадают в некоторой окрестности элемента e (§ 4, n° 7, теорема 6), откуда $\exp \lambda x_1 = \exp \lambda x_2$. Отсюда мы заключаем, что $x_1 = x_2$ и, стало быть, D есть изоморфизм из $L(\operatorname{Aut} G)$ на $\mathfrak{a}$.

Таким образом, теорема полностью доказана для связных групп G.

в) Перейдем к общему случаю. По предположению G порождается подгруппой G_0 и конечным числом элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Относительно элемента $u \in \operatorname{Aut} G$ подгруппа G_0 устойчива. Пусть $\operatorname{Aut}_1 G$ — множество тех $u \in \operatorname{Aut} G$, которые при переходе к фактору дают тождественный автоморфизм группы G/G_0. Это нормальная подгруппа в $\operatorname{Aut} G$. Согласно п. б) доказательства, $\operatorname{Aut} G_0$ канонически наделена структурой группы Ли, а отображение $(g_1, g_2, \ldots, g_n, u) \mapsto (ug_1, ug_2, \ldots, ug_n)$ из $G_0^n \times \operatorname{Aut} G_0$ в G_0^n аналитично. Пусть P — соответствующее полупрямое произведение группы $\operatorname{Aut} G_0$ на G_0^n; это — группа Ли (§ 1, n° 4, предложение 7), имеющая конечную размерность.

Если $w \in \operatorname{Aut}_1 G$, положим

$$w_0 = w \mid G_0 \in \operatorname{Aut} G_0,$$
$$w_i = x_i^{-1} w(x_i) \in G_0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant n),$$
$$\zeta(w) = ((w_1, \ldots, w_n), w_0) \in P.$$

Каковы бы ни были w, w' в $\operatorname{Aut}_1 G$,

$$\begin{aligned}\zeta(w)\zeta(w') &= ((w_1, \ldots, w_n)(w_0(w_1'), \ldots, w_0(w_n')), w_0 w_0') = \\ &= ((w_1 w_0(w_1'), \ldots, w_n w_0(w_n')), w_0 w_0') = \\ &= ((x_1^{-1} w(x_1) w(x_1^{-1} w'(x_1)), \ldots, x_n^{-1} w(x_n) w(x_n^{-1} w'(x_n))), w_0 w_0') = \\ &= (((ww')_1, \ldots, (ww')_n), (ww')_0) = \\ &= \zeta(ww');\end{aligned}$$

следовательно, ζ есть гомоморфизм из $\operatorname{Aut}_1 G$ в P. Этот гомоморфизм, очевидно, инъективен.

Покажем, что $\zeta(\operatorname{Aut}_1 G)$ замкнута в P. Пусть Φ — фильтр на $\operatorname{Aut}_1 G$, такой, что $\zeta(\Phi)$ сходится к некоторой точке $((w_1, \ldots, w_n), w_0)$ из P. Тогда Φ сходится к некоторому отображению v из G в G. Ясно, что v — эндоморфизм группы G. Кроме того, v переводит в себя всякий класс смежности по подгруппе G_0 и $v \mid G_0 = w_0$. Отсюда следует, что $v \in \operatorname{Aut}_1 G$.

Поскольку $\zeta(v)=((w_1, \ldots, w_n), w_0)$, мы показали, что $\zeta(\mathrm{Aut}_1 G)$ замкнута в P.

г) В этом пункте доказательства мы предполагаем, что $K=\mathbf{R}$. В силу теоремы 2 § 2, n° 2, $\zeta(\mathrm{Aut}_1 G)$ является подгруппой Ли в P. Посредством ζ^{-1} перенесем на $\mathrm{Aut}_1 G$ структуру вещественной группы Ли на $\zeta(\mathrm{Aut}_1 G)$. Таким образом, $\mathrm{Aut}_1 G$ становится конечномерной группой Ли.

Пусть M — аналитическое многообразие, f — отображение из M в $\mathrm{Aut}_1 G$ и φ — отображение $(m, g) \mapsto f(m) g$ из $M \times G$ в G. Справедливы следующие импликации:

$$\{f \text{ аналитично}\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{\text{отображения } m \mapsto (f(m))_i, \text{ где } 0 \leqslant i \leqslant n, \text{ аналитичны}\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{отображения } m \to f(m) x_i \text{ из } M \text{ в } G \text{ при } 1 \leqslant i \leqslant n \\ \text{аналитичны} \\ \text{и} \\ \text{отображение } (m, g) \mapsto f(m) g \text{ из } M \times G_0 \text{ в } G \text{ ана-} \\ \text{литично} \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{\varphi \text{ аналитично}\}.$$

Если $w \in \mathrm{Aut}_1 G$, то $L(w)=L(w_0)$, и потому морфизм $w \mapsto L(w)$ из $\mathrm{Aut}_1 G$ в $\mathrm{Aut}\, L(G)$ аналитичен. Как и в п. б), мы получаем, что закон инфинитезимального действия, ассоциированный с законом действия группы $\mathrm{Aut}_1 G$ на G, есть изоморфизм из $L(\mathrm{Aut}_1 G)$ на $\mathfrak{a}$.

Пусть C — компактное подмножество в G_0, порождающее G_0. Для сходимости некоторого фильтра Φ к Id_G в $\mathrm{Aut}_1 G$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\Phi \mid (C \cup \{x_1\} \cup \ldots \cup \{x_n\}) \quad \text{и} \quad \Phi^{-1} \mid (C \cup \{x_1\} \cup \ldots \cup \{x_n\})$$

равномерно сходились к

$$\mathrm{Id}_G \mid (C \cup \{x_1\} \cup \ldots \cup \{x_n\}).$$

Топология группы Ли $\mathrm{Aut}_1 G$ совпадает, таким образом, с топологией $\mathscr{T}_\beta$.

Ясно, что $\mathrm{Aut}_1 G$ открыта в $\mathrm{Aut}\, G$ в топологии $\mathscr{T}_\beta$. На $\mathrm{Aut}\, G$ существует структура группы Ли, согласованная с этой топологией и индуцирующая на $\mathrm{Aut}_1 G$ только что построенную структуру (§ 8, n° 1, следствие 2 теоремы 1). То, что группа Ли $\mathrm{Aut}\, G$ обладает свойствами, перечисленными в формулировке теоремы, следует из соответствующих свойств группы $\mathrm{Aut}_1 G$.

д) В этом пункте доказательства мы предполагаем, что $K=\mathbf{C}$. В силу в) и теоремы 2 § 8, n° 2, на $\mathrm{Aut}_1 G$ существует такая структура вещественной группы Ли, что ζ есть изоморфизм из $\mathrm{Aut}_1 G$ на вещественную подгруппу Ли в P.

Действие $(w, g) \longmapsto wg$ группы $\mathrm{Aut}_1 G$ на G является вещественно-аналитическим. Пусть D — ассоциированный закон инфинитезимального действия. В силу предложений 1 и 2 n° 1 $D(L(\mathrm{Aut}_1 G)) = \mathfrak{a}$.

Для всякого $\alpha \in \mathfrak{a}$ обозначим через α_0 ограничение поля α на G_0; это инфинитезимальный автоморфизм группы G_0, который, согласно п. б) доказательства, можно отождествить с некоторым элементом алгебры Ли $L(\mathrm{Aut}\, G_0)$. Для $1 \leqslant i \leqslant n$ положим

$$\alpha_i = x_i^{-1}\alpha(x_i) \in L(G) = L(G_0).$$

Наконец, положим $f(\alpha) = ((\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \alpha_0) \in L(P)$. Тогда f есть $\mathbf{C}$-линейное отображение из $\mathfrak{a}$ в $L(P)$.

С другой стороны, ясно, что $L(\zeta) = f \circ D$. Стало быть, $L(\zeta)(L(\mathrm{Aut}_1 G)) = f(\mathfrak{a})$ является комплексным векторным подпространством в $L(P)$. В силу предложения 2 § 4, n° 2, $\zeta(\mathrm{Aut}_1 G)$ есть комплексная подгруппа Ли в P, и можно теперь рассуждать точно так же, как в п. г): посредством ζ^{-1} мы переносим на $\mathrm{Aut}_1 G$ структуру комплексной группы Ли на $\zeta(\mathrm{Aut}_1 G)$ и, как и в г), убеждаемся, что $\mathrm{Aut}_1 G$ обладает свойствами, аналогичными свойствам (i), (ii), (iii), (v), (vi), перечисленным в формулировке теоремы.

Ясно, что $\mathrm{Aut}_1 G$ открыта в $\mathrm{Aut}\, G$ в топологии $\mathscr{T}_\beta$. Пусть $w \in \mathrm{Aut}\, G$ и σ — автоморфизм $v \longmapsto wvw^{-1}$ группы $\mathrm{Aut}_1 G$. Он вещественно-аналитичен (§ 8, n° 1, теорема 1), $L(\sigma)$ есть $\mathbf{R}$-автоморфизм алгебры Ли $L(\mathrm{Aut}_1 G)$ и $D \circ L(\mathrm{Aut}_1 G) \circ D^{-1}$ есть $\mathbf{R}$-автоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{a}$. Этот автоморфизм является также автоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{a}$, получающимся из w посредством переноса структуры; поскольку w есть K-аналитический автоморфизм, мы видим, что $L(\sigma)$ есть K-линейное отображение. Следовательно, σ является K-аналитическим автоморфизмом (§ 3, n° 8, предложение 32). В силу предложения 18 § 1, n° 9, на $\mathrm{Aut}\, G$ существует одна, и только одна, структура K-группы Ли, такая, что $\mathrm{Aut}_1 G$ — открытая подгруппа Ли в $\mathrm{Aut}\, G$. То, что эта структура обладает свойствами, указанными в формулировке теоремы, вытекает из соответствующих свойств группы $\mathrm{Aut}_1 G$.

Следствие 1. *Пусть G — вещественная конечномерная группа Ли, G_0 — ее компонента единицы. Предположим, что G порождается подгруппой G_0 и конечным числом элементов. Тогда* $\mathrm{Aut}\, G$, *наделенная топологией $\mathscr{T}_\beta$, является вещественной конечномерной группой Ли.*

Следствие 2. *Пусть G — вещественная или комплексная связная полупростая группа Ли. Группа* $\mathrm{Int}\, G$ *есть компонента единицы группы* $\mathrm{Aut}\, G$.

Отображение $u \mapsto L(u)$ является изоморфизмом группы $\operatorname{Aut} G$ на некоторую подгруппу Ли в $\operatorname{Aut} L(G)$ (теорема 1). Образ группы $\operatorname{Int} G$ при этом изоморфизме есть $\operatorname{Ad} G$. Но $\operatorname{Ad} G$ является компонентой единицы группы $\operatorname{Aut} L(G)$ (§ 9, n° 8, предложение 30 (ii)).

3. *Группа автоморфизмов группы Ли (ультраметрический случай)*

Теорема 2. *Если поле K локально компактно и ультраметрично, G — компактная группа Ли, то утверждения* (i), (ii), (iii), (v), (vi) *теоремы* 1 *остаются в силе.*

а) Единственность аналитической структуры, о которой идет речь в (i), очевидна.

б) Предположим, что G — группа Ли, определяемая нормированной алгеброй Ли L. Таким образом, G — открытый и замкнутый шар в L. Пусть $w \in \operatorname{Aut} G$. Тогда $L(w)$ совпадает с w в некоторой окрестности элемента 0. Пусть $x \in G$ и p — характеристика поля классов вычетов. Тогда $p^n x$ стремиться к 0, когда n стремится к $+\infty$. Существует, стало быть, такое n, что $w(p^n x) = L(w)(p^n x)$. Следовательно,

$$p^n w(x) = w(x)^{p^n} = w\left(x^{p^n}\right) = w(p^n x) =$$
$$= L(w)(p^n x) = p^n L(w)(x),$$

откуда $w(x) = L(w)(x)$. Таким образом, $w = L(w) \mid G$.

Пусть Γ — множество таких $\gamma \in \operatorname{Aut} L(G)$, что $\gamma(G) = G$. Поскольку G компактна и открыта в $L(G)$, Γ является открытой подгруппой в $\operatorname{Aut} L(G)$. В силу изложенного выше $\operatorname{Aut} G$ отождествляется с Γ, а это приводит к возникновению структуры группы Ли на $\operatorname{Aut} G$, для которой утверждения (i), (ii), (iii), (vi) очевидны. Свойство (v) следует из предложений 1 и 3 n° 1.

в) Перейдем к общему случаю. В силу предложения 1 § 7, n° 1, существует открытая компактная подгруппа G_0 в G того типа, который рассматривался в п. б). Тогда G порождается ею и конечным числом элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Пусть $\operatorname{Aut}_1 G$ — множество таких $u \in \operatorname{Aut} G$, что $u(G_0) = G_0$, $u(x_i G_0) = x_i G_0$ при $1 \leqslant i \leqslant n$. Как в доказательстве п. в) теоремы 1, мы определяем полупрямое произведение P группы $\operatorname{Aut} G_0$ на G_0^n и инъективный гомоморфизм ζ из $\operatorname{Aut}_1 G$ в P, образ которого замкнут в P.

г), д) Будем рассуждать точно так же, как в п. г.), д) доказательства теоремы 1, заменяя лишь $\mathbf{R}$ на $\mathbf{Q}_p$ и используя предложение 3 вместо предложения 2.

Замечание. Если $K = \mathbf{Q}_p$ и группа Ли G *порождена* некоторым компактным подмножеством (см. упражнение 2), то утверждения (i), (ii), (iii), (vi) теоремы 1 остаются справедливыми, тогда как (v) — нет (упражнение 3).

ДОПОЛНЕНИЕ

Операции над линейными представлениями

Пусть G — группа, k — поле, $E_1, E_2, \ldots, E_n$ — векторные пространства над k, π_i — линейное представление группы G в E_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Отображение $g \mapsto \pi_1(g) \otimes \ldots \otimes \pi_n(g)$ есть линейное представление группы G в векторном пространстве $E_1 \otimes \ldots \otimes E_n$, которое называется *тензорным произведением представлений* $\pi_1, \ldots, \pi_n$ и обозначается через $\pi_1 \otimes \ldots \otimes \pi_n$.

Пусть E — векторное пространство над k, π — линейное представление группы G в E. Для всякого $g \in G$ обозначим через $\tau(g)$ (соотв. $\sigma(g)$, $\varepsilon(g)$) единственный автоморфизм алгебры $\mathsf{T}(E)$ (соотв. $\mathsf{S}(E)$, $\bigwedge(E)$), продолжающий $\pi(g)$ (*Alg.*, chap. III, p. 57, 69 et 78). Тогда τ (соотв. σ, ε) есть линейное представление группы G в $\mathsf{T}(E)$ (соотв. $\mathsf{S}(E)$, $\bigwedge(E)$), обозначаемое через $\mathsf{T}(\pi)$ (соотв. $\mathsf{S}(\pi)$, $\bigwedge(\pi)$). Подпредставление представления $\mathsf{T}(\pi)$ (соотв. $\mathsf{S}(\pi)$, $\bigwedge(\pi)$), реализующееся в подпространстве $\mathsf{T}^n(E)$ (соотв. $\mathsf{S}^n(E)$, $\bigwedge^n(E)$), называется n-й тензорной (соотв. симметрической, внешней) степенью представления π и обозначается через $\mathsf{T}^n(\pi)$ (соотв. $\mathsf{S}^n(\pi)$, $\bigwedge^n(\pi)$). Имеем $\mathsf{T}^n(\pi) = \pi \otimes \ldots \otimes \pi$ (n множителей). Представления $\mathsf{S}(\pi)$, $\bigwedge(\pi)$ суть факторпредставления представления $\mathsf{T}(\pi)$, стало быть, $\mathsf{S}^n(\pi)$, $\bigwedge^n(\pi)$ суть факторпредставления представления $\mathsf{T}^n(\pi)$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над k. Тензорное произведение конечного числа ее представлений уже было определено в гл. I, § 3, n° 2; оно обозначается через $\pi_1 \otimes \ldots \otimes \pi_n$. Пусть E — векторное пространство над k, π — представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в E. Для всякого $x \in \mathfrak{g}$ пусть $\tau'(x)$ (соотв. $\sigma'(x)$, $\varepsilon'(x)$) — дифференцирование алгебры $\mathsf{T}(E)$ (соотв. $\mathsf{S}(E)$, $\bigwedge(E)$), продолжающее $\pi(x)$ (*Alg.*, chap. III, p. 129, exemple 1); оно определено однозначно. Тогда τ' (соотв. σ', ε') есть линейное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в $\mathsf{T}(E)$ (соотв. $\mathsf{S}(E)$, $\bigwedge(E)$) в силу *Alg.*, *там же*; оно обозначается через $\mathsf{T}(\pi)$ (соотв. $\mathsf{S}(\pi)$, $\bigwedge(\pi)$). Подпредставление представления $\mathsf{T}(\pi)$ (соотв. $\mathsf{S}(\pi)$, $\bigwedge(\pi)$), реализующееся в подпространстве $\mathsf{T}^n(E)$ (соотв. $\mathsf{S}^n(E)$, $\bigwedge^n(E)$), обозначается через $\mathsf{T}^n(\pi)$ (соотв. $\mathsf{S}^n(\pi)$, $\bigwedge^n(\pi)$). Представление $\mathsf{T}^n(\pi)$ является тензорным произведением n представлений, равных π. Представления $\mathsf{S}(\pi)$, $\bigwedge(\pi)$ суть факторпредставления представления $\mathsf{T}(\pi)$, и, стало быть, $\mathsf{S}^n(\pi)$, $\bigwedge^n(\pi)$ являются факторпредставлениями представления $\mathsf{T}^n(\pi)$.

УПРАЖНЕНИЯ

§ 1

1) Пусть G — вещественная или комплексная связная конечномерная группа Ли. Пусть H и L — ее подгруппы Ли, такие, что $HL = G$. Показать, что канонические отображения $G \to G/H$ и $G \to G/L$ определяют изоморфизм аналитических многообразий

$$G/(H \cap L) \to (G/H) \times (G/L).$$

2) Пусть $P = \{z \in \mathbf{C} \mid \mathscr{I}(z) > 0\}$ и G — группа биекций $z \longmapsto az + b$ множества P $(a > 0,\ b \in \mathbf{R})$. Тогда G действует на P просто транзитивно, что позволяет перенести на G структуру комплексно-аналитического многообразия на P. Показать, что полученная структура инвариантна относительно левых сдвигов на группе G, но не инвариантна относительно правых сдвигов.

3) Пусть $\mathbf{R}_d$ — аддитивная группа вещественных чисел, наделенная структурой дискретного многообразия. Рассмотрим действие группы $\mathbf{R}_d$ на аналитическом многообразии $\mathbf{R}$, определенное формулой $(x, y) \longmapsto x + y$. Тогда $\mathbf{R}_d$ действует на $\mathbf{R}$ транзитивно, но $\mathbf{R}$ не является однородным пространством Ли группы $\mathbf{R}_d$.

4) Пусть вещественная компактная группа Ли H действует на вещественном конечномерном многообразии V; предположим, что V принадлежит классу C^r, где $r \in N_{\mathbf{R}}$, и что действие группы H на V также принадлежит классу C^r. Пусть точка $p \in V$ инвариантна относительно H; группа H линейно действует на касательном пространстве T к многообразию V в p. Показать, что существуют открытая окрестность U точки p, устойчивая относительно H, и такой C^r-морфизм $f\colon U \to T$, что:

а) $f(p) = 0$ и касательное отображение к f в p есть тождественное отображение;

б) f коммутирует с действием группы H на U и на T. (Выбираем сначала отображение f_0, удовлетворяющее условию а), и определяем затем f формулой $f(x) = \int\limits_H h \,.\, f_0(h^{-1}x)\, dh$, где dh — мера Хаара на H с общей массой 1.)

Вывести отсюда, что H-пространства V и T локально изоморфны в окрестности точки p, другими словами, существует система координат на V в p, в которой действие группы H линейно (теорема Бохнера).

5) Перенести упражнение 4) на многообразия над ультраметрическим полем K, предполагая, что H — конечная группа порядка n, причем $n \,.\, 1 \neq 0$ в K.

¶ 6) Пусть G — вещественная группа Ли, действующая собственно на вещественно-аналитическом отделимом многообразии V конечной размерности. Пусть p — точка из V, H — ее стабилизатор и Gp — ее орбита. Группа H компактна и многообразие Gp отождествляется с однородным пространством Ли G/H.

а) Показать, что существует подмногообразие S в V, проходящее через p, устойчивое относительно H и такое, что $T_p(V)$ есть прямая сумма пространств $T_p(Gp)$ и $T_p(S)$. (Выбрать дополнение к $T_p(Gp)$ в $T_p(V)$, устойчивое относительно H, и применить упражнение 4).)

б) Предположим, что S выбрано так, как указано выше. Группа H действует собственно и свободно на $G \times S$ по формуле $h.(g, s) = (gh, h^{-1}s)$; пусть $E = (G \times S)/H$ — соответствующее фактормногообразие (см. *Мн. Св. рез.*, 6.5.1). Отображение $(g, s) \longmapsto g.s$ определяет посредством перехода к фактору морфизм $\rho: E \to V$. Показать, что ρ коммутирует с действием группы G на E и на V и существует открытое подмногообразие S' в S, содержащее p, устойчивое относительно H и такое, что ρ индуцирует изоморфизм многообразий $E' = (G \times S')/H$ на некоторую насыщенную [1]) окрестность орбиты Gp.

в) Пусть $N_p = T_p(V)/T_p(Gp)$ — трансверсальное пространство к Gp в p, (*Мн. Св. рез.*, 5.8.8); группа H действует на N_p. Вывести из б), что, зная H и ее линейное представление в N_p, можно восстановить G-пространство V в некоторой окрестности орбиты точки p.

г) Если $x \in N_p$, пусть H_x — стабилизатор точки x в H. Показать, что существует насыщенная окрестность V' орбиты Gp, обладающая следующим свойством:

Для всякой точки $p' \in V'$ существует такая точка $x \in N_p$, что стабилизатор точки p' в G сопряжен (в G) с H_x.

д) Показать, что число классов сопряженности подгрупп H_x в H конечно. (Провести индукцию по $\dim N_p = n$, используя действие группы H на $(n-1)$-мерной сфере, устойчивой относительно H.) [2])

¶ 7) Пусть E — полное нормируемое пространство над $\mathbf{R}$, F — замкнутое векторное подпространство в E, такое, что не существует линейной бинепрерывной биекпии из E на $F \times (E/F)$ [3]). Пусть X — аналитическое многообразие $\mathbf{R} \times E \times F$ и G — аддитивная группа пространства F; она действует на X посредством отображения $(g, (\lambda, e, f)) \longmapsto (\lambda, e+g, f+\lambda g)$ из $G \times X$ в X. Для всякой точки $x \in X$ пусть R_x — ее G-орбита; она является квазиподмногообразием в X. Тогда условие а) предложения 10 выполнено, но не существует никакой пары (Y, π), которая обладала бы следующими свойствами: Y есть аналитическое многообразие, π — морфизм из X в Y и для всех $x \in X$ отображение $T_x(\pi): T_x(X) \to T_{\pi(x)}(Y)$ сюръективно и имеет ядро $T_x(R_x)$.

(Допустим, что (Y, π) существует. Пусть H — касательное пространство к Y в $\pi(0, 0, 0)$. Тогда H изоморфно $\mathbf{R} \times F \times (E/F)$. С другой стороны H изоморфно $T_{\pi(x)}Y$, если x достаточно близко к $(0, 0, 0)$ и, стало быть, изоморфно $\mathbf{R} \times E$.)

8) Наделим $\mathbf{T}$ нормализованной мерой Хаара и $\mathscr{L}(L^2(\mathbf{T}))$ — топологией, определяемой нормой. Показать, что регулярное представление группы $\mathbf{T}$ в $L^2(\mathbf{T})$ не является непрерывным. (Для произвольного $g \in \mathbf{T}$, отличного от e, построить такую функцию $f \in L^2(\mathbf{T})$, что $\|f\| = 1$, $\|\gamma(g) f - f\| = \sqrt{2}$.)

9) Пусть I — множество пар $(x, \sqrt{2}x) \in \mathbf{R}^2$, где $-1/2 < x < 1/2$. Пусть U — канонический образ множества I в вещественной группе Ли $H = \mathbf{T}^2$.

---

[1]) См. *Общ. топ.*, 1969, гл. III, § 2, n°5.

[2]) Подробности см. в статье R. S. Palais, On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups, *Ann. of Math.*, **72** (1961), 295—323.

[3]) По поводу примера такой пары (E, F) см., например, статью A. Douady, Le problème des modules pour les sous-espaces analytiques compacts d'un espace analytique donné, *Ann. Inst. Fourier*, **16** (1966), 16.

Показать, что U есть подгрупускула Ли в H, но что порожденная ею подгруппа H' в H плотна и не замкнута в H.

10) Пусть $\mathbf{R}_d$ — группа $\mathbf{R}$, наделенная структурой дискретного многообразия. Пусть H — вещественная группа Ли $\mathbf{R} \times \mathbf{R}_d$ и U — множество ее элементов, имеющих вид (x, x) или $(x, -x)$, где $x \in \mathbf{R}$. Тогда U является подгрупускулой Ли в H, U дискретна, порожденная ею подгруппа G в H совпадает с H и структура группы Ли на G, определенная в следствии предложения 22, есть структура дискретной группы.

§ 3

1) Пусть G — группа Ли, G_1 и G_2 — ее подгруппы Ли. Предположим, что G_2 имеет конечную коразмерность в G, а характеристика поля K равна 0. Тогда $G_1 \cap G_2$ есть подгруппа Ли в G с алгеброй Ли $L(G_1) \cap L(G_2)$ (рассуждать, как в предложении 29 и его следствии 2).

2) Предположим, что K локально компактно. Пусть G — группа Ли конечной размерности n.

а) Пусть φ — этальный эндоморфизм группы Ли G с конечным ядром. Пусть μ — левая мера Хаара на G. Тогда φ — собственное отображение и

$$\varphi(\mu) = \alpha \, . \, \mu \mid \varphi(G), \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{\operatorname{Card}(\operatorname{Ker} \varphi)}{\operatorname{mod} \det L(\varphi)}.$$

(Использовать предложение 55.)

б) Предположим, что G компактна. Пусть φ — этальный эндоморфизм группы Ли G. Тогда $\operatorname{Ker} \varphi$ конечно, $\varphi(G)$ имеет конечный индекс в G и

$$\frac{\operatorname{Card} \operatorname{Ker} \varphi}{\operatorname{Card}(G/\varphi(G))} = \operatorname{mod} \det L(\varphi).$$

(Использовать а) и преобразовать $\mu(G)$.)

в) Предположим, что G компактна и коммутативна. Пусть $r \in \mathbf{Z}$, где $r \, . \, 1 \neq 0$ в K, и пусть φ — эндоморфизм $x \longmapsto x^r$ группы G. Тогда

$$\frac{\operatorname{Card}(\operatorname{Ker} \varphi)}{\operatorname{Card}(G/\varphi(G))} = (\operatorname{mod} r \, . \, 1)^n.$$

(Заметить, что в силу следствия предложения 7 из § 2 $L(\varphi)$ есть гомотетия, отвечающая элементу r.)

3) Пусть E — комплексное векторное пространство симметрических комплексных матриц с 2 строками и 2 столбцами. Для всякого $s \in \mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$ определим автоморфизм $\rho(s)$ пространства E формулой $\rho(s)(m) = s \, . \, m \, . \, {}^t s$.

а) Показать, что ρ есть линейное аналитическое представление группы $\mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$. Если отождествить $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in E$ с $(a, b, c) \in \mathbf{C}^3$, то матрица преобразования $\rho \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ равна

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & 2\alpha\beta & \beta^2 \\ \alpha\gamma & \alpha\delta + \beta\gamma & \beta\delta \\ \gamma^2 & 2\gamma\delta & \delta^2 \end{pmatrix}.$$

б) Показать, что $m \longmapsto \det(m)$ есть невырожденная квадратичная форма $q(a, b, c) = ac - b^2$ на E и что ρ — морфизм из $\mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$ на $\mathbf{SO}(q)$ с ядром

$\{I, -I\}$. (По поводу сюръективности можно заметить, что в матрице, отвечающей какому-либо элементу из $\mathbf{SO}(q)$, первый столбец можно представить в виде $(\alpha^2, \alpha\gamma, \gamma^2)$, а третий столбец — в виде $(\beta^2, \beta\delta, \delta^2)$, где $\alpha^2\delta^2 + \beta^2\gamma^2 - 2\alpha\gamma\beta\delta = 1$, а затем, что 2 элемента из $\mathbf{SO}(q)$, ограничения которых на некоторую не изотропную плоскость совпадают, равны.)

в) Вывести отсюда, что комплексная группа Ли $\mathbf{SO}(3, \mathbf{C})$ изоморфна комплексной группе Ли $\mathbf{SL}(2, \mathbf{C})/\{I, -I\}$.

4) а) Пусть q — квадратичная форма в $\mathbf{R}^3$ с сигнатурой (1,2). Пусть P — множество таких $m \in \mathbf{R}^3$, что $q(m) > 0$. Тогда P есть объединение двух непересекающихся выпуклых конусов C и $-C$. Если $s \in \mathbf{SO}(q)$, то либо $s(C) = C$ и $s(-C) = -C$, либо $s(C) = -C$ и $s(-C) = C$. Пусть $\mathbf{SO}^+(q)$ — множество таких $s \in \mathbf{SO}(q)$, что $s(C) = C$. Тогда $\mathbf{SO}^+(q)$ есть открытая нормальная подгруппа в $\mathbf{SO}(q)$ индекса 2.

б) Копируя метод упражнения 3), определить морфизм из $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$ на $\mathbf{SO}^+(q)$ с ядром $\{I, -I\}$. Вывести отсюда, что вещественная группа Ли $\mathbf{SO}^+(q)$ изоморфна вещественной группе Ли $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})/\{I, -I\}$.

в) Для $(\xi, \eta) \in \mathbf{C}^2$ и $(\xi', \eta') \in \mathbf{C}^2$ положим $f((\xi, \eta), (\xi', \eta')) = \xi\overline{\xi'} - \eta\overline{\eta'}$. Показать, что внутренний автоморфизм группы $\mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$, определенный матрицей $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$, преобразует $\mathbf{SU}(f)$ в $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$.

5) Пусть E — вещественное векторное пространство эрмитовых комплексных матриц с 2 строками и 2 столбцами и нулевым следом. Для всякого $s \in \mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$ определим автоморфизм $\rho(s)$ пространства E формулой $\rho(s)(m) = sms^*$. Отождествим элемент $\begin{pmatrix} x & y + iz \\ y - iz & -x \end{pmatrix}$ пространства E с элементом (x, y, z) из $\mathbf{R}^3$. Копируя метод упражнения 3, показать, что ρ есть морфизм вещественной группы Ли $\mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$ на вещественную группу Ли $\mathbf{SO}(3, \mathbf{R})$ с ядром $\{I, -I\}$ и что $\mathbf{SO}(3, \mathbf{R})$ изоморфна группе $\mathbf{SU}(2, \mathbf{C})/\{I, -I\}$.

¶ 6) Пусть F — векторное пространство эрмитовых комплексных матриц с 2 строками и 2 столбцами. Для всякого $s \in \mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$ определим автоморфизм $\sigma(s)$ пространства F формулой $\sigma(s)(m) = sms^*$. Отождествим элемент $\begin{pmatrix} t + x & y + iz \\ y - iz & t - x \end{pmatrix}$ пространства F с элементом $(t, x, y, z) \in \mathbf{R}^4$ и положим

$$q(t, x, y, z) = t^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

Пусть C — множество таких $(t, x, y, z) \in \mathbf{R}^4$, что $t^2 - x^2 - y^2 - z^2 > 0$, $t > 0$. Пусть $\mathbf{SO}^+(q)$ — множество таких $g \in \mathbf{SO}(q)$, что $g(C) = C$; это открытая нормальная подгруппа в $\mathbf{SO}(q)$ индекса 2 (см. упражнение 4). Показать, что σ есть морфизм вещественной группы Ли, лежащей ниже комплексной группы Ли $\mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$, на вещественную группу Ли $\mathbf{SO}^+(q)$ с ядром $\{I, -I\}$. (Для проверки сюръективности воспользоваться упражнением 5.) Вывести отсюда, что вещественная группа Ли $\mathbf{SO}^+(q)$ изоморфна вещественной группе Ли, лежащей ниже $\mathbf{SL}(2, \mathbf{C})/\{I, -I\}$, т. е. (упражнение 3) вещественной группе Ли, лежащей ниже $\mathbf{SO}(3, \mathbf{C})$.

7) а) Пусть G — множество кватернионов с нормой 1. Это подгруппа Ли вещественной группы Ли $\mathbf{H}^*$, гомеоморфная $\mathbf{S}_3$; стало быть, она односвязна, см. *Top. gén.*, chap. XI.

б) Пусть E — вещественное векторное пространство чисто мнимых кватернионов, которое отождествляется с $\mathbf{R}^3$ посредством отображения

$$(x, y, z) \longmapsto xi + yj + zk.$$

Для всякого $g \in G$ определим автоморфизм $\rho(g)$ пространства E формулой $\rho(g)\, q = gqg^{-1}$. Показать, что ρ есть морфизм группы Ли G на вещественную группу Ли $\mathbf{SO}(3, \mathbf{R})$ с ядром $\{1, -1\}$. Вывести отсюда, что группа Ли $\mathbf{SO}(3, \mathbf{R})$ изоморфна группе Ли $G/\{1, -1\}$.

в) Отождествим $\mathbf{C}$ с подполем $\mathbf{R} + \mathbf{R}i$ в $\mathbf{H}$. Отображение $(\lambda, q) \longmapsto q\lambda$ из $\mathbf{C} \times \mathbf{H}$ в $\mathbf{H}$ превращает $\mathbf{H}$ в векторное пространство над $\mathbf{C}$, которое отождествляется с $\mathbf{C}^2$ посредством выбора базиса $(1, j)$. Для всякого $g \in G$ пусть $\sigma(g)$ — автоморфизм этого векторного пространства, определенный формулой $\sigma(g)\, q = gq$. Показать, что σ есть изоморфизм вещественной группы Ли G на вещественную группу Ли $\mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$. Эта последняя группа, стало быть, односвязна, как показывает а).

г) Для $(q_1, q_2) \in G \times G$ пусть $\tau(q_1, q_2)$ — отображение $q \longmapsto q_1 q \bar{q}_2$ пространства $\mathbf{H} = \mathbf{R}^4$ в себя. Показать, что τ есть морфизм вещественной группы Ли $G \times G$ на вещественную группу Ли $\mathbf{SO}(4, \mathbf{R})$ с ядром $N = \{(1, 1), (-1, -1)\}$; значит, $\mathbf{SO}(4, \mathbf{R})$ изоморфна группе Ли $(G \times G)/N$.

8) Пусть G — вещественная связная конечномерная группа Ли, M — связное конечномерное многообразие класса C^∞; предположим, что задан закон правого действия класса C^∞ группы G на M. Для всякой точки $x \in M$ пусть $\rho(x)$ — соответствующее орбитальное отображение.

а) Для того чтобы G действовала на M транзитивно, необходимо и достаточно, чтобы для всякой точки $x \in M$ отображение $T_e(\rho(x))$ из $L(G)$ в $T_x(M)$ было сюръективно. (Для проверки достаточности этого условия заметить, что тогда всякая G-орбита в M открыта.)

б) Предположим, что G действует на M транзитивно. Отождествим M с однородным пространством $H \backslash G$, где H — стабилизатор некоторой точки x_0 из M. Говорят, что действие группы G на M импримитивно, если существует замкнутое подмногообразие V в M класса C^∞, такое, что $0 < \dim V < \dim M$, и такое, что его преобразование $V.s$ произвольным элементом $s \in G$ либо равно V, либо не пересекается с V. Для того чтобы это было так, необходимо и достаточно, чтобы нашлась подгруппа Ли L в G, такая, что $H \subset L \subset G$ и $\dim(H) < \dim(L) < \dim(G)$. Если это невозможно, говорят, что действие группы G на M примитивно; для этого достаточно, чтобы не существовало подалгебры Ли в $L(G)$, заключенной между $L(G)$ и $L(H)$ и отличной от $L(G)$ и $L(H)$.

в) Предположения те же, что и в б). Пусть $\mathscr{L}$ — образ алгебры Ли $L(G)$ относительно закона инфинитезимального действия, ассоциированного с действием группы G. Пусть $\mathscr{E}$ — алгебра функций класса C^∞ на M, $\mathfrak{m}$ — максимальный идеал в $\mathscr{E}$, образованный теми функциями из $\mathscr{E}$, которые обращаются в нуль в x_0. Обозначим через $\mathscr{L}_p$, где $p = -1, 0, 1, 2, \ldots$, множество таких $X \in \mathscr{L}$, что $\theta(X) f \in \mathfrak{m}^{p+1}$ для всякой $f \in \mathscr{E}$; тогда $\mathscr{L}_{-1} = \mathscr{L}$ и $\mathscr{L}_0$ есть образ алгебры Ли $L(H)$ относительно закона инфинитезимального действия. Если $(U, \varphi, \mathbf{R}^n)$ — карта на M, центрированная в x_0, и если $X_1, \ldots, X_n$ — векторные поля на U, определенные этой картой, то элементы из $\mathscr{L}_p$ имеют вид $a_1 X_1 + \ldots + a_n X_n$, где $a_1, \ldots, a_n$ лежат в $\mathfrak{m}^p \mid U$. Показать, что $[\mathscr{L}_p, \mathscr{L}_q] \subset \mathscr{L}_{p+q}$ (если условиться, что $\mathscr{L}_{-2} = \mathscr{L}$). Если существует $Y \in \mathscr{L}_p$ (где $p \geqslant 0$), такой, что $Y \notin \mathscr{L}_{p+1}$, то существует такой $X \in \mathscr{L}$, что $[X, Y] \notin \mathscr{L}_p$. Пространства $\mathscr{L}_p$ суть подалгебры Ли в $\mathscr{L}$. Если $p \geqslant 0$, $\mathscr{L}_p$ есть идеал $\mathscr{L}_0$. Пусть ρ — каноническое линейное представление группы H в $T_{x_0}(M)$. Алгебра Ли группы $H/(\operatorname{Ker} \rho)$ изоморфна $\mathscr{L}_0 / \mathscr{L}_1$.

г) Предположим, кроме этого, что пересечение пространств $\mathscr{L}_p$ есть $\{0\}$. Тогда существует наибольший индекс r, такой, что $\mathscr{L}_r \neq \{0\}$, и все $\mathscr{L}_p$ при $p \leqslant r$ попарно различны. При $p \geqslant 0$

$$\dim(\mathscr{L}_p / \mathscr{L}_{p+1}) \leqslant \binom{n+p}{p+1}.$$

д) Предположение п. г) выполнено, если M аналитично и действие группы G на M аналитично.

9) В обозначениях предложения 30 множество HH' может быть открытым и плотным в G, будучи отличным от G (взять $G = \mathbf{GL}(2, \mathbf{R})$, в качестве H — верхнюю треугольную подгруппу, в качестве H' — нижнюю строго треугольную подгруппу).

§ 4

1) Пусть G — группа Ли, H — нормальная квазиподгруппа Ли в G, π — каноническое отображение из G на G/H. На G/H существует одна, и только одна, структура группы Ли, обладающая следующим свойством: для того, чтобы данный гомоморфизм θ из G/H в некоторую группу Ли G' был морфизмом групп Ли, необходимо и достаточно, чтобы гомоморфизм $\theta \circ \pi$ был морфизмом групп Ли. Кроме того, $L(G/H)$ канонически изоморфна алгебре Ли $L(G)/L(H)$. (Пусть Q — некоторая групускула Ли, такая, что $L(Q) = L(G)/L(H)$. Показать, что уменьшив Q, если это потребуется, можно отождествить Q с некоторой открытой окрестностью элемента e в G/H, а затем применить к G/H предложение 18 из § 1.)

¶ 2) Пусть G и H — две группы Ли, f — морфизм групп Ли из G в H.

(i) Ядро N морфизма f есть нормальная квазиподгруппа Ли в G и $L(N) = \operatorname{Ker} L(f)$. (Воспользоваться экспоненциальными отображениями для G и для H.)

(ii) Пусть g: $G/N \to f(G)$ — отображение, получающееся из f посредством перехода к фактору. Если f и $L(f)$ имеют замкнутые образы и если топология группы G допускает счетную базу, то $f(G)$ есть квазиподгруппа Ли в H с алгеброй Ли $\operatorname{Im} L(f)$ и g есть изоморфизм групп Ли, коль скоро G/N наделена структурой, определенной в упражнении 1. (С помощью (i) свести все к случаю, когда $N = \{e\}$.)

3) Пусть G — группа Ли, U — открытая окрестность элемента 0 в $L(G)$, φ — аналитическое отображение из U в G, такое, что $\varphi(0)=e$ и $T_0\varphi=\mathrm{Id}_{L(G)}$. Следующие условия эквивалентны:

а) φ — экспоненциальное отображение;

б) существует число $m \in \mathbf{Z}$, отличное от 0, 1, -1 и такое, что $\varphi(mx) = \varphi(x)^m$ в некоторой окрестности элемента 0. (Если условие б) выполнено, показать, что φ_* удовлетворяет условию (iii) теоремы 4.)

¶ 4) а) Пусть K есть либо $\mathbf{R}$, либо $\mathbf{C}$, либо ультраметрическое поле, поле классов вычетов которого имеет характеристику > 0. Пусть G — группа Ли над K, U — открытая окрестность элемента 0 в $L(G)$, φ: $U \to G$ — отображение, дифференцируемое в 0, такое, что $\varphi(0) = e$, $T_0(\varphi) = \mathrm{Id}_{L(G)}$, и такое, что $\varphi((\lambda + \lambda')b) = \varphi(\lambda b)\varphi(\lambda' b)$, если λb, $\lambda' b$, $(\lambda + \lambda')b$ принадлежат U. Тогда φ совпадает в некоторой окрестности элемента 0 с некоторым экспоненциальным отображением.

б) Пусть k — поле характеристики 0. Возьмем в качестве K нормированное поле $k((X))$, которое имеет характеристику 0. Пусть G — аддитивная группа Ли $k[[X]]$. Пусть φ — непрерывное k-линейное отображение из G в G, такое, что $\varphi(X^n) = X^n + X^{2n}$ для всякого целого числа $n \geqslant 0$. Тогда φ удовлетворяет условиям п. а), но не совпадает ни в какой окрестности элемента 0 с экспоненциальным отображением.

5) Пусть (e_1, e_2, e_3) — канонический базис в $\mathbf{R}^3$. Наделим $\mathbf{R}^3$ структурой нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, такой, что $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0$. Обозначим через c_{ijk} структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в базисе (e_1, e_2, e_3).

а) Показать, что на $\mathbf{R}^3$ дифференциальные формы

$$\omega_1 = dx_1, \quad \omega_2 = dx_2, \quad \omega_3 = -x_1\,dx_2 + dx_3$$

удовлетворяют соотношениям

$$d\omega_k = -\sum_{i<j} c_{ijk}\omega_i \wedge \omega_j \quad (k = 1, 2, 3)$$

и являются линейно независимыми в любой точке из $\mathbf{R}^3$.

б) Вывести отсюда, что на некоторой открытой окрестности элемента 0 в $\mathbf{R}^3$ существует структура групускулы Ли G, такой, что $L(G) = \mathfrak{g}$ и

$$(a_1, a_2, a_3)(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + a_1, x_2 + a_2, x_3 + a_3 + a_1x_2), \qquad (1)$$

если (a_1, a_2, a_3) и (x_1, x_2, x_3) достаточно близки к 0. Показать, что формула (1) на самом деле определяет на $\mathbf{R}^3$ структуру нильпотентной группы Ли.

¶ 6) Пусть G — конечномерная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, $\mathfrak{g}^*$ — дуальное к $\mathfrak{g}$ векторное пространство, σ — присоединенное представление группы G в $\mathfrak{g}$, ρ — представление группы G в $\mathfrak{g}^*$, определенное формулой $\rho(g) = {}^t\sigma(g)^{-1}$ для всякого $g \in G$.

а) Имеем $L(\rho)(x) = -{}^t(\operatorname{ad} x)$ для всякого $x \in \mathfrak{g}$.

б) Пусть $f \in \mathfrak{g}^*$. Обозначим через G_f стабилизатор элемента f в G; это подгруппа Ли в G и $\mathfrak{g}_f = L(G_f)$ есть множество таких $x \in \mathfrak{g}$, что ${}^t(\operatorname{ad} x) f = 0$.

в) Для x, y из $\mathfrak{g}$ положим $B_f(x, y) = f([x, y])$. Показать, что B_f — знакопеременная билинейная форма на $\mathfrak{g}$, отображение s_f из $\mathfrak{g}$ в $\mathfrak{g}^*$, ассоциированное слева с B_f, есть $x \longmapsto {}^t(\operatorname{ad} x) f$ и множество элементов, ортогональных к $\mathfrak{g}$ относительно B_f, есть $\mathfrak{g}_f$. Обозначим через β_f знакопеременную билинейную невырожденную форму на пространстве $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f$ (которое, стало быть, имеет четную размерность), полученную из B_f посредством перехода к фактору. Обозначим через β'_f форму на $(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f)^*$, обратную для формы β_f.

г) Пусть Ω — некоторая G-орбита в $\mathfrak{g}^*$; наделим ее структурой многообразия, полученной посредством переноса соответствующей структуры на G/G_f, где f — некоторая точка из Ω. Тогда G аналитически действует на Ω слева. Пусть D — ассоциированный закон инфинитезимального действия. Для всякого $a \in \mathfrak{g}$ и всякого $f \in \Omega$ имеем $D_a(f) = -({}^t\operatorname{ad} a) f$. Касательное подпространство $T_f(\Omega)$ есть образ отображения s_f, другими словами, множество элементов из $\mathfrak{g}^*$, ортогональных к $\mathfrak{g}_f$, и оно канонически отождествляется с $(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_f)^*$, так что s_f определяет канонический изоморфизм r_f из $T_f(\Omega)$ на дуальное к нему пространство. Поле $f \longmapsto \beta'_f$ есть аналитическая дифференциальная форма ω степени 2 на Ω, инвариантная относительно G. Если $f \in \Omega$, $a \in \mathfrak{g}$, $b \in \mathfrak{g}$, то $\omega(D_a(f), D_b(f)) = f([a, b])$.

д) Показать, что $d\omega = 0$.

е) Если α — дифференциальная форма степени 1 на Ω, то изоморфизм r_f позволяет отождествить α с некоторым векторным полем. Пусть A — множество аналитических функций на Ω со значениями в K. Для φ, ψ из A положим $[\varphi, \psi] = \omega(d\varphi, d\psi) \in A$. Показать, что эта операция наделяет A структурой алгебры Ли.

ж) Для всякого $a \in \mathfrak{g}$ пусть ψ_a — функция $f \longmapsto f(a)$ на Ω. Показать, что $a \longmapsto \psi_a$ есть гомоморфизм из $\mathfrak{g}$ в алгебру Ли A и с помощью изоморфизмов r_f форма $d\psi_a$ отождествляется с векторным полем D_a.

з) Пусть U — открытое подмножество из $\mathfrak{g}^*$ и φ — аналитическая функция на U. Для всякого $f \in U$ отождествим дифференциал $d_f\varphi$ функции φ в точке f с элементом из $\mathfrak{g}$. Предположим, что $X\varphi = 0$ для всякого векторного поля X, определенного действием группы G на $\mathfrak{g}^*$. Показать, что тогда для всякого $f \in U$ элемент $d_f\varphi$ принадлежит центру алгебры Ли $\mathfrak{g}_f$.

и) Для всякого $f \in \mathfrak{g}^*$ положим $r_f = \dim \mathfrak{g}_f$. Пусть $r = \inf\limits_{f \in \mathfrak{g}^*} r_f$. Показать,

что множество V таких $f \in \mathfrak{g}^*$, что $r_f = r$, открыто и плотно в $\mathfrak{g}^*$. Показать, что для $f \in V$ алгебра Ли $\mathfrak{g}_f$ коммутативна. (Построить r функций φ, удовлетворяющих условию п. з) в некоторой окрестности элемента f и таких, что их дифференциалы в f линейно независимы.)

¶ 7) а) Пусть $(\lambda, x) \longmapsto \lambda . x$ — некоторый закон непрерывного левого действия группы $\mathbf{R}$ на $\mathbf{T}$. Тогда справедливо ровно одно из двух утверждений:

1) существует неподвижная точка и стабилизатор всякой точки есть или $\mathbf{R}$, или $\{0\}$;

2) существует точка, стабилизатор которой есть бесконечная дискретная подгруппа в $\mathbf{R}$, и $\mathbf{R}$ действует на $\mathbf{T}$ транзитивно. (Если $\{\lambda \in \mathbf{R} \mid \lambda . x = x\} = \{0\}$, то орбита точки x гомеоморфна пространству $\mathbf{R}$ и имеет граничные точки $\lim\limits_{\lambda \to \pm\infty} \lambda . x$, являющиеся неподвижными. Если $\{\lambda \in \mathbf{R} \mid \lambda . x = x\} = \mathbf{Z}a$, где $a \neq 0$, то орбита точки x гомеоморфна $\mathbf{T}$ и группа $\mathbf{R}$ действует транзитивно.)

б) Если f — гомеоморфизм группы $\mathbf{T}$ на себя и k — целое число $\geqslant 1$, то говорят, что $x \in \mathbf{T}$ — периодическая точка с периодом k относительно f, если $f^k(x) = x$ и $f^h(x) \neq x$ при $1 \leqslant h < k$. В обозначениях п. а) пусть f_λ — гомеоморфизм $x \longmapsto \lambda . x$. Тогда множество периодических точек с периодом $k > 1$ относительно f_λ либо пусто, либо совпадает с $\mathbf{T}$. (Если существует периодическая точка с периодом $k > 1$ относительно f_λ, то ее стабилизатор отличен от $\{0\}$ и от $\mathbf{R}$ и, стало быть, $\mathbf{R}$ действует на $\mathbf{T}$ транзитивно, а все точки из $\mathbf{T}$ являются периодическими с периодом k относительно f_λ.)

в) Пусть Ω — окрестность элемента e в $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{T})$ (*Мн. Св. рез.*, 15.3.8, примечание [1])). Существуют целое число $k > 1$ и элемент $f \in \Omega$, не имеющий неподвижных точек, такие, что множество периодических точек с периодом k относительно f не пусто и отлично от $\mathbf{T}$. (Пусть p: $\mathbf{R} \to \mathbf{T}$ — каноническое отображение, и ρ — отображение $p(x) \longmapsto p\left(x + \dfrac{2\pi}{k}\right)$ из $\mathbf{T}$ в $\mathbf{T}$. Пусть Ω' — такая окрестность элемента e в $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{T})$, что $\Omega'^2 \subset \Omega$. Если k достаточно велико, то $\rho \in \Omega'$. С другой стороны, пусть σ — отображение из $\mathbf{T}$ в $\mathbf{T}$, такое, что $\sigma(y) = y$ при $y \notin p\left(\left]0, \dfrac{2\pi}{k}\right[\right)$ и $\sigma(p(x)) = p(x + \lambda(x))$ при $x \in \left]0, \dfrac{2\pi}{k}\right[$, где

$$0 < \lambda(x) < \frac{2\pi}{k} - x;$$

можно выбрать λ так, что σ окажется в Ω'. Тогда $f = \rho \circ \sigma$ обладает требуемыми свойствами.)

В силу б) подобный элемент f не может лежать в образе непрерывного морфизма из $\mathbf{R}$ в $\mathrm{Diff}^\infty(\mathbf{T})$.

г) Пусть Y — компактное дифференцируемое многообразие размерности $\geqslant 1$. Всякая окрестность элемента e в $\mathrm{Diff}^\infty(Y)$ содержит некоторый элемент h, обладающий следующим свойством: h не лежит в образе никакого непрерывного морфизма из $\mathbf{R}$ в $\mathrm{Diff}^0(Y)$. (Многообразие Y содержит открытое подмногообразие вида $\mathbf{T} \times D$, где D — открытый евклидов шар в $\mathbf{R}^n$ радиуса 1 с центром в 0 ($n = \dim Y - 1$). Пусть элемент $g \in \mathrm{Diff}^\infty(D)$ таков, что $g(0) = 0$, $\|g(x)\| > \|x\|$ при $0 < \|x\| < {}^1/_2$ и $g(x) = x$ при $\|x\| \geqslant {}^1/_2$, причем g очень близок к e в $\mathrm{Diff}^\infty(D)$. Пусть f такой как в в), и пусть отображение f_t: $\mathbf{T} \to \mathbf{T}$ определено при $0 < t < 1$ следующим образом: если $x \in \mathbf{T}$, $y \in p^{-1}(x)$, $z \in p^{-1}(f(x))$ и $|z - y| < \pi$, то положим $f_t(x) = p(ty + (1 - t)z)$. Существует тогда такой элемент $h \in \mathrm{Diff}^\infty(Y)$, что

$h(x, y) = (f_{2\|y\|}(x), g(y))$ при $x \in \mathbf{T}$, $y \in D$ [1]) и $h(u) = u$ при $u \in Y - (\mathbf{T} \times D)$; кроме того, f и g можно выбрать так, что h будет сколь угодно близок к e в $\mathrm{Diff}^\infty(Y)$. Точки из $\mathbf{T} \times \{0\}$ суть те точки $u \in Y$, для которых при n, стремящемся к $+\infty$, $h^{kn}(u)$ стремится к некоторой точке, не являющейся неподвижной относительно h (и которая в действительности периодична с периодом k). Следовательно, всякий гомеоморфизм из Y в Y, коммутирующий с h, оставляет $\mathbf{T} \times \{0\}$ инвариантным. Применить затем в).

д) Пусть Y — компактное дифференцируемое многообразие размерности $\geqslant 1$. Не существует группы Ли G и непрерывных морфизмов $\mathrm{Diff}^\infty(Y) \to G$, $G \to \mathrm{Diff}^0(Y)$, композиция которых была бы канонической инъекцией из $\mathrm{Diff}^\infty(Y)$ в $\mathrm{Diff}^0(Y)$. (Использовать г).)

8) Пусть G — конечномерная группа Ли. Предположим, что $L(G)$ проста. Пусть A — нормальная подгруппа в G. Если A не открыта, то A дискретна и ее коммутант в G открыт. (Пусть $\mathfrak{a}$ — касательная подалгебра Ли к A в e. Показать, что $\mathfrak{a} = \{0\}$. Пусть x — элемент из A, не принадлежащий центру группы G. Рассмотреть отображение $y \mapsto yxy^{-1}$ из G в A. Вывести из равенства $\mathfrak{a} = \{0\}$, что централизатор элемента x в G открыт. Затем, пользуясь экспоненциальным отображением, показать, что централизатор элемента x в G содержит некоторую окрестность элемента e, не зависящую от x.)

¶ 9) Пусть G — компактная группа Ли над K размерности n. Предположим, что алгебра Ли $L(G)$ проста. Для любых $g \in G$, целого числа $m \geqslant 1$ и окрестности V элемента e в G обозначим через $M(g, m, V)$ множество элементов из G вида $\prod_{i=1}^{m} x_i (y_i, g) x_i^{-1}$, где $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m$ принадлежат V.

а) Показать, что если g — элемент из G, централизатор которого не является открытым, m — целое число $\geqslant n$ и V — окрестность элемента e, то $M(g, m, V)$ есть окрестность элемента e. (Существует такой элемент $a \in L(G)$, что $(\mathrm{Ad}\, g)^{-1}(a) \neq a$. Пусть φ — экспоненциальное отображение для G. Пусть b — образ элемента 1 относительно касательного отображения к $\lambda \mapsto (\varphi(\lambda a), g)$ в 0, где $\lambda \in K$. Тогда $b = ((\mathrm{Ad}\, g)^{-1} - 1)(a) \neq 0$. Существуют такие $x_1, \ldots, x_m$ в V, что $\{(\mathrm{Ad}\, x_1)(b), \ldots, (\mathrm{Ad}\, x_m)(b)\}$ содержит базис в $L(G)$. Рассмотрим отображение $(x'_1, \ldots, x'_m, y_1, \ldots, y_m) \mapsto \prod_{i=1}^{m} x'_i (y_i, g) x_i'^{-1}$ из G^{2m} в G. Показать, что касательное отображение в $(x_1, \ldots, x_m, e, \ldots, e)$ сюръективно.)

б) Пусть U — окрестность элемента e в G и m — целое число $\geqslant 1$. Существует элемент g из G, централизатор которого не открыт, такой, что $M(g, m, G) \subset U$. (Рассуждать от противного, используя компактность G.)

в) Пусть G' — компактная группа Ли над K, алгебра Ли которой проста. Пусть φ: $G \to G'$ — биективный гомоморфизм абстрактных групп. Тогда φ непрерывен. (Применить б) к G' и а) к G.)

10). Пусть G — группа Ли над K. Показать, что существует окрестность V элемента e, обладающая следующим свойством: если для всякой последова-

---

[1]) Последнее равенство не определяет $h(x, y)$ при $\|y\| \geqslant 1/2$. Кроме того, отображение $(x, y) \mapsto (f_{2\|y\|}(x), g(y))$ теряет гладкость при $y = 0$. Возможное исправление: положить $h(x, y) = (f_{\varphi(\|y\|)}(x), g(y))$, где функция φ определена в некоторой окрестности отрезка $[0, 1]$ в R, принимает значения в $[0, 1]$ и принадлежит классу C^∞, причем $\varphi(r) = 0$ при $r \leqslant 0$ и $\varphi(r) = 1$ при $r \geqslant 1/2$. — *Прим. перев.*

тельности (x_n) элементов из V определить рекуррентно $y_1 = x_1$, $y_n = (x_n, y_{n-1})$, то последовательность (y_n) будет стремиться к e.

11) а) Для x, y из $\mathbf{S}_{2n-1} \subset \mathbf{C}^n$ определим $\alpha(x, y) \in [0, \pi]$ формулой $\cos\alpha(x, y) = \mathscr{R}((x \mid y))$. Для s, t из $\mathbf{U}(n)$ положим $d(s, t) = \sup\limits_{s \in \mathbf{S}_{2n-1}} \alpha(sx, tx)$. Показать, что d есть расстояние на $\mathbf{U}(n)$, инвариантное слева и справа.

б) Пусть $s \in \mathbf{U}(n)$. Пусть $\theta_1, \ldots, \theta_m$ — числа из $]-\pi, \pi]$, такие, что $e^{i\theta_j}$ — все попарно различные собственные значения элемента s. Положим $\theta(s) = \sup\limits_{1 \leqslant j \leqslant m} |\theta_j|$. Тогда $d(e, s) = \theta(s)$. (Пусть V_j — собственное подпространство элемента s, отвечающее собственному значению $e^{i\theta_j}$. Для $x \in \mathbf{S}_{2n-1}$ оценить $\mathscr{R}((x \mid sx))$ снизу с помощью разложения по подпространствам V_j.)

в) Пусть s, t из $\mathbf{U}(n)$ таковы, что $\theta(t) < \pi/2$ и s коммутирует с (s, t). Тогда s и t коммутируют. (В обозначениях п. б) пусть V'_j — ортогональное дополнение к V_j и $W_j = t(V_j)$; показать, что $W_j = (W_j \cap V_j) + (W_j \cap V'_j)$ и и затем, что $W_j \cap V'_j = \{0\}$.)

г) Показать, что существует компактная окрестность V элемента e в $\mathbf{U}(n)$, обладающая свойством, указанным в предложении 10, устойчивая относительно внутренних автоморфизмов группы $\mathbf{U}(n)$ и такая, что если x, y суть не перестановочные элементы в V, то x и (x, y) не перестановочны. (Использовать в).)

д) Пусть β — нормализованная мера Хаара на $\mathbf{U}(n)$. Пусть V_1 — компактная симметричная окрестность элемента e в $\mathbf{U}(n)$, такая, что $V_1^2 \subset V$. Пусть p — целое число, такое, что $\beta(V_1) > 1/p$. Показать, что во всякой конечной подгруппе F группы $\mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ существует такая ее коммутативная нормальная подгруппа A, что $\operatorname{Card}(F/A) \leqslant p$ (теорема Жордана). (Свести все к случаю, когда $F \subset \mathbf{U}(n)$. Взять в качестве A подгруппу в F, порожденную множеством $F \cap V$, и применить г).)

12) Пусть G — вещественная или комплексная связная конечномерная группа Ли, α — левоинвариантная дифференциальная форма степени p на G. Для того, чтобы α была также правоинвариантной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $d\alpha = 0$. (Заметить, что условие правоинвариантности записывается в виде равенства

$$\bigwedge^p ({}^t\mathrm{Ad}(s)) \cdot \alpha(e) = \alpha(e),$$

выполняющегося для всякого $s \in G$, а потому оно эквивалентно равенству

$$\sum_{j=1}^{p} \langle \alpha(e), u_1 \wedge \ldots \wedge u_{j-1} \wedge [u, u_j] \wedge u_{j+1} \wedge \ldots \wedge u_p \rangle = 0,$$

каковы бы ни были u, $u_1, \ldots, u_p$ в $L(G)$.) В частности, дифференциальные формы степени 1 на G, инвариантные слева и справа, образуют векторное пространство размерности $\dim L(G) - \dim [L(G), L(G)]$.

13) Наделим $\mathbf{R}^n$ обычным скалярным произведением $((\xi_i), (\eta_i)) \longmapsto \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$. Пусть $I(n)$ — группа аффинных изометрических преобразований пространства $\mathbf{R}^n$. Она канонически изоморфна подгруппе Ли в $\mathbf{GL}(n+1, \mathbf{R})$, образованной матрицами

$$S = \begin{pmatrix} U & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $U \in \mathbf{O}(n)$ и x — произвольный элемент из $\mathbf{R}^n$ (матрица типа $(n, 1)$). Мы можем отождествить $I(n)$ с полупрямым произведением группы $\mathbf{O}(n)$ на $\mathbf{R}^n$, определенным канонической инъекцией группы $\mathbf{O}(n)$ в $\mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$ (матрица S обозначается тогда через (U, x)). Пусть p: $I(n) \to \mathbf{O}(n)$ — каноническая сюръекция с ядром $\mathbf{R}^n$.

а) Пусть Γ — дискретная подгруппа в $I(n)$. Рассмотрим группу $\overline{p(\Gamma)}$ — замыкание группы $p(\Gamma)$ в $\mathbf{O}(n)$. Показать, что ее компонента единицы коммутативна. (Пусть V — окрестность матрицы I в $\mathbf{O}(n)$, обладающая свойством из упражнения 11г) и такая, что $\|U - I\| \leqslant 1/4$ для всякого $U \in V$ (предполагается, что норма на $\operatorname{End}(\mathbf{R}^n)$ получается из евклидовой нормы на $\mathbf{R}^n$). (Рассуждать от противного, предполагая, что существуют такие $S_1 = (U_1, x_1)$, $S_2 = (U_2, x_2)$, что U_1, U_2 принадлежат V и не коммутируют. Показать, что можно записать $(S_1, S_2) = ((U_1, U_2), y)$, где

$$\|y\| \leqslant \frac{1}{4}(\|x_1\| + \|x_2\|).$$

Определить тогда рекуррентно элементы S_k, полагая $S_k = (S_1, S_{k-1})$ при $k \geqslant 3$. Принимая во внимание выбор окрестности V, показать, что эта последовательность имеет бесконечное число различных членов и ограничена в $I(n)$, а это невозможно.)

б) Говорят, что Γ есть *кристаллографическая* группа, если $I(n)/\Gamma$ компактно. Показать, что если это так, то для всякого $x \in \mathbf{R}^n$ аффинное подпространство L в $\mathbf{R}^n$, порожденное множеством Γx, совпадает с $\mathbf{R}^n$. (В противном случае для всякого $y \in \mathbf{R}^n$ все точки множества Γy отстоят от L на одинаковом расстоянии, а поскольку это расстояние может быть произвольно большим, $I(n)/\Gamma$ не компактно.)

в) Если Γ — коммутативная кристаллографическая группа, то $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$. (Если $S = (U, x) \in \Gamma$ такова, что векторное подпространство $V \subset \mathbf{R}^n$, образованное неподвижными точками отображения U, отлично от $\mathbf{R}^n$, и если обозначить через $V^{\perp}$ ортогональное дополнение к V, то для всякой $S' = (U', x') \in \Gamma$ подпространства V и $V^{\perp}$ устойчивы относительно U'. С другой стороны, воспользовавшись тем, что $U \mid V^{\perp}$ не имеет неподвижных точек, отличных от 0, показать, что, изменив начало координат, можно считать $x \in V$. Вследствие б) существует такой $S' = (V', x') \in \Gamma$, что ортогональная проекция y' элемента x' на $V^{\perp}$ отлична от 0. Вычислив Sx' по формуле $S = S'SS'^{-1}$, вывести отсюда $U \cdot y' = y'$, что противоречит определению пространства V.)

г) Если Γ — кристаллографическая группа, то $\Gamma \cap \mathbf{R}^n$ есть свободная коммутативная группа ранга n и $\Gamma/(\Gamma \cap \mathbf{R}^n)$ есть конечная группа (теорема Бибербаха). Пусть W — векторное подпространство в $\mathbf{R}^n$, порожденное множеством $\Gamma \cap \mathbf{R}^n$. Компактная группа $\overline{p(\Gamma)}$ имеет только конечное число связных компонент. Если $W = \{0\}$, то, согласно а), Γ содержит коммутативную нормальную подгруппу Γ_1 конечного индекса; Γ_1 тогда является кристаллографической группой, что приводит к противоречию с в). Стало быть, $W \neq \{0\}$. Показать, что W устойчиво относительно $p(\Gamma)$ и $p(\Gamma) \mid W$ конечна: в противном случае существовала бы такая последовательность (S_m) в Γ, что если $S_m = (U_m, x_m)$, то элементы U_m попарно различны и стремятся к I; образовать тогда коммутаторы $(I, a_j) S_m (I, a_j)^{-1} S_m^{-1}$, где (a_j) — базис в $\Gamma \cap \mathbf{R}^n$, и получить противоречие с предположением о дискретности группы Γ. Наконец, для проверки справедливости равенства $W = \mathbf{R}^n$ показать, что в противном случае Γ действовала бы на $\mathbf{R}^n/W$ как кристаллографическая группа, не содержащая параллельных переносов, отличных от 0.)

§ 5

1) Предположим, что $K=\mathbf{R}$. Пусть r — целое число $\geqslant 1$ или ∞. Назовем *группой класса* C^r множество G, наделенное групповой структурой и структурой многообразия класса C^r, такими, что отображение $(x, y) \longmapsto xy^{-1}$ из $G \times G$ в G принадлежит классу C^r.

а) В дальнейшем мы предполагаем, что $r \geqslant 2$. Отождествим некоторую окрестность элемента e в G с окрестностью элемента 0 в некотором банаховом пространстве. Пусть $xy = P(x, y)$, где P — отображение класса C^2 в некоторой открытой окрестности элемента $(0, 0)$. Положим $(D_1D_2P)(0, 0) = B$. Показать, что

$$xy = x + y + B(x, y) + |x|\,|y|\,o(1),$$

когда $(x, y) \to (0, 0)$. (Воспользоваться разложением отображения P с членами порядка $\leqslant 2$ и интегральным остаточным членом.)

б) Показать, что

$$x^{-1} = -x + B(x, x) + |x|^2 o(1),$$

$$xyx^{-1} = y + B(x, y) - B(y, x) + |x|\,|y|\,o(1),$$

$$x^{-1}y^{-1}xy = B(x, y) - B(y, x) + |x|\,|y|\,o(1),$$

когда (x, y) стремится к $(0, 0)$.

2) Пусть G — группа класса C^r с $r \geqslant 2$.

а) Пусть $t \in \mathcal{T}^{(s)}(G)$, $t' \in \mathcal{T}^{(s')}(G)$. Если $s + s' \leqslant r$, определим $t * t' \in \mathcal{T}^{(s+s')}(G)$, как в § 3, n° 1. Если t и t' не имеют свободных членов, то $t * t'$ не имеет свободного члена. Образ элемента t относительно отображения $x \longmapsto x^{-1}$ из G в G обозначается через $t^{\vee}$; имеем $t^{\vee} \in \mathcal{T}^{(s)}(G)$. Если f — функция класса C^r на G со значениями в отделимом полинормированном пространстве, то через $f * t$ обозначается функция на G, определенная формулой $(f * t)(x) = \langle \varepsilon_x * t^{\vee}, f \rangle$ для всякого $x \in G$; эта функция принадлежит классу C^{r-s}, если $s < \infty$. Показать, как в § 3, n° 4, что $f * (t * t') = (f * t) * t'$.

б) Если $t \in T_e(G)$, то векторное поле $x \longmapsto \varepsilon_x * t$ на G обозначается через L_t. Показать, как в § 3, n° 6, что для t, t' из $T_e(G)$ имеем $L_{t*t'} = L_t \circ L_{t'}$, откуда $L_{t*t'-t'*t} = [L_t, L_{t'}]$. Следовательно, $t * t' - t' * t$ есть элемент из $T_e(G)$, который обозначается через $[t, t']$.

в) Воспользуемся обозначениями упражнения 1 а). Если $t \in T_e(G)$, то $L_t(x) = (D_2P(x, 0))(t)$, когда x достаточно близок к 0. Вывести отсюда, что $[t, t'] = B(t, t') - B(t', t)$.

г) Показать, что пространство $T_e(G)$, наделенное операцией коммутирования $(t, t') \longmapsto [t, t']$, является нормируемой алгеброй Ли. (Для проверки тождества Якоби воспользоваться п. в), упражнением 1б) и тождеством (5) из *Alg.*, chap. I, p. 66).

(По поводу продолжения этого упражнения см. § 8, упражнение 6.)

§ 6

1) Пусть D — множество элементов группы $\mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$ вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$, где $a > 0$ и $b \in \mathbf{C}$. Показать, что D есть подгруппа Ли вещественной группы Ли, лежащей ниже $\mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$, и отображение $(u, d) \longmapsto ud$ из $\mathbf{SU}(2, \mathbf{C}) \times D$ в $\mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$ есть изоморфизм вещественно-аналитических многообразий. Вывести отсюда и из упражнения 7в) § 3, что $\mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$ односвязна.

2) Пусть G — универсальная накрывающая группы $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$, π — канонический морфизм из G на $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$ и N — его ядро.

а) Рассуждая, как в упражнении 1, показать, что существует изоморфизм вещественно-аналитического многообразия $\mathbf{T} \times \mathbf{R}^2$ на вещественно-аналитическое многообразие $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$. Вывести отсюда, что группа N изоморфна $\mathbf{Z}$.

б) Если ρ — линейное аналитическое представление группы G в комплексном векторном пространстве, то $\operatorname{Ker} \rho \supset N$. (Представление $L(\rho)$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ определяет посредством комплексификации представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$, и это последнее представление в силу упражнения 1 имеет вид $L(\sigma)$, где σ — линейное аналитическое представление группы $\mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$. Тогда $L(\sigma \circ \pi) = L(\rho)$, стало быть, $\sigma \circ \pi = \rho$.)

3) Пусть G_1 — вещественная нильпотентная односвязная группа Ли, определенная в упражнении 5 § 4. Пусть Z — центр группы G_1, N — нетривиальная дискретная подгруппа в Z и $G = G_1/N$. Если ρ — конечномерное линейное аналитическое представление группы G, то $\rho(Z/N)$ является полупростым семейством автоморфизмов, поскольку Z/N компактна; $Z = (G, G)$, и, значит, группа $\rho(Z/N)$ унипотентна (гл. I, § 6, предложение 6). Следовательно, ρ тривиально на Z/N.

4) Пусть G — комплексная связная компактная группа Ли. Показать, что всякое линейное аналитическое представление группы G тривиально.

5) В обозначениях упражнения 9 § 1 показать, что H' есть интегральная подгруппа в H. Вывести отсюда, что в односвязной группе $\mathbf{SU}(2, \mathbf{C}) \times \mathbf{SU}(2, \mathbf{C})$ (§ 3, упражнение 7в)) существуют незамкнутые однопараметрические подгруппы.

¶ 6) Пусть I есть отрезок $(1, 2)$, наделенный дискретной топологией. Пусть E — полное нормированное пространство функций $f\colon I \to \mathbf{R}$, таких, что $\|f\| = \sum\limits_{i \in I} |f(i)| < +\infty$. Для любого $x \in I$ обозначим через ε_x элемент из E, такой, что $\varepsilon_x(t) = 0$ при $t \neq x$ и $\varepsilon_x(x) = 1$. Пусть P — подгруппа в E, порожденная функциями $x\varepsilon_x$ для $x \in I$; это дискретная подгруппа в E. Пусть G — группа Ли E/P. Пусть F — гиперплоскость в E, образованная такими $f \in E$, что $\sum\limits_{i \in I} f(i) = 0$. Пусть H — группа Ли $F/(F \cap P)$ и φ — канонический морфизм из H в G. Показать, что φ биективен, является иммерсией, но не является изоморфизмом групп Ли. (Пусть f — линейная форма на E с ядром F; показать, что $f(P) = \mathbf{R}$ и, стало быть, $F + P = E$.) Вывести отсюда, что в предложении 3 нельзя опустить предположение о счетности базиса.

7) Пусть φ — морфизм из $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ в группу преобразований множества $\mathbf{C}$, переводящий нееденичный элемент в отображение $z \to \bar{z}$. Пусть G — полупрямое произведение группы $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ на вещественную группу Ли $\mathbf{C}$, отвечающее морфизму φ. Это вещественная группа Ли с алгеброй Ли $\mathbf{R}^2$. Показать, что на G не существует никакой структуры комплексной группы Ли, согласованной с ее структурой вещественной группы Ли.

¶ 8) Пусть H — комплексное гильбертово пространство размерности $\aleph_0$ и G — его унитарная группа, рассматриваемая как вещественная группа Ли. Группа G односвязна [1]).

а) Пусть Z — центр группы G; группа Z изоморфна $\mathbf{T}$. Пусть a — иррациональное число. Пусть $\mathfrak{s}$ — подалгебра Ли в $L(G) \times L(G)$, образованная элементами (x, ax), где $x \in L(Z)$. Пусть S — соответствующая интегральная

[1]) См. N. H. Kuiper, The homotopy type of the unitary group of Hilbert space, *Topology*, 3 (1965), 19—30. В этой статье доказано даже, что G стягиваема.

подгруппа в $G \times G$. Тогда $\mathfrak{s}$ есть идеал в $L(G) \times L(G)$; тем не менее S не замкнута и плотна в $Z \times Z$.

б) Пусть $\mathfrak{g} = (L(G) \times L(G))/\mathfrak{s}$. Не существует никакой группы Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. (Пусть H — такая группа. Поскольку G односвязна, существует морфизм φ: $G \times G \to H$, такой, что $L(\varphi)$ есть каноническое отображение из $L(G) \times L(G)$ на $\mathfrak{g}$. Пусть $N = \operatorname{Ker} \varphi$. Тогда $L(N) \supset \mathfrak{s}$ и, стало быть, $N \supset S$, а потому $N \supset Z \times Z$ в силу а). Тогда $L(N) \supset L(Z) \times L(Z)$, и мы получили противоречие.)

9) Пусть X — комплексное компактное связное непустое многообразие размерности n. Предположим, что существуют голоморфные на X векторные поля $\xi_1, \ldots, \xi_n$, которые линейно независимы в каждой точке из X. Показать, что существуют комплексная группа Ли G и ее дискретная подгруппа D, такие, что X диффеоморфно многообразию G/D. (Пусть c_{ijk} — голоморфные функции на X, определенные формулами $[\xi_i, \xi_j] = \sum\limits_k c_{ijk}\xi_k$. Функции c_{ijk} постоянны, поскольку X компактно. Взять в качестве G комплексную односвязную группу Ли, алгебра Ли которой допускает числа c_{ijk} в качестве структурных констант, и применить теорему 5.)

10) Пусть G — группа Ли с конечным числом связных компонент. Для унимодулярности G необходимо и достаточно, чтобы для всякого $a \in L(G)$ выполнялось равенство $\operatorname{Tr} \operatorname{ad} a = 0$.

11) Пусть E — полное нормируемое пространство над $\mathbf{C}$, $v \in \mathscr{L}(E)$ и $g = \exp(v)$. Предположим, что $\operatorname{Sp}(v) \cap 2i\pi(\mathbf{Z} - \{0\}) = \varnothing$. Пусть E_1, E_2 — замкнутые векторные подпространства в E, устойчивые относительно v и такие, что $E_2 \subset E_1$. Предположим, что автоморфизм пространства E_1/E_2, определенный автоморфизмом g, тождествен. Тогда $v(E_1) \subset E_2$.

¶ 12) Рассмотрим вещественное или комплексное полное нормируемое пространство E и замкнутое векторное подпространство F в E, такое, что его поляра F^0 не допускает топологического дополнения в E' [1]).

а) Пусть A (соотв. B) — полное нормируемое пространство непрерывных эндоморфизмов пространства E (соотв. F). Пусть C — множество таких $u \in A$, что $u(F) \subset F$. Пусть α — отображение $u \longmapsto (u, u \mid F)$ из C в $A \times B$. Тогда α является изоморфизмом полного нормируемого пространства C на некоторое замкнутое векторное подпространство в $A \times B$ и $\alpha(C)$ не допускает топологического дополнения в $A \times B$. (Пусть элемент $x \in E$ таков, что $x \notin F$, а $\xi \in F^0$ таков, что $\langle x, \xi \rangle = 1$. Если $\eta \in E'$, обозначим через $\tilde{\eta}$ элемент $y \longmapsto \langle y, \eta \rangle x$ из A. Допустим, что существует проекция π из $A \times B$ на $\alpha(C)$. Определим $\tilde{\pi}$: $E' \to E'$ формулой $\tilde{\pi}(\eta) = {}^t(\alpha^{-1}(\pi(\tilde{\eta}, 0)))(\xi)$. Тогда $\tilde{\pi}$ есть проекция из E' на F^0, и мы получили противоречие.)

---

[1]) Пусть c_0 (соотв. l^1, l^∞) — банахово пространство вещественных или комплексных последовательностей $(x_1, x_2, \ldots)$, таких, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$ (соотв. $\sum\limits_n |x_n| < +\infty$, соотв. $\sup\limits_n |x_n| < +\infty$) с нормой $\|x\| = \sup\limits_n |x_n|$ (соотв. $\sum\limits_n |x_n|$, соотв. $\sup\limits_n |x_n|$). Существует непрерывный морфизм π из l^1 на c_0; пусть F — его ядро. Тогда $(c_0)' = l^1$ отождествляется с F^0. Но сепарабельное векторное подпространство l^∞ не может быть прямым слагаемым в l^∞ (см. A. Grothendieck, Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type C (K), *Can. J. Math.*, **5** (1953), 169).

б) Построим вещественную или комплексную полную нормируемую алгебру M с единицей следующим образом: $M=\bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i$ градуирована пространствами M_i; M_0 есть множество элементов вида $\lambda 1$, где λ — произвольный скаляр; M_1 есть множество элементов вида λu, где λ — произвольный скаляр, а u — некоторый фиксированный, отличный от нуля элемент; $M_2 = \{0\}$; $M_3=F$; $M_4=E$; $M_i=\{0\}$ при $i \geqslant 5$; $ux=x$ для любого $x \in M_3$. Пусть N — полное нормируемое пространство непрерывных эндоморфизмов полного нормируемого пространства M. Пусть N_1 — множество непрерывных дифференцирований алгебры M. Используя а), показать, что N_1 не имеет топологического дополнения в N.

в) Показать, что группа бинепрерывных автоморфизмов алгебры M есть квазиподгруппа Ли в $\mathbf{GL}(M)$, но не подгруппа Ли в $\mathbf{GL}(M)$. (Применить следствие 2 предложения 18 и б).)

13) Пусть G — вещественная группа Ли, $L=L(G)$, $\varphi\colon L \to G$ — дифференцируемое в 0 отображение, такое, что $T_0(\varphi)=\mathrm{Id}_L$ и $\varphi(nx)=\varphi(x)^n$, каковы бы ни были $x \in L$ и $n \in \mathbf{Z}$. Тогда $\varphi=\exp_G$. (Пусть V — окрестность элемента 0 в L, W — окрестность элемента e в G, такие, что $\theta=\exp_G|V$ есть аналитический изоморфизм из V на W. Пусть $\psi=\theta^{-1}\circ(\varphi|\varphi^{-1}(W))$. Тогда $T_0(\psi)=\mathrm{Id}_L$. Объединяя это с равенством $\psi\left(\frac{1}{n}x\right)=\frac{1}{n}\psi(x)$, справедливым, если x достаточно близок к 0 и $n \in \mathbf{Z}-\{0\}$, получаем $\psi=\mathrm{Id}_L$.)

14) Пусть $\mathfrak{a}_1$ — коммутативная алгебра Ли $\mathbf{R}^4$, отождествленная с $\mathbf{C}^2$. Пусть $\mathfrak{a}_2$ — коммутативная алгебра Ли $\mathbf{R}$ и ψ — гомоморфизм из $\mathfrak{a}_2$ в $\mathrm{Der}(\mathfrak{a}_1)$, переводящий 1 в дифференцирование $(z_1, z_2) \longmapsto (iz_1, i\sqrt{2}\,z_2)$. Пусть $\mathfrak{a}$ — полупрямое произведение алгебры Ли $\mathfrak{a}_2$ на $\mathfrak{a}_1$, отвечающее гомоморфизму ψ.

а) Показать, что $(\mathrm{Int}\,\mathfrak{a})|\mathfrak{a}_1$ содержит для всякого $\varphi \in \mathbf{R}$ автоморфизм

$$(z_1, z_2) \longmapsto \left(e^{i\varphi}z_1,\ e^{i\sqrt{2}\,\varphi}z_2\right).$$

б) Показать, что замыкание G группы $(\mathrm{Int}\,\mathfrak{a})|\mathfrak{a}_1$ в $\mathbf{GL}(\mathfrak{a}_1)$ содержит для всякого $(\varphi, \varphi') \in \mathbf{R}^2$ автоморфизм $(z_1, z_2) \longmapsto (e^{i\varphi}z_1, e^{i\varphi'}(z_2)$.

в) Показать, что $L(G)$ содержит эндоморфизм $u\colon (z_1, z_2) \longmapsto (z_1, 0)$ пространства $\mathfrak{a}_1$ и не существует никакого $x \in \mathfrak{a}$, для которого $u=(\mathrm{ad}\,x)|\mathfrak{a}_1$.

г) Вывести из этого, что группа $\mathrm{Int}(\mathfrak{a})$ не замкнута в $\mathrm{Aut}(\mathfrak{a})$.

15) Показать, что вещественная конечномерная односвязная группа Ли упражнения 7а) § 3 обладает связными, но не односвязными подгруппами Ли (а именно она содержит подгруппы Ли, изоморфные группе $\mathbf{U}$).

¶ 16) а) Пусть $\mathfrak{g}$ — комплексная алгебра Ли и $\overline{\mathfrak{g}}$ — комплексная алгебра Ли, полученная из $\mathfrak{g}$ посредством автоморфизма $\lambda \longmapsto \bar{\lambda}$ поля $\mathbf{C}$. Пусть $\mathfrak{g}_0$ — вещественная алгебра Ли, полученная из $\mathfrak{g}$ ограничением поля скаляров. Пусть $\mathfrak{g}' \supset \mathfrak{g}_0$ есть комплексная алгебра Ли $\mathfrak{g}_0 \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$. Для всякого $x \in \mathfrak{g}$ положим

$$f(x)=\frac{1}{2}(x \otimes 1-(ix)\otimes i) \in \mathfrak{g}', \quad g(x)=\frac{1}{2}(x \otimes 1+(ix)\otimes i) \in \mathfrak{g}'.$$

Показать, что f (соотв. g) есть изоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (соотв. $\overline{\mathfrak{g}}$) на некоторый идеал $\mathfrak{m}$ (соотв. $\mathfrak{n}$) в $\mathfrak{g}'$ и что идеалы $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ взаимно дополнительны в $\mathfrak{g}'$. Это определяет проекции p, q из $\mathfrak{g}'$ на $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ соответственно. Показать, что для всякого $x \in \mathfrak{g}$ справедливы равенства $f(x)=p(x)$, $g(x)=q(x)$.

б) Предположим, что $\mathfrak{g}$ конечномерна. Пусть G — комплексная односвязная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$. Пусть $\overline{G}$ — сопряженная к ней комплексная группа Ли, G_0 — нижележащая вещественная группа Ли. Тогда $L(\overline{G}) = \overline{\mathfrak{g}}$, $L(G_0) = \mathfrak{g}_0$. Пусть M (соотв. N) — комплексная односвязная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{m}$ (соотв $\mathfrak{n}$). Тогда f определяет изоморфизм φ из G на M, g определяет изоморфизм γ из $\overline{G}$ на N и комплексная односвязная группа Ли G', отвечающая алгебре Ли $\mathfrak{g}'$, отождествляется с $M \times N$. Показать, что вещественная интегральная подгруппа в G' с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_0$ замкнута, односвязна и отождествляется с G_0. Ограничение на $G \subset M \times N$ проекции pr_1 (соотв. pr_2) совпадает с изоморфизмом φ (соотв. γ) из G (соотв. $\overline{G}$) на M (соотв. N).

в) Вывести из б) и замечания 2 n° 10, что группа G' вместе с канонической инъекцией из G_0 в G' является универсальной комплексификацией группы G_0.

г) Пусть H — некоторая комплексная связная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, $\overline{H}$ — сопряженная к ней комплексная группа Ли, H_0 — нижележащая вещественная группа Ли, так что G есть универсальная накрывающая группы H. Пусть K — (дискретное) ядро канонического морфизма из G на H. Показать, что K — центральная подгруппа в G'. Каноническая инъекция группы G_0 в G' определяет, стало быть, инъекцию i группы H_0 в G'/K. Показать, что $(G'/K, i)$ есть универсальная комплексификация группы H_0. (Заметить, что эта пара обладает свойством универсальности предложения 20.)

д) Положим $G'/K = (H_0)_{\mathbf{C}}$. Получить из г) канонический морфизм ψ из $(H_0)_{\mathbf{C}}$ на $H \times \overline{H}$, являющийся накрытием. Показать на примере группы $H = \mathbf{C}^*$, что ψ, вообще говоря, не обязательно является изоморфизмом.

17) а) Пусть G, $\overline{G}$, G_0 такие, как в упражнении 16б). Пусть V — конечномерное комплексное векторное пространство, ρ — неприводимое линейное представление группы G_0 в V. Показать, что существуют конечномерные комплексные векторные пространства X, Y, неприводимое линейное аналитическое представление σ (соотв. τ) группы G (соотв. $\overline{G}$) в X (соотв. Y) и изоморфизм из V на $X \otimes Y$, преобразующий ρ в $\sigma \otimes \tau$. (Применить упражнение 16а), предложение 2 гл. I, § 2, и *Алг.*, гл. VIII, § 7, n° 7, следствие предложения 8.)

б) Показать, что заключение п. а) может стать несправедливым, если опустить предположение об односвязности группы G. (Рассмотреть комплексную группу Ли $\mathbf{C}^*$.)

18) Пусть A — комплексная коммутативная связная конечномерная группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{a}$; пусть Λ — ядро отображения $\exp_A$, так что A отождествляется с $\mathfrak{a}/\Lambda$.

а) Следующие условия эквивалентны:

а1) Каноническое отображение $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda \to \mathfrak{a}$ инъективно.

а2) A изоморфна некоторой подгруппе Ли в $(\mathbf{C}^*)^n$.

а3) A изоморфна $(\mathbf{C}^*)^p \times \mathbf{C}^q$.

а4) A обладает точным конечномерным комплексным линейным представлением.

а5) A обладает конечномерным комплексным линейным представлением, которое точно, полупросто и имеет замкнутый образ.

б) Следующие условия эквивалентны:

б1) Каноническое отображение $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda \to \mathfrak{a}$ сюръективно.

б2) A изоморфна факторгруппе группы Ли $(\mathbf{C}^*)^n$.

б3) Никакая подгруппа Ли в A, являющаяся прямым слагаемым, не изоморфна $\mathbf{C}$.

б4) Всякое комплексное линейное представление группы A полупросто.

в) Следующие условия эквивалентны:

в1) Каноническое отображение $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda \to \mathfrak{a}$ биективно.

в2) A изоморфна $(\mathbf{C}^*)^n$.

г) Пусть F — конечная подгруппа в A и $A' = A/F$. Показать, что A удовлетворяет условиям a_i (соотв. $\mathrm{б}_i$), $\mathrm{в}_i$)) тогда и только тогда, когда этим условиям удовлетворяет A'.

19) Пусть G — вещественная группа Ли. Показать, что существует окрестность V элемента 0 в $L(G)$, такая, что для x, y из V

$$\exp(t(x+y)) = \lim_{n\to+\infty}\left(\exp\frac{tx}{n}\cdot\exp\frac{ty}{n}\right)^n,$$

$$\exp(t^2[x, y]) = \lim_{n\to+\infty}\left(\exp\frac{tx}{n}\cdot\exp\frac{ty}{n}\cdot\exp\frac{-tx}{n}\cdot\exp\frac{-ty}{n}\right)^{n^2}$$

равномерно по $t \in [0, 1]$.

20) Пусть G — группа Ли, H — подгруппа Ли в G, A — интегральная подгруппа в G, такие, что $L(H) \cap L(A) = \{0\}$. Показать, что $H \cap A$ дискретна в группе Ли A.

21) Пусть G — вещественная группа Ли, H — нормальная интегральная подгруппа размерности 1.

а) Если H не замкнута, то $\overline{H}$ компактна (*Спектр. теор.*, гл. II, § 2, лемма 1), значит, изоморфна $\mathbf{T}^n$, а потому центральна, если G связна (применить *Общ. топ.*, 1969, гл. VII, § 2, предложение 5).

б) Предположим, что H замкнута. Пусть a — элемент из G, $C(a)$ — множество перестановочных с a элементов из G. Предположим, что $H \not\subset C(a)$.

Если H изоморфна $\mathbf{R}$, то $C(a) \cap H = \{e\}$. (Рассмотреть автоморфизм α: $h \longmapsto a^{-1}ha$ группы H.) Если H изоморфна $\mathbf{T}$, то $C(a) \cap H$ состоит из двух элементов. (Снова рассмотреть α и применить *Общ. топ.*, 1969, гл. VII, § 2, предложение 6.) Этот последний случай невозможен, если G связна (использовать а)).

в) В предположениях п. б) допустим, кроме того, что G/H коммутативна. Тогда $G = C(a) \,.\, H$. (Заметить, что отображение $h \longmapsto h^{-1}\alpha(h)$ из H в H сюръективно.)

22) Пусть G — вещественная группа Ли, H — нормальная интегральная подгруппа размерности 1, A — замкнутая подгруппа в G, такая, что AH не замкнута в G. Тогда H центральна в компоненте единицы группы $\overline{AH}$. (Свести все к случаю, когда $G = \overline{AH}$ и G связна. Тогда множество B элементов из A, перестановочных с элементами подгруппы H, является нормальной подгруппой в G. Факторизуя по B, свести все к случаю, когда $B = \{e\}$. Поскольку всякий коммутатор в G перестановочен с элементами из H, группа A в этом случае коммутативна. Считая H замкнутой и используя упражнение 21в), показать, что AH будет замкнутой, т. е. получить противоречие. Стало быть, H не замкнута; применить упражнение 21а).)

¶ 23) Пусть G — вещественная группа Ли и $c = (U, \varphi, E)$ — карта многообразия G, центрированная в единичном элементе e. Если $x \in U$, обозначим через $|x|_c$ норму элемента $\varphi(x)$ в банаховом пространстве E.

а) Показать, что если $c' = (U', \varphi', E')$ — другая карта, центрированная в e, то существуют константы $\lambda > 0$ и $\mu > 0$, такие, что

$$\mu\,|x|_c \leqslant |x|_{c'} \leqslant \lambda\,|x|_c$$

для любого $x \in G$, достаточно близкого к e.

б) Показать, что для всякого $\rho > 0$ существует окрестность U_ρ элемента e, содержащаяся в U и такая, что для x, y из U_ρ имеем $(x, y) \in U_\rho$ и

$$|(x, y)|_c \leqslant \rho\,.\,\inf(|x|_c, |y|_c).$$

в) Предположим, что G конечномерна. Пусть Γ — дискретная подгруппа в G. Применим б) с таким ρ, что $0 < \rho < 1$, и выберем U_ρ относительно компактной. Множество $U_\rho \cap \Gamma$ конечно. Пусть

$$\{e = \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$$

— его элементы, занумерованные так, что

$$|\gamma_0|_c \leqslant |\gamma_1|_c \leqslant \ldots \leqslant |\gamma_m|_c.$$

Показать, что если $i \leqslant m$ и $j \leqslant m$, то коммутатор (γ_i, γ_j) равен одному из элементов γ_k, где $k < \inf(i, j)$. Вывести отсюда, что подгруппа, порожденная множеством $U_\rho \cap \Gamma$, является нильпотентной группой класса $\leqslant m$.

Доказать с помощью изложенного выше существование такой окрестности V элемента e, что для всякой дискретной подгруппы Γ в G существует нильпотентная интегральная подгруппа N в G, содержащая $V \cap \Gamma$.

г) Предположим, что G связна, конечномерна и содержит возрастающую последовательность дискретных подгрупп D_n, объединение которых плотно в G. Тогда G нильпотентна. (С помощью в) доказать существование однопараметрической центральной подгруппы H, пересекающей D_n в некоторой точке, отличной от e, коль скоро n достаточно велико. Провести индукцию по $\dim G$, различая два случая в соответствии с тем, замкнута H или относительно компактна (упражнение 21 а)).)

24) Пусть G, G' — вещественные конечномерные группы Ли, f — сюръективный морфизм из G в G', N — его ядро, H — интегральная подгруппа в G и $H' = f(H)$.

а) Предположим, что N конечно. Для замкнутости H' необходимо и достаточно, чтобы H была замкнута.

б) Предположим, что N компактно. Если H замкнута, то H' замкнута.

¶ 25) Пусть G — вещественная или комплексная конечномерная группа Ли. Пусть $S \subset L(G)$. Предположим, что $L(G)$, как алгебра Ли, порождается множеством S и что S устойчиво относительно гомотетий.

а) Пусть H — подгруппа в G, порожденная множеством $\exp S$. Показать, что H открыта в G. (Пусть A — множество таких $x \in L(G)$, что $\exp(Kx) \subset H$, и B — векторное подпространство в $L(G)$, порожденное множеством A. Показать, что $[A, S] \subset A$, а затем, что $[A, A] \subset B$. Вывести отсюда, что B есть подалгебра в $L(G)$ и применить далее предложение 3 § 4.)

б) Предположим, кроме того, что

$$(x \in S \text{ и } y \in S) \Rightarrow ((\operatorname{Ad} \exp x)(y) \in S).$$

Тогда векторное подпространство V в $L(G)$, порожденное множеством S, совпадает с $L(G)$. (Используя а), показать, что $[L(G), V] \subset V$.)

26) Пусть G — комплексная компактная связная группа Ли размерности n, X — комплексно-аналитическое связное конечномерное многообразие, $(g, x) \longmapsto gx$ — закон аналитического левого действия группы G на X. Для всякого $g \in G$ пусть $\rho(g)$ — отображение $x \longmapsto gx$ из X в X. Предположим, что для всякого $g \in G$, отличного от e, $\rho(g) \neq \mathrm{Id}_X$. Тогда всякая орбита группы G в X является замкнутым подмногообразием в X размерности n. (Пусть x — точка из X, H — ее стабилизатор, H' — компонента единицы группы H. Для всякого $g \in H'$ обозначим через $u(g)$ касательное отображение к $\rho(g)$ в x. Рассуждая так же, как в доказательстве предложения 6 n° 3, показать, что $u(g)$ — тождественное отображение для всякого $g \in H'$. Используя упражнение 4 § 1 и связность многообразия X, вывести отсюда, что $H' = \{e\}$.)

¶ 27) Пусть G — вещественная компактная группа Ли, M — компактное многообразие класса C^2, J — открытый интервал в $\mathbf{R}$, содержащий 0. Пусть $(s, (x, \xi)) \mapsto (m_\xi(s, x), \xi)$ — отображение класса C^2 из $G \times (M \times J)$ в $M \times J$, посредством которого G действует слева иа $M \times J$.

а) Пусть X — векторное поле класса C^1 на $M \times J$, такое, что для всякого $(x, \xi) \in M \times J$ проекция вектора $X_{(x,\ \xi)}$ на второй сомножитель есть касательный к J вектор 1. Преобразуя X элементами группы G и интегрируя по G, вывести отсюда существование поля X', обладающего такими же свойствами, что и X, и к тому же инвариантного относительно G.

б) Показать, что существует диффеоморфизм $(x, \xi) \mapsto (h_\xi(x), \xi)$ многообразия $M \times J$ на себя, такой, что

(i) для всякого $\xi \in J$ отображение h_ξ есть диффеоморфизм из M на M.

(ii) $m_\xi(s, x) = h_\xi\left(m_0\left(s, h_\xi^{-1}(x)\right)\right)$ для $s \in G_0$, $x \in M$, $\xi \in J$. (Использовать а) и теорему 5 n° 8.)

28) Пусть G — вещественная группа Ли конечной размерности, A и B — две интегральные подгруппы в G. Показать, что если $L(A) + L(B)$ есть подалгебра Ли в $L(G)$ (другими словами, если $[L(A), L(B)] \subset L(A) + L(B)$), то $AB = BA$ есть интегральная подгруппа и $L(AB) = L(A) + L(B)$.

29) Пусть G — комплексная связная конечномерная группа Ли, G_0 — нижележащая вещественная группа, H — интегральная подгруппа в G_0. Показать, что существует наименьшая интегральная подгруппа H^* в G, содержащая H. Привести пример, когда H замкнута в G_0, но H^* не замкнута в G (взять $G = \mathbf{C}^2/\mathbf{Z}^2$).

30) Пусть G — компактная комплексная связная группа Ли, имеющая, следовательно, вид $\mathbf{C}^n/D$, где D — дискретная подгруппа в $\mathbf{C}^n$ ранга $2n$.

а) Показать, что всякая голоморфная дифференциальная 1-форма ω на G инвариантна. (Пусть π: $\mathbf{C}^n \to G$ — канонический морфизм и $\zeta_1, \ldots, \zeta_n$ — координатные функции на $\mathbf{C}^n$. Тогда $\pi^*(\omega)$ имеет вид $\sum_j a_j\, d\zeta_j$, где a_j суть голоморфные функции на $\mathbf{C}^n$, которые инвариантны относительно D и потому являются константами.)

б) Пусть $G' = \mathbf{C}^n/D'$, где D' — некоторая дискретная подгруппа в $\mathbf{C}^n$ ранга $2n$. Показать, что всякий изоморфизм *аналитических многообразий* u: $G \to G'$ представляется в виде $s \mapsto v(s) + a'$, где v — изоморфизм *групп Ли* и $a' \in G'$. (Пусть π': $\mathbf{C}^n \to G'$ — канонический морфизм. Существует изоморфизм аналитических многообразий $\tilde{u}$: $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$, такой, что $u \circ \pi = \pi' \circ \tilde{u}$. Для всякой дифференциальной 1-формы ω', голоморфной на G', $\tilde{u}^*(\pi'^*(\omega'))$ есть 1-форма на $\mathbf{C}^n$, инвариантная относительно сдвигов в силу а). Вывести отсюда, что $\tilde{u}$ есть аффинное отображение.)

§ 7

1) Пусть G — группа Ли, φ: $U \to G$ — такое экспоненциальное отображение, что $\mathbf{Z}U \subset U$ и $\varphi(rx) = \varphi(x)^r$ для любых $x \in U$ и $r \in \mathbf{Z}$. Если $p > 0$, то φ является аналитическим изоморфизмом из U на $\varphi(U)$. (Если $\varphi(x) = \varphi(y)$, то $\varphi(p^n x) = \varphi(p^n y)$ для всякого $n \in \mathbf{N}$ и, стало быть, $x = y$. Пусть W — такая открытая окрестность элемента 0 в $L(G)$, что φ^{-1} аналитично в $\varphi(W)$. Для любого $s \in \varphi(U)$ существуют $n \in \mathbf{N}$ и окрестность V элемента s в $\varphi(U)$, такие, что $t \in V \Rightarrow t^{p^n} \in \varphi(W)$.)

2) Пусть G — группа Ли, φ: $U \to G$ — экспоненциальное отображение, обладающее свойствами, перечисленными в предложении 3, V — такая окрестность элемента 0 в U, что $\mathbf{Z}V \subset V$, ψ: $V \to G$ — отображение, имеющее такое же, как и φ касательное отображение в 0, причем $\psi(nx) = \psi(x)^n$

для всякого $x \in V$ и всякого $n \in \mathbf{Z}$. Если $p > 0$, то $\psi = \varphi \mid V$. (Наделить $L(G)$ нормой. Пусть $x \in V$. Тогда $p^n x$ стремится к 0, когда n стремится к $+\infty$; значит, существуют такие $\alpha_n > 0$, что α_n стремится к 0 и $\|(\varphi^{-1} \circ \psi)(p^n x) - p^n x\| \leqslant \alpha_n \|p^n x\|$. Но $\psi(p^n x) = \psi(x)^{p^n}$, откуда $\|(\varphi^{-1} \circ \psi)(x) - x\| \leqslant \alpha_n \|x\|$.)

3) Пусть U — множество обратимых элементов кольца A и $U' = 1 + \mathfrak{m} \subset U$.

а) Показать, что $U' \subset U_{\mathfrak{f}}$. (Если $x = 1 + y$, где $y \in \mathfrak{m}$, то x^{p^n} стремится к 1, когда n стремится к $+\infty$; это следует из формулы бинома.)

б) Показать, что $U_{\mathfrak{f}}$ есть множество элементов из U, образы которых в $A/\mathfrak{m}$ суть корни из единицы. (Использовать а).) Получить таким путем равенство $U = U_{\mathfrak{f}}$ для локально компактных K ($A/\mathfrak{m}$ тогда конечно).

4) Пусть $n \in \mathbf{N}^*$, p — простое число, G — множество матриц из $\mathbf{GL}(n, \mathbf{Z}_p)$ все коэффициенты которых сравнимы с соответствующими коэффициентами единичной матрицы по модулю p, если $p \neq 2$ (соотв. по модулю 4, если $p = 2$). Тогда G является открытой подгруппой в $\mathbf{GL}(n, \mathbf{Z}_p)$.

а) Показать, что G не имеет элементов конечного порядка $\neq 1$.

б) Показать, что всякая конечная подгруппа в $\mathbf{GL}(n, \mathbf{Z}_p)$ изоморфна некоторой подгруппе в $\mathbf{GL}(n, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$, если $p \neq 2$ (соотв. в $\mathbf{GL}(n, \mathbf{Z}/4\mathbf{Z})$, если $p = 2$).

¶ 5) а) Пусть Γ — компактная подгруппа в $G = \mathbf{GL}(n, \mathbf{Q}_p)$. Показать что существует сопряженная с Γ подгруппа, содержащаяся в $\mathbf{GL}(n, \mathbf{Z}_p)$. (Если T — некоторая решетка в $\mathbf{Q}_p^n$ относительно $\mathbf{Z}_p$ (*Комм. алг.*, гл. VII, § 4, определение 1), показать, что ее стабилизатор в Γ открыт в Γ, стало быть, имеет конечный индекс и $\sum_{\gamma \in \Gamma} \gamma T$ есть Γ-устойчивая решетка.

б) Вывести отсюда, что $G_{\mathfrak{f}}$ есть объединение подгрупп, сопряженных с $\mathbf{GL}(n, \mathbf{Z}_p)$.

в) Вывести отсюда, что порядок всякой конечной подгруппы Φ в $\mathbf{GL}(n, \mathbf{Q}_p)$ делит число $a_n(p)$, которое определяется формулами

$$a_n(p) = (p^n - 1)(p^n - p) \ldots (p^n - p^{n-1}), \quad \text{если} \quad p \neq 2,$$
$$a_n(p) = 2^{n^2}(2^n - 1)(2^n - 2) \ldots (2^n - 2^{n-1}), \quad \text{если} \quad p = 2.$$

(В силу а) можно предположить, что $\Phi \subset \mathbf{GL}(n, \mathbf{Z}_p)$. Применить тогда упражнение 4.)

г) Показать, что порядок всякой конечной подгруппы в $\mathbf{SL}(n, \mathbf{Q}_p)$ делит $s_n(p)$, где $s_n(p) = \dfrac{a_n(p)}{p-1}$ при $p \neq 2$ и $s_n(2) = \dfrac{a_n(2)}{2}$.

¶ 6) В этом упражнении через l обозначается простое число $\neq 2$. Если a — целое число $\neq 0$, то через $v_l(a)$ обозначается его l-адическое нормирование, т. е. наибольшее целое число e, такое, что $a \equiv 0 \pmod{l^e}$.

а) Пусть m — целое число $\geqslant 1$. Положим

$$\varepsilon(l, m) = \begin{cases} 0, & \text{если } m \not\equiv 0 \pmod{(l-1)}, \\ v_l\left(\dfrac{m}{l-1}\right) + 1, & \text{если } m \equiv 0 \pmod{(l-1)}. \end{cases}$$

Показать, что если x — целое число, взаимно простое с l, то

$$v_l(x^m - 1) \geqslant \varepsilon(l, m)$$

и что здесь имеет место равенство, если образ числа x в циклической группе $(\mathbf{Z}/l^2\mathbf{Z})^*$ порождает эту группу.

б) Пусть n — целое число $\geqslant 1$. Положим

$$r(l, n) = \sum_{m=1}^{n} \varepsilon(l, m).$$

Показать, что

$$r(l, n) = \left[\frac{n}{l-1}\right] + \left[\frac{n}{l(l-1)}\right] + \left[\frac{n}{l^2(l-1)}\right] + \ldots,$$

где символ $[\alpha]$ означает целую часть вещественного числа α. Показать, что если x — целое число, взаимно простое с l, то

$$v_l((x^n - 1)(x^{n-1} - 1) \ldots (x - 1)) \geqslant r(l, n)$$

и что здесь имеет место равенство, если образ числа x в $(\mathbf{Z}/l^2\mathbf{Z})^*$ порождает эту группу.

в) Показать, что в обозначениях упражнения 5в) $l^{r(l,n)}$ есть наибольшая степень числа l, делящая числа $a_n(p)$ для всех простых $p \neq l$ (или, что сводится к тому же, для всех достаточно больших p). (Применить б) с $x = p$, затем выбрать p так, чтобы его образ в $(\mathbf{Z}/l^2\mathbf{Z})^*$ был образующей этой группы (это возможно в силу теоремы об арифметической прогрессии) [1]).)

г) Пусть Γ — конечная подгруппа в $\mathbf{GL}(n, \mathbf{Q})$, и пусть l^e — наибольшая степень числа l, делящая порядок группы Γ. Показать, что $e \leqslant r(l, n)$. (Применить упражнение 5 для доказательства того, что l^e делит все $a_n(p)$, затем применить п. в).)

д) Обратно, показать, что существует конечная l-подгруппа $\Gamma_{l,n}$ в $\mathbf{GL}(n, \mathbf{Q})$, порядок которой есть $l^{r(l,n)}$. (Свести все к случаю, когда n имеет вид $l^a(l-1)$, где $a \geqslant 0$. Разложить $\mathbf{Q}^n$ в прямую сумму l^a экземпляров пространства $\mathbf{Q}^{l-1}$ и, пользуясь этим разложением, определить действие на $\mathbf{Q}^n$ полупрямого произведения $H_{l,n}$ симметрической группы $\mathfrak{S}_{l^a}$ и группы $(\mathbf{Z}/l\mathbf{Z})^{l^a}$. Взять в качестве $\Gamma_{l,n}$ силовскую l-подгруппу в $H_{l,n}$.)

Показать, что если n четно, то $\Gamma_{l,n}$ содержится в подгруппе, сопряженной с $\mathbf{Sp}(n, \mathbf{Z})$.

е) *Пусть Γ — конечная подгруппа в $\mathbf{GL}(n, \mathbf{Q})$, являющаяся l-группой. Показать, что Γ сопряжена с некоторой подгруппой в $\Gamma_{l,n}$. (Показать сначала с помощью редукции по подходящему модулю p, что редукция подгруппы Γ есть конечная подгруппа редукции некоторой сопряженной с $\Gamma_{l,n}$ подгруппы; затем воспользоваться характером представления группы Γ в $\mathbf{Q}^n$.) В частности, всякая подгруппа в $\mathbf{GL}(n, \mathbf{Q})$ порядка $l^{r(l,n)}$ сопряжена с $\Gamma_{l,n}$.*

¶ 7) В этом упражнении через $v_2(a)$ обозначается 2-адическое нормирование целого числа a.

---

[1]) По поводу доказательства этой теоремы см., например, статью A. Selberg, *Ann. of Math.*, **50** (1949), 297—304. (См. также З. И. Боревич и И. Р. Шафаревич, Теория чисел, «Наука», М., 1972, или А. Вейль, Основы теории чисел, „Мир", М., 1972. — *Ред.*)

а) Пусть Γ — конечная подгруппа в $\mathbf{GL}(n, \mathbf{Q})$. Показать, что существует невырожденная положительно определенная квадратичная форма с коэффициентами в $\mathbf{Z}$, инвариантная относительно Γ. Вывести отсюда (тем же способом, что в предложениях 4 и 5), что если p достаточно велико, Γ изоморфна некоторой подгруппе ортогональной группы $\mathbf{O}(n)$ над полем $\mathbf{F}_p$ (соотв. подгруппе группы $\mathbf{SO}(n)$, если Γ содержится в $\mathbf{SL}(n, \mathbf{Q})$).

б) Предположим, что Γ содержится в $\mathbf{SL}(n, \mathbf{Q})$, и обозначим через 2^e наибольшую степень числа 2, делящую порядок группы Γ. Показать, что если n нечетно, то 2^e делит числа

$$b_n(p) = (p^{n-1} - 1)(p^{n-3} - 1) \dots (p^2 - 1)$$

для всех достаточно больших простых p. (Использовать а), а также упражнение 13 в *Алг.*, гл. IX, § 6.)

Показать, что если n четно, а p просто и достаточно велико, то 2^e делит наименьшее общее кратное $b_n(p)$ чисел

$$(p^n - 1)(p^{n-2} - 1) \dots (p^2 - 1)/(p^{n/2} + 1)$$

и

$$(p^n - 1)(p^{n-2} - 1) \dots (p^2 - 1)/(p^{n/2} - 1).$$

(Тот же метод, что для нечетного n.)

в) В предположениях п. б) положим

$$r(2, n) = n + \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \dots = n + v_2(n!).$$

Пусть A — целое число $\geqslant 3$. Показать, что $2^{r(2, n)-1}$ есть наибольшая степень двойки, делящая числа $b_n(p)$ при $p \geqslant A$. (Тот же метод [1]), что в упражнении 6; воспользоваться существованием простого $p \geqslant A$, такого, что $p \equiv 5 \pmod 8$.) Вывести отсюда неравенство $e \leqslant r(2, n) - 1$.

г) Обратно, пусть C_n — подгруппа в $\mathbf{GL}(n, \mathbf{Z})$, порожденная матрицами перестановок базисных векторов, а также диагональными матрицами с коэффициентами ± 1. Порядок группы C_n равен $2^n n!$ и $v_2(2^n n!) = r(2, n)$. Вывести отсюда, что порядок группы $\Gamma_{2, n}$, определяемой как пересечение некоторой силовской 2-подгруппы в C_n с $\mathbf{SL}(n, \mathbf{Z})$, равен $2^{r(2, n)-1}$.

8) Пусть n — целое число $\geqslant 1$. Положим

$$M(n) = \prod_l l^{r(l, n)},$$

где произведение распространяется на все простые числа l, а числа $r(l, n)$ определены в упражнениях 6 и 7.

Тогда $M(1) = 2$, $M(2) = 2^3 \cdot 3 = 24$, $M(3) = 2^4 \cdot 3 = 48$, $M(4) = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 = 5760$.

Вывести из упражнений 6 и 7, что наименьшее общее кратное порядков конечных подгрупп в $\mathbf{GL}(n, \mathbf{Q})$ (или в $\mathbf{GL}(n, \mathbf{Z})$, что сводится к тому же) равно $M(n)$. Сделать то же для $\mathbf{SL}(n, \mathbf{Q})$, заменив $M(n)$ на $\frac{1}{2} M(n)$.

---

[1]) Подробности, связанные с этим и предыдущим упражнениями, см. в книгах H. Minkowski, Gesamm. Abh., Leipzig-Berlin, Teubner, 1911 (Bd. I, S. 212—218), и W. Burnside, Theory of groups of finite order (2nd ed.), Cambridge Univ. Press, 1911, p. 479—484.

9) Предположим, что K локально компактно. Пусть $G = \mathbf{GL}(n, K)$. Пусть G_1 — множество элементов $g \in G$, оставляющих устойчивой некоторую решетку в K^n относительно A. Пусть G_2 — множество элементов $g \in G$, порождающих относительно компактные подгруппы в G. Пусть G_3 — множество элементов $g \in G$, собственные значения которых в алгебраическом замыкании поля K равны по абсолютной величине 1. Тогда $G_1 = G_2 = G_3 = G_{\mathfrak{f}}$. (Использовать рассуждение из упражнения 5а).)

10) Предположим, что K локально компактно. Пусть G — стандартная группа размерности n над K и μ — мера Хаара на аддитивной группе K^n. Показать, что $\mu \mid G$ есть одновременно левая и правая мера Хаара на G. (Использовать то, что G есть проективный предел групп $G(\mathfrak{a}_\lambda)$, а также *Интегр.*, гл. VII, § 1, предложение 7.)

§ 8

1) Отображение $z \longmapsto \bar{z}$ из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}$ есть непрерывный, но не аналитический автоморфизм комплексной группы Ли $\mathbf{C}$.

2) Пусть G — гильбертово пространство последовательностей $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ вещественных чисел, таких, что $\sum_i \lambda_i^2 < +\infty$. Рассмотрим G как вещественную группу Ли. Пусть G_n — множество последовательностей $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots) \in G$, таких, что $\lambda_m \in \frac{1}{m}\mathbf{Z}$ при $1 \leqslant m \leqslant n$. Группы G_n суть замкнутые подгруппы Ли в G и, стало быть, $H = \bigcap_n G_n$ есть замкнутая подгруппа в G. Но эта подгруппа вполне разрывна и не дискретна, а потому она не является подгруппой Ли в G.

¶ 3) В $\mathbf{Q}_p \times \mathbf{Q}_p$ всякое замкнутое подмножество может быть определено некоторым семейством аналитических уравнений. Вывести отсюда, что следствие 2 (ii) теоремы 2 становится неверным, если опустить предположение о конечности I.

¶ 4) Пусть G — вещественная конечномерная группа Ли, A — подгруппа в G. Скажем, что элемент x из $L(G)$ является A-допустимым, если для всякой окрестности U элемента e существует такое непрерывное отображение α из $[0, 1]$ в A, что $\alpha(0) = e$ и $\alpha(t) \in \exp(tx)$. U при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Пусть $\mathfrak{h}$ — множество A-допустимых элементов из $L(G)$.

а) Показать, что $\mathfrak{h}$ есть подалгебра Ли в $L(G)$. (Использовать упражнение 19 § 6.)

б) Пусть H — такая интегральная подгруппа в G, что $L(H) = \mathfrak{h}$. Показать, что $H \subset A$. (Пусть $I = [-1, 1]$, $(x_1, \ldots, x_r)$ — базис в $\mathfrak{h}$ и $\mathbf{R}^r$ наделено евклидовой нормой. Построить непрерывные отображения $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ из I в A и непрерывные отображения $f_1, \ldots, f_r$ из I^r в $\mathbf{R}$, такие, что для всякого $t = (t_1, \ldots, t_r) \in I^r$

$$\alpha_1(t_1) \ldots \alpha_r(t_r) = \exp(f_1(t)\, x_1) \ldots \exp(f_r(t)\, x_r),$$

$$\| t - (f_1(t), \ldots, f_r(t)) \| \leqslant \frac{1}{2}.$$

Применить затем следующую теорему: пусть f — непрерывное отображение из I^r в $\mathbf{R}^r$, такое, что $\| f(x) - x \| \leqslant 1/2$ для всякого $x \in I^r$; тогда $f(I^r)$ содержит некоторую окрестность точки 0 в $\mathbf{R}^r$ [1]).

---

[1]) Это следует из теоремы Брауэра о неподвижной точке, которую можно найти в книге Н. Данфорда и Дж. Г. Шварца, Линейные операторы, ч. I, «Мир», М., 1962, стр. 506.

в) Вывести отсюда, что $\mathfrak{h}$ есть касательная подалгебра к A в e.

г) Показать, что если A линейно связна, то $A = H$[1]).

¶ 5) Пусть G — отделимая топологическая группа, H — замкнутая подгруппа в G, π — каноническое отображение из G на G/H. Предположим, что H есть конечномерная вещественная группа Ли. Существуют окрестность U точки $\pi(e)$ в G/H и непрерывное отображение σ из U в G, такие, что $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_U$. (Пусть ρ — линейное аналитическое представление группы H в $\mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$, являющееся локально гомеоморфизмом (§ 6, следствие теоремы 1). Пусть f — непрерывная функция $\geqslant 0$ на G, равная 1 в e и обращающаяся в 0 вне некоторой достаточно малой окрестности V элемента e. Пусть ds — левая мера Хаара на H. Для $x \in G$ положим $g(x) = \int f(xs)\rho(s)^{-1}\,ds \in \mathbf{M}_n(\mathbf{R})$. Тогда $g(xt) = g(x)\rho(t)$ для $x \in G$ и $t \in H$. Если V достаточно мала, то $g(x) \in \mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$, коль скоро x достаточно близок к e. Наконец, использовать то, что доказываемая теорема справедлива локально для $\mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$ и $\rho(H)$.)

6) Пусть G — группа класса C^r (§ 5, упражнение 1), причем $r \geqslant 2$. На G существует одна и только одна такая структура S вещественной группы Ли, что структура многообразия класса C^r, лежащая ниже S, есть данная структура. (Единственность структуры S вытекает из следствия 1 теоремы 1. Пусть $L(G)$ — нормируемая алгебра Ли, ассоциированная с G согласно упражнению 2 § 5. Существуют вещественная групускула Ли G' и изоморфизм h из $L(G')$ на $L(G)$ (§ 4, теорема 3). Как в § 4, n° 1, проверяется, что существуют открытая симметричная окрестность G'' элемента $e_{G'}$ в G' и отображение φ класса C^r из G'' в G, такое, что $T_e(\varphi) = h$ и $\varphi(g_1 g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)$ для g_1, g_2 из G''. Уменьшив G'', можно считать, что $V = \varphi(G'')$ открыта в G и что φ есть изоморфизм класса C^r многообразия G'' на многообразие V. Стало быть, на V существует такая структура вещественной групускулы Ли, что нижележащая структура многообразия класса C^r есть данная структура. Для всякого $g \in G$, $\mathrm{Int}\, g$ определяет аналитическое отображение из $V \cap (g^{-1}Vg)$ на $(gVg^{-1}) \cap V$ (теорема 1). В силу предложения 18 § 1 на G существует структура S вещественной группы Ли, индуцирующая на некоторой открытой окрестности элемента e ту же аналитическую структуру, что и V. Используя сдвиги, получаем, что структура многообразия класса C^r на G, лежащая ниже S, есть данная структура.)

7) Пусть G — вещественная группа Ли, H — замкнутая подгруппа в G.

а) Пусть $\mathfrak{h}$ — множество таких $x \in L(G)$, что $\exp(tx) \in H$ для всякого $t \in \mathbf{R}$. Тогда $\mathfrak{h}$ есть подалгебра Ли в $L(G)$. (Использовать предложение 8 § 6.)

б) Предположим, что H локально компактна. Показать, что H есть подгруппа Ли в G. (Показать сначала, что $\mathfrak{h}$ конечномерна, доказав существование в $\mathfrak{h}$ предкомпактной окрестности элемента 0. Скопировать затем доказательство теоремы 2, выбрав V_2 так, чтобы $(\exp V_2) \cap H$ было относительно компактным.)

§ 9

1) Пусть $G = \mathbf{SO}(3, \mathbf{R})$. Пусть Δ_1, Δ_2 — две ортогональные прямые в $\mathbf{R}^3$, H_i — подгруппа в G, образованная вращениями вокруг Δ_i $(i = 1, 2)$. Тогда $[L(H_1), L(H_2)]$ есть подалгебра Ли в $L(G)$ размерности 1, отличная от касательной подалгебры Ли к (H_1, H_2) в e.

2) Предположим, что K ультраметрично. Пусть G — конечномерная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, A — конечное подмножество в G. Тогда $Z_G(A)$

---

[1]) Подробности см. в статье M. Goto, On an arcwise connected subgroup of a Lie group, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **20** (1969), 157—162.

есть подгруппа Ли в G с алгеброй Ли $\mathfrak{z}_{\mathfrak{g}}(A)$. (Рассуждать так же, как при доказательстве предложения 8.)

3) Пусть G — вещественная или комплексная связная группа Ли. Центр Z группы G есть квазиподгруппа Ли в G и $L(Z)$ есть центр алгебры Ли $L(G)$.

4) Предположим, что поле K ультраметрическое и $p > 0$ (в обозначениях § 7). Пусть G — конечномерная группа Ли, A — некоторая группа автоморфизмов группы Ли G, B — соответствующая группа автоморфизмов алгебры Ли $L(G)$. Пусть G^A (соотв. $L(G)^B$) — множество элементов из G (соотв. $L(G)$), неподвижных относительно A (соотв. B). Тогда G^A есть подгруппа Ли в G с алгеброй Ли $L(G)^B$. (Использовать логарифмическое отображение.)

5) Пусть G — вещественная или комплексная связная конечномерная группа Ли. Пусть $(G_0, G_1, \ldots)$ — верхний центральный ряд группы G (гл. II, § 4, упражнение 18) и $(\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_1, \ldots)$ — верхний центральный ряд алгебры Ли $L(G)$ (гл. I, § 1, n° 6). Тогда для всякого i группа G_i есть подгруппа Ли в G, причем $L(G_i) = \mathfrak{g}_i$.

6) Пусть Γ — вещественная нильпотентная односвязная группа Ли размерности 3, определенная в упражнении 5б) § 4. Пусть $\alpha \in \mathbf{R}$ — иррациональное число и P — дискретная подгруппа в $\Gamma \times \mathbf{R}$, образованная элементами $((0, 0, x), \alpha x)$, где $x \in \mathbf{Z}$. Пусть $G = (\Gamma \times \mathbf{R})/P$. Показать, что (G, G) не замкнута в G.

7) а) Пусть G — вещественная связная полупростая группа Ли, Z — ее центр, ρ — линейное непрерывное представление группы G в комплексном векторном пространстве конечной размерности. Существует такое целое число p, что если $z \in Z$, то $\rho(z)$ диагонализуем и все его собственные значения суть корни p-й степени из единицы. (Можно считать ρ неприводимым. Тогда $\rho(z)$ скалярен по лемме Шура. С другой стороны, $\det \rho(g) = 1$ для всякого $g \in G$, поскольку $G = \mathscr{D}G$.)

б) Вывести отсюда, что если G обладает линейным непрерывным конечномерным представлением, которое инъективно, то Z конечен.

¶ 8) Пусть G — вещественная связная конечномерная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, $\mathfrak{n}$ — наибольший нильпотентный идеал в $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + \mathfrak{n}$.

а) $\mathfrak{h}$ есть характеристический идеал в $\mathfrak{g}$; радикал алгебры Ли $\mathfrak{h}$ есть $\mathfrak{n}$; для всякого $x \in \mathfrak{h}$ имеем $\operatorname{Tr} \operatorname{ad}_{\mathfrak{h}} x = 0$; если $\mathfrak{l}$ — произвольная подалгебра Леви в $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{h} = \mathfrak{l} + \mathfrak{n}$.

б) Предположим, что G односвязна. Пусть Z — ее центр, H — подгруппа Ли в G с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$, φ — канонический морфизм из G на G/H. Тогда $\varphi(Z)$ дискретна в G/H. (Группа G есть полупрямое произведение полупростой подгруппы Леви S на радикал R. Пусть $z \in Z$. Тогда $z = y^{-1}x$, где $x \in R$ и y принадлежит центру группы S. Существует целое число p, такое, что собственные значения линейного преобразования $\operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}} y$, а, стало быть, и линейного преобразования $\operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}} x$, суть корни p-й степени из единицы (упражнение 7). Вывести отсюда, что если N — подгруппа Ли в G с алгеброй Ли $\mathfrak{n}$, то существует окрестность U элемента e в R, такая, что $U = UN = NU$, $Z \cap (SU) \subset SN = H$.)

в) Не будем считать больше G односвязной. Пусть H — интегральная подгруппа в G с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$. Показать, что H есть подгруппа Ли в G, которая нормальна, унимодулярна, имеет нильпотентный радикал и G/H коммутативна. (Использовать а) и б).)

г) Вывести отсюда, что если (G, G) плотна в G, то радикал группы G нильпотентен.

9) Пусть G — универсальная накрывающая группы $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$. Отождествим с $\mathbf{Z}$ ядро канонического морфизма $G \to \mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$(§ 6, упражнение 2). Пусть a — такой элемент из $\mathbf{T}^n$, что порожденная им подгруппа всюду плотна в $\mathbf{T}^n$ (*Общ. топ.*, 1969, гл. VII, § 1, следствие 2 предложения 7). Пусть D — дискретная подгруппа в $G \times \mathbf{T}^n$, порожденная элементом $(1, a)$. Пусть $H = (G \times \mathbf{T}^n)/D$. Тогда $L(H) = \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \times \mathbf{R}^n$ и интегральная подгруппа H' в H с алгеброй Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ изоморфна G и плотна в H. Имеем $D^n H' = H'$ для всякого $n \geqslant 0$.

¶ 10) Пусть G — вещественная или комплексная конечномерная группа Ли. Пусть

$$p = \dim [L(G), L(G)].$$

Наделим (G, G) структурой интегральной подгруппы в G. Существует такая окрестность V элемента e в (G, G), что всякий элемент из V есть произведение p коммутаторов элементов из G. (Пусть $x_1, y_1, \ldots, x_p, y_p$ — такие элементы из $L(G)$, что $[x_i, y_i]$ образуют базис в $[L(G), L(G)]$. Положить для s, t из $\mathbf{R}$

$$\rho_i(s, t) = (\exp sy_i)^{-1} (\exp tx_i)^{-1} (\exp sy_i)(\exp tx_i).$$

Применить теорему о неявных функциях к отображению

$$(s_1, t_1, \ldots, s_p, t_p) \longmapsto \rho_1(s_1, t_1) \ldots \rho_p(s_p, t_p)$$

из $\mathbf{R}^{2p}$ в (G, G).)

11) Пусть G — полупрямое произведение группы $B = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ на K, отвечающее автоморфизму $x \longmapsto -x$ группы Ли K. Тогда $L(K)$ есть идеал в $L(G)$ и $L(B) = \{0\}$, но $(K, B) = K$.

12) Пусть (e_1, e_2, e_3) — канонический базис в K^3. Рассмотрим на K^3 такую структуру нильпотентной алгебры Ли, что $[e_1, e_2] = e_3$, $[e_1, e_3] = [e_2, e_3] = 0$. Относительно ассоциированного группового закона на K^3 (n° 5) имеем

$$(x, y, z)(x', y', z') = \left(x + x', y + y', z + z' + \frac{1}{2}(xy' - yx')\right).$$

Отображение

$$(\lambda, \mu, \nu) \longmapsto (\exp \lambda e_1)(\exp \mu e_2)(\exp \nu (e_1 + e_3))$$

из K^3 в G ни сюръективно (показать, что $(0, 1, 1)$ не лежит в его образе), ни инъективно (показать, что $(0, 1, 0)$ и $(1, 1, -1)$ имеют один и тот же образ).

13) а) Определим умножение в $\mathbf{R}^3$ следующим образом:

$$(x, y, z) . (x', y', z') = (x + x' \cos z - y' \sin z,\ y + x' \sin z + y' \cos z,\ z + z').$$

Показать, что мы получаем при этом вещественную разрешимую группу Ли G, такую, что $DG = \mathbf{R}^2 \times \{0\}$. Центр Z группы G есть $\{0\} \times \{0\} \times 2\pi\mathbf{Z}$.

б) Для $(x, y, z) \in G$ пусть $\pi(x, y, z)$ — отображение

$$(\lambda, \mu) \longmapsto (\lambda \cos z - \mu \sin z + x,\ \lambda \sin z + \mu \cos z + y)$$

из $\mathbf{R}^2$ в $\mathbf{R}^2$. Показать, что π есть морфизм из G на подгруппу Ли G' в аффинной группе пространства $\mathbf{R}^2$, порожденную переносами и вращениями в $\mathbf{R}^2$. Показать, что $\operatorname{Ker} \pi = Z$.

в) Отождествим канонически $L(G) = T_{(0, 0, 0)}G$ с $\mathbf{R}^3$. Пусть (e_1, e_2, e_3) — канонический базис в $\mathbf{R}^3$. Показать, что $[e_1, e_2] = 0$, $[e_3, e_1] = e_2$, $[e_3, e_2] = -e_1$.

г) Показать, что для $c \neq 0$

$$\exp_G(a, b, c) = \left(\frac{1}{c}(a \sin c + b \cos c - b),\ \frac{1}{c}(-a \cos c + b \sin c + a),\ c\right).$$

Вывести отсюда, что $Z \subset \exp(\mathbf{R}u)$ для всякого $u \in L(G)$. Показать, что отображение $\exp_G\colon L(G) \to G$ не является ни инъективным, ни сюръективным.

14) а) Пусть $G = \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$. Показать, что отображение $\exp_G$ сюръективно. (Использовать голоморфное функциональное исчисление в *Спектр. теор.*, гл. I, § 4, n° 8.)

б) Пусть $G' = \mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$. Показать, что если $\sigma \in \mathbf{C}^*$, то элемент $\begin{pmatrix} -1 & \sigma \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ из G' не лежит в образе отображения $\exp_{G'}$.

15) а) Пусть $x \in \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ и $\Delta = \det x$. Показать, что

$$e^x = \begin{cases} \operatorname{ch}\sqrt{-\Delta}\,.\,I + \dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{-\Delta}}{\sqrt{-\Delta}}\cdot x, & \text{если } \Delta < 0, \\[2ex] \cos\sqrt{\Delta}\,.\,I + \dfrac{\sin\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}}\cdot x, & \text{если } \Delta > 0. \end{cases}$$

б) Пусть $H = \mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$. Показать, что $g = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \in H$ лежит в образе отображения $\exp_H$ тогда и только тогда, когда $\lambda > 0$ или $\lambda = -1$. Если $\lambda > 0$, то все однопараметрические подгруппы, содержащие g, совпадают.

16) Пусть G — конечномерная группа Ли. Показать, что существует базис $(x_1, \ldots, x_n)$ в $L(G)$, такой, что $\exp(\mathbf{R}x_i)$ есть подгруппа Ли в G для всякого i. (Использовать *Спектр. теор.*, гл. II, § 2, лемма 1.)

¶ 17) а) Обозначим через $\mathfrak{c}$ разрешимую вещественную алгебру Ли, допускающую такой базис (a, b, c), что $[a, b] = c$, $[a, c] = -b$, $[b, c] = 0$. Обозначим через $\mathfrak{d}$ разрешимую вещественную алгебру Ли, допускающую такой базис (a, b, c, d), что $[a, b] = c$, $[a, c] = -b$, $[b, c] = d$, $[a, d] = [b, d] = [c, d] = 0$. Пусть $\mathfrak{g}$ — некоторая разрешимая алгебра Ли. Если $\mathfrak{g}$ содержит ненулевые элементы x, y, z, такие, что $[x, y] = z$ и $[x, z] = -y$, то $\mathfrak{g}$ содержит тогда подалгебру, которая изоморфна $\mathfrak{c}$ или $\mathfrak{d}$. (Положим $a_1 = y$, $b_1 = z$, $c_1 = [y, z]$; определим рекуррентно a_i, b_i, c_i условиями $a_i = [a_{i-1}, c_{i-1}]$, $b_i = [b_{i-1}, c_{i-1}]$, $c_i = [a_i, b_i]$. Рассмотреть наименьшее целое число k, такое, что $c_k = 0$.)

б) Пусть $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{g}^*$ — разрешимые вещественные алгебры Ли и φ — гомоморфизм из $\mathfrak{g}$ на $\mathfrak{g}^*$. Если $\mathfrak{g}^*$ содержит подалгебру, изоморфную $\mathfrak{c}$ или $\mathfrak{d}$, то $\mathfrak{g}$ обладает тем же свойством.

в) Пусть $\mathfrak{h}$ — разрешимая комплексная алгебра Ли. Рассмотрим некоторый ряд Жордана — Гёльдера для присоединенного представления алгебры Ли $\mathfrak{h}$; факторы этого ряда определяют одномерные представления алгебры Ли $\mathfrak{h}$ и, стало быть, линейные формы на $\mathfrak{h}$. Эти линейные формы, которые зависят только от $\mathfrak{h}$, называются *корнями* алгебры Ли $\mathfrak{h}$. Если $\mathfrak{h}'$ — разрешимая вещественная алгебра Ли, то корнями называются ограничения на $\mathfrak{h}'$ корней алгебры Ли $\mathfrak{h}' \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$.

Пусть теперь G — вещественная разрешимая односвязная конечномерная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Показать, что следующие условия эквивалентны: α) $\exp_G$ инъективно; β) $\exp_G$ сюръективно; γ) $\exp_G$ биективно; δ) $\exp_G$ есть изоморфизм аналитического многообразия $L(G)$ на аналитическое мно-

гообразие G; ε) $L(G)$ не содержит никакой подалгебры, изоморфной $\mathfrak{c}$ или $\mathfrak{d}$; ζ) не существует факторалгебры алгебры $L(G)$, которая содержала бы подалгебру, изоморфную $\mathfrak{c}$; η) всякий корень алгебры Ли $\mathfrak{g}$ имеет вид $\varphi + i\varphi'$, где φ, φ' принадлежат $\mathfrak{g}^*$ и форма φ' пропорциональна форме φ; θ) для всякого $x \in \mathfrak{g}$ единственное чисто мнимое собственное значение (в $\mathbf{C}$) оператора $\operatorname{ad} x$ есть 0 [1]).

18) Пусть G — вещественная связная группа Ли, Z — ее центр, Z_0 — компонента единицы группы Z, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли группы G, $\mathfrak{z}$ — центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Тогда Z и Z_0 суть квазиподгруппы Ли в G с алгеброй Ли $\mathfrak{z}$ (упражнение 3). Назовем допустимой нормой на $\mathfrak{g}$ норму, определяющую топологию алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и превращающую $\mathfrak{g}$ в нормированную алгебру Ли.

а) Каковы бы ни были $r > 0$ и $z \in \mathfrak{z}$, существует допустимая норма на $\mathfrak{g}$, значение которой в z строго меньше r. (Пусть q — некоторая допустимая норма на $\mathfrak{g}$. Показать, что при подходящем выборе числа $\lambda > 0$ функция $x \longmapsto \|x\| = \lambda q(x) + \inf\limits_{y \in \mathfrak{z}} q(x + y)$ обладает требуемыми свойствами.)

б) Показать, что следующие условия эквивалентны:

(i) Z_0 односвязна;

(ii) какова бы ни была допустимая норма на $\mathfrak{g}$, ограничение отображения $\exp_G$ на открытый шар с центром в 0 радиуса π инъективно;

(iii) существует такое $r > 0$, что, какова бы ни была допустимая норма на $\mathfrak{g}$, ограничение отображения $\exp_G$ на открытый шар радиуса r с центром в 0 инъективно.

(Для проверки импликации (iii)$\Rightarrow$(i) использовать а). Для проверки импликации (i)$\Rightarrow$(ii) предположим, что x, y лежат в $\mathfrak{g}$, $\|x\| < \pi$, $\|y\| < \pi$, $x \neq y$, $\exp_G x = \exp_G y$. Тогда $\exp \operatorname{ad} x = \exp \operatorname{ad} y$ и, стало быть $\operatorname{ad} x = \operatorname{ad} y$ в силу предложения 17 § 6, примененного к комплексификации пространства $\mathfrak{g}$. Значит, существует ненулевой $z \in \mathfrak{z}$, такой, что $\exp_G z = e$; отсюда следует, что (i) не имеет места.)

в) Рассмотрев группу G' из упражнения 13б), показать, что заключение п. б) теряет силу, если π заменено каким-либо числом $> \pi$. (В обозначениях упражнения 13 использовать норму $ae_1 + be_2 + ce_3 \longmapsto (a^2 + b^2 + c^2)^{1/2}$ на $L(G')$.)

19) Пусть G — локально компактная группа, H — замкнутая нормальная подгруппа в G. Предположим, что H есть разрешимая односвязная конечномерная группа Ли и что G/H компактно. Показать, что существует компактная подгруппа L в G, такая, что G есть полупрямое произведение группы L на H. (Провести индукцию по $\dim H$. Рассмотреть последнюю нетривиальную производную группу группы H и использовать *Интегр.*, гл. VII, § 3, предложение 3.)

20) Пусть G — вещественная связная разрешимая конечномерная группа Ли. Введем обозначения S, S', F, σ из § 6, n° 10, доказательство предложения 20.

а) Используя предложение 21, показать, что σ есть изоморфизм из S на некоторую подгруппу Ли вещественной группы Ли, лежащей ниже S'.

б) Вывести отсюда, что универсальная комплексификация $\widetilde{G}$ группы G отождествляется с $S'/\sigma(F)$ и что каноническое отображение из G в $\widetilde{G}$ есть изоморфизм из G на некоторую подгруппу Ли вещественной группы Ли, лежащей ниже $\widetilde{G}$.

---

[1]) Подробности см. в статье M. Saito, Sur certains groupes de Lie résolubles, Sci. Papers of the College of General Education, Univ. of Tokyo, 7 (1957), 1 — 11, 157—168.

¶ 21) а) Пусть G — вещественная разрешимая односвязная группа Ли со следующими свойствами: α) $L(G)$ имеет размерность n и существует коммутативный идеал размерности $n-1$, отвечающий некоторой подгруппе A в G; β) существует элемент σ из центра группы G, не принадлежащей подгруппе A. Показать, что существует такой элемент $x \in L(G)$, что $\exp x = \sigma$. Показать, что $L(G)$ есть произведение некоторого коммутативного идеала и некоторого идеала, допускающего базис $(x, a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k)$, такой, что $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k$ лежат в $L(A)$, $[x, a_i] = 2\pi n_i b_i$, $[x, b_i] = -2\pi n_i a_i$ ($n_i \in \mathbf{Z} - \{0\}$ для всякого i). Обобщить на G результаты упражнения 13 г).

б) Пусть G — вещественная разрешимая односвязная конечномерная группа Ли. Пусть D — некоторая дискретная подгруппа центра группы G. Существуют базис $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в $L(G)$ и целое число $r \leqslant n$ со следующими свойствами: α) всякий элемент из G единственным образом записывается в виде $(\exp t_1x_1) \ldots (\exp t_nx_n)$, где $t_1, \ldots, t_n$ лежат в $\mathbf{R}$; β) элементы $x_1, \ldots, x_r$ попарно перестановочны и $(\exp x_1, \ldots, \exp x_r)$ есть базис коммутативной группы D. (Провести индукцию по размерности группы G. Пусть $\mathfrak{a}$ — максимальный коммутативный идеал в $L(G)$ и A — соответствующая интегральная подгруппа. Тогда A замкнута в G и DA/A есть дискретная подгруппа центра группы G/A, к которой можно применить предположение индукции; это дает элементы $\overset{*}{x}_1, \ldots, \overset{*}{x}_m$ в $L(G/A)$ и целое число s. Для $1 \leqslant i \leqslant s$ пусть σ_i — некоторый элемент из D, класс смежности которого по модулю A есть $\exp \overset{*}{x}_i$. Используя а), последовательно построить представители $x_1, \ldots, x_m$ элементов $\overset{*}{x}_1, \ldots, \overset{*}{x}_m$, такие, что $\exp x_i = \sigma_i$ и $[x_i, x_j] = 0$ при $1 \leqslant i, j \leqslant s$.) [1])

в) Вывести из б), что всякая вещественная разрешимая связная конечномерная группа Ли гомеоморфна пространству $\mathbf{R}^n \times \mathbf{T}^m$ (m, n — целые числа $\geqslant 0$).

22) Пусть G — вещественная связная конечномерная группа Ли, такая, что $L(G)$ редуктивна. Имеем $G = (V \times S)/N$, где V — аддитивная группа некоторого вещественного векторного пространства конечной размерности, S — некоторая вещественная полупростая связная группа Ли и N — некоторая центральная дискретная подгруппа в $V \times S$. Тогда группа $G/\overline{D^1G}$ изоморфна $V/\overline{\mathrm{pr}_1 N}$. Стало быть, $G/\overline{D^1G}$ компактна тогда и только тогда, когда $\mathrm{pr}_1 N$ порождает векторное пространство V.

23) а) Пусть G — вещественная коммутативная конечномерная группа Ли с конечным числом связных компонент. Для компактности G необходимо и достаточно, чтобы всякое линейное аналитическое конечномерное представление группы G в комплексном векторном пространстве было полупросто. (Использовать доказательство предложения 32.)

б) Пусть G — комплексная коммутативная конечномерная группа Ли с конечным числом связных компонент и N — ядро отображения $\exp_G$. Для того чтобы N порождало над $\mathbf{C}$ векторное пространство $L(G)$, необходимо и достаточно, чтобы всякое линейное аналитическое конечномерное представление группы G было полупросто. (Использовать а), лемму 1 и предложение 33.)

24) Группа Ли $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$ связна и почти проста, но $\{I, -I\}$ является коммутативной нормальной подгруппой в $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$.

25) Пусть G — вещественная или комплексная односвязная почти простая группа Ли. Пусть A — нормальная подгруппа в G. Если $A \neq G$, то A

---

[1]) Подробности см. в статье C. Chevalley, Topological structure of solvable groups, *Ann. of Math.*, **42** (1941), 668—675.

дискретна и центральна. (Использовать упражнение 8 § 4.) Следовательно, факторгруппа группы G по ее центру как абстрактная группа проста.

¶ 26) Пусть G — вещественная связная конечномерная группа Ли. Предположим, что G обладает линейным непрерывным конечномерным представлением ρ, которое инъективно. Тогда (G, G) замкнуто в G. (Пусть R — радикал группы G, S — некоторая максимальная полупростая интегральная подгруппа в G. С помощью упражнения 7б) свести все к случаю, когда G есть полупрямое произведение подгруппы S на R. В силу предложения 6 гл. I, § 6, ρ унипотентно в (G, R). Стало быть, $\rho((G, R))$ замкнута в линейной группе и, следовательно, (G, R) замкнута в G.)

¶ 27) Пусть G — вещественная односвязная разрешимая конечномерная группа Ли, N — наибольшая связная нормальная нильпотентная подгруппа в G. Тогда G допускает инъективное линейное непрерывное конечномерное представление, ограничение которого на N унипотентно. (Провести индукцию по размерности группы G. Использовать предложение 20, а также гл. I, § 7 теорема 1.) [1])

¶ 28) а) Пусть k — поле характеристики 0, L — алгебра Ли размерности n над k, L_1 — ее подалгебра размерности $n-1$, не содержащая никакого ненулевого идеала алгебры Ли L и a_0 — элемент из L, не принадлежащий L_1. Для $i=2, 3, \ldots$ определим последовательно подпространства L_i из условий, что L_i есть множество таких $x \in L_{i-1}$, что $[x, a_0] \in L_{i-1}$. Положим $L_i = L$ при $i \leqslant 0$. Показать, что $[L_i, L_j] \subset L_{i+j-1}$ (применить индукцию по $i+j$), затем, что L_i есть подалгебра в L коразмерности i при $0 \leqslant i \leqslant n$ (применить индукцию по i).

б) При $0 < i < n$ выберем в L_i элемент a_i, не принадлежащий L_{i+1}, так что $[a_0, a_i] \equiv i a_{i-1} \pmod{L_i}$. Показать с помощью индукции по парам (i, j), упорядоченным лексикографически, что если $0 \leqslant i < j < n$, то $i+j-1 < n$ и

$$[a_i, a_j] \equiv (j-i)\, a_{i+j-1} \pmod{L_{i+j}}.$$

в) Вывести отсюда, что либо L имеет размерность 1, либо L не коммутативна и имеет размерность 2, либо L изоморфна $\mathfrak{sl}(2, k)$.

г) Пусть A — вещественная конечномерная алгебра Ли. Подалгебра B в A называется продолжимой, если существует такая подалгебра $B_1 \supset B$, что $\dim B_1 = \dim B + 1$. Обозначим через $R'(A)$ пересечение всех непродолжимых подалгебр в A. Обозначим через $R(A)$ наибольший идеал в A, который, как A-модуль, допускает композиционный ряд, все факторы которого имеют размерность 1.

Показать, что $R'(A)$ есть характеристический идеал в A. (Заметить, что $R'(A)$ устойчив относительно $\mathrm{Aut}(A)$.)

д) Показать, что $R' A \supset R(A)$ и что $R'(A/R(A)) = R'(A)/R(A)$.

е) Показать, что если B — некоторая подалгебра в A, то $R'(B) \supset R'(A) \cap B$.

ж) Если A разрешима, то $R'(A) = R(A)$. (В силу д) можно предположить, что $R(A) = \{0\}$. Допустим, что $R'(A) \neq \{0\}$. В силу г) существует минимальный ненулевой идеал I алгебры A, содержащийся в $R'(A)$. Используя е) и гл. I, § 5, следствие 1 теоремы 1, показать, что $\dim I = 1$, и мы получим противоречие.)

з) Пусть P — радикал в $R'(A)$, B — полупростая алгебра в A, $C = P + B$ (это подалгебра в A в силу г)). Используя ж), показать, что $\mathrm{ad}_P B$ приводится к треугольной форме в подходящем базисе алгебры P. Заключить отсюда, что $[P, B] = \{0\}$.

---

[1]) Подробности, касающиеся инъективных линейных представлений группы Ли, см. в книге G. Hochschild, The structure of Lie groups, Holden-Day, 1965.

и) $R(A)$ есть радикал алгебры $R'(A)$ (Использовать д), е), ж), з) и разложение Леви алгебры A.) Пусть $R'(A) = R(A) \oplus T$ — разложение Леви $R'(A)$. В силу з) $R'(A) = R(A) \times T$. Имеем $R(T) = \{0\}$. Применяя в) к простым факторам алгебры T, заключить, что $T = \{0\}$. Таким образом, доказано, что $R(A) = R'(A)$.

к) Пусть G — вещественная связная группа Ли с алгеброй Ли A. Пусть $\mathscr{S}(G)$ — множество подгрупп $N \subset G$, обладающих убывающей системой подгрупп $(N_m, N_{m-1}, \ldots, N_0)$ со следующими свойствами: $N_m = N$, $N_0 = \{e\}$, всякая N_i есть связная нормальная подгруппа Ли в G и $\dim N_i/N_{i-1} = 1$ при всех $i > 0$. Показать, что интегральная подгруппа $R(G)$ в G, отвечающая подалгебре Ли $R(A)$, есть наибольший элемент в $\mathscr{S}(G)$. (Провести индукцию по $\dim R(A)$. Пусть I — идеал в A размерности 1, N — соответствующая интегральная подгруппа в G. Профакторизовать по $\overline{N}$. Если N не замкнута, использовать упражнение 21а) из § 6.)

л) Подгруппа Ли $H \subset G$ называется продолжимой, если существует такая подгруппа Ли $H_1 \supset H$, что $\dim H_1 = \dim H + 1$. Обозначим через $R'(G)$ пересечение всех связных подгрупп Ли в G, которые не продолжимы.

Пусть B — непродолжимая подалгебра в A. Показать, что соответствующая интегральная подгруппа в G замкнута. (Использовать предложение 5.) Вывести отсюда, что $L(R'(G)) \subset R(A)$, что влечет за собой $R'(G) \subset R(G)$.

м) Показать, что $R(G) = R'(G)$. (Привести все к случаю, когда $R'(G) = \{e\}$. Использовать тогда упражнение 22 из § 6.) [1]).

¶ 29) Мы говорим, что вещественная группа Ли G принадлежит *типу* (N), если она конечномерна, нильпотентна и односвязна. Если G — такая группа и $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, то $\exp\colon \mathfrak{g} \longmapsto G$ является изоморфизмом, коль скоро $\mathfrak{g}$ наделена структурой группы, определяемой законом композиции Хаусдорфа (см. гл. II, § 6, n° 5, *замечание* 3). Обозначим через $\log\colon G \to \mathfrak{g}$ обратный изоморфизм.

а) Пусть V — векторное $\mathbf{Q}$-подпространство в $\mathfrak{g}$. Доказать эквивалентность следующих условий:

(i) V есть $\mathbf{Q}$-подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$;

(ii) $\exp(V)$ есть подгруппа в G. (Использовать упражнение 5 из § 6 гл. II.)

Для того чтобы подгруппа H в G представлялась в форме $\exp(V)$, где V — некоторое векторное $\mathbf{Q}$-подпространство в $\mathfrak{g}$, необходимо и достаточно, чтобы H была изолирована в G (гл. II, § 4 упражнение 14), т. е. чтобы из соотношений $x \in G$, $x^n \in H$, $n \neq 0$ следовало бы, что $x \in H$ (*там же*). Если это имеет место, показать, что H является интегральной подгруппой в G в том и только в том случае, если $\log(H)$ есть $\mathbf{R}$-подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$.

б) Пусть V есть $\mathbf{Q}$-подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$ конечной размерности m. $(e_1, \ldots, e_m)$ — ее базис над $\mathbf{Q}$ и Λ — аддитивная подгруппа в V, порожденная $e_1, \ldots, e_m$. Используя полиномиальность закона композиции Хаусдорфа, показать, что существует такое целое число $d \geqslant 1$, что для всякого делящегося на него ненулевого числа r множество $\exp(r\Lambda)$ есть подгруппа в G, Пусть d — такое число и r — некоторое его кратное. Показать, что $\exp(r\Lambda)$ *дискретна* тогда и только тогда, когда $(e_1, \ldots, e_m)$ — свободное семейство над $\mathbf{R}$, т. е. когда каноническое отображение из $V \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$ в $\mathfrak{g}$ *инъективно*. Предположив, что это именно так, показать, что $G/\exp(r\Lambda)$ компактно тогда и только тогда, когда $V \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \to \mathfrak{g}$ *биективно*, т. е. когда V *есть $\mathbf{Q}$-форма алгебры* $\mathfrak{g}$. (Для доказательства достаточности этого условия провести индукцию по классу нильпотентности алгебры $\mathfrak{g}$.)

---

[1]) Подробности см. в статье J. Tits, Sur une classe de groupes de Lie résolubles, *Bull. Soc. Math. Belg.*, **11** (1959), 100—115; **14** (1962), 196—209.

в) Обратно, пусть Γ — дискретная подгруппа в G, $\overline{\Gamma}$ — ее изолятор в G (гл. II, *там же*) и $\mathfrak{g}_\Gamma = \log(\overline{\Gamma}) = \mathbf{Q}.\log\Gamma$ — соответствующая $\mathbf{Q}$-подалгебра Ли. Предположим, что $\mathbf{R}.\mathfrak{g}_\Gamma = \mathfrak{g}$, т. е. что Γ не содержится ни в какой интегральной подгруппе в G, отличной от G. Пусть z — элемент $\neq 1$ из центра группы Γ и $x = \log z$. Показать, что x принадлежит центру алгебры $\mathfrak{g}$. Если $X = \exp(\mathbf{R}x)$, показать, что $X/(\Gamma \cap X)$ компактно и образ группы Γ в G/X дискретен. Вывести отсюда с помощью индукции по $\dim G$, что G/Γ *компактно* и $\mathfrak{g}_\Gamma$ есть $\mathbf{Q}$-*форма алгебры* $\mathfrak{g}$. Если Λ — решетка в $\mathfrak{g}_\Gamma$, показать, что существует такое целое число $d \neq 0$, что Γ содержит $\exp(d\Lambda)$ и что тогда индекс подгруппы $\exp(d\Lambda)$ в Γ конечен.

Пусть H — интегральная подгруппа в G с алгеброй Ли $\mathfrak{h}$. Показать, что $H/(H \cap \Gamma)$ компактна тогда и только тогда, когда $\mathfrak{h}$ рациональна относительно $\mathbf{Q}$-структуры $\mathfrak{g}_\Gamma$ (в частности, если $\mathfrak{h}$ является одним из членов нижнего или верхнего центрального ряда в $\mathfrak{g}$).

г) Пусть Γ — дискретная подгруппа в G, H — наименьшая интегральная подгруппа в G, содержащая Γ, и $\mathfrak{h}$ — ее алгебра Ли. Показать, что H/Γ компактно, $\mathfrak{g}_\Gamma \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \to \mathfrak{g}$ инъективно, а его образ совпадает с $\mathfrak{h}$. (Применить в) к нильпотентной группе H.)

д) Пусть Γ — дискретная подгруппа в G. Показать, что существует базис $(x_1, \ldots, x_q)$ в $L(G)$ со следующими свойствами:

(i) если $i \in (1, q)$, то $\mathbf{R}x_i + \ldots + \mathbf{R}x_q$ есть идеал $\mathfrak{n}_i$ в $\mathbf{R}x_{i-1} + \ldots + \mathbf{R}x_q$;

(ii) существует $p \in (1, q)$, такое, что Γ есть множество произведений

$$\exp(m_p x_p)\exp(m_{p+1}x_{p+1})\ldots\exp(m_q x_q),$$

где $m_p, \ldots, m_q$ принадлежат $\mathbf{Z}$.

(iii) если G/Γ компактно, то $\{\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}_2, \ldots, \mathfrak{n}_q\}$ содержит все члены нижнего центрального ряда алгебры $\mathfrak{g}$. (Используя г) и предложение 16, свести все к случаю, когда G/Γ компактно. Провести далее индукцию по $\dim G$, применяя в).)

30) Привести пример вещественной нильпотентной алгебры Ли размерности 7, не обладающей базисом, в котором структурные константы были бы рациональны (см. гл. I, § 4, упражнение 18). Вывести отсюда, что в соответствующей группе типа (N) (упражнение 29) нет дискретных подгрупп с компактным фактором. (Использовать упражнение 29.)

31) Пусть G и G' — две группы Ли типа (N) (упражнение 29), и пусть Γ — дискретная подгруппа в G, такая, что G/Γ компактно. Показать, что всякий гомоморфизм $f\colon \Gamma \to G'$ единственным образом продолжается до морфизма группы Ли G в группу Ли G' (начать с продолжения гомоморфизма f на изолятор $\overline{\Gamma}$ группы Γ и получить отсюда гомоморфизм $\mathbf{Q}$-алгебры Ли $\log(\overline{\Gamma})$ в алгебру Ли группы G'; см. упражнение 29).

32) Пусть G — группа Ли типа (N) (упражнение 29) и Γ — дискретная подгруппа в G. Доказать эквивалентность следующих условий:

а) G/Γ компактно;

б) объем пространства G/Γ (относительно ненулевой положительной G-инвариантной меры) конечен;

в) всякая интегральная подгруппа в G, содержащая Γ, равна G.

(Использовать упражнение 29.)

¶ 33) Пусть Γ — группа. Доказать эквивалентность следующих условий:

а) Γ нильпотентна, не имеет кручения и имеет конечный тип;

б) существует группа Ли типа (N) (упражнение 29), содержащая Γ в качестве дискретной подгруппы;

в) существует группа Ли G типа (N) (упражнение 29), содержащая Γ в качестве такой дискретной подгруппы, что G/Γ компактно.

(Эквивалентность условий б) и в) следует из упражнения 29. Импликация в)$\Rightarrow$а) доказывается индукцией по $\dim G$ методом упражнения 29в.) Для проверки импликации а)$\Rightarrow$в) показать сначала, что $\mathbf{Q}$-алгебра Ли, ассоциированная с изолятором группы Γ (см. гл. II, § 6, упражнение 4), имеет конечную размерность, затем взять тензорное произведение этой алгебры с $\mathbf{R}$ и соответствующую группу типа (N).)

34) Пусть G — вещественная или комплексная связная конечномерная группа Ли, ρ — ее линейное аналитическое представление в комплексном векторном пространстве V конечной размерности. Предположим, что ρ полупросто. Группа G действует автоморфизмами в алгебре $\mathsf{S}(V^*)$ полиномиальных функций на V.

а) Пусть $\mathsf{S}(V^*)^G$ — множество G-инвариантных элементов из $\mathsf{S}(V^*)$. Существует проектор p из $\mathsf{S}(V^*)$ на $\mathsf{S}(V^*)^G$, коммутирующий с действием группы G и переводящий в себя всякое G-устойчивое векторное подпространство в $\mathsf{S}(V^*)$.

б) Пусть I, J — идеалы в $\mathsf{S}(V^*)$, устойчивые относительно G. Пусть A (соотв. B) — множество нулей идеала I (соотв. J) в V. Предположим, что $A \cap B = \varnothing$. Существует тогда G-инвариантный элемент $u \in I$, такой, что $u = 1$ в B. (В силу *Комм. алг.*, § 3, n° 3, предложение 2, существуют такие $v \in I$ и $w \in J$, что $v + w = 1$. Пусть $u = pv$. Показать, что u обладает требуемыми свойствами.)

35) [1]) Пусть G — компактная подгруппа в $\mathbf{GL}(n, \mathbf{R})$.

а) Пусть A, B — две различные G-орбиты в $\mathbf{R}^n$. Существует G-инвариантная полиномиальная функция u на $\mathbf{R}^n$, такая, что $u = 1$ на A и $u = 0$ на B. (Существует непрерывная вещественная функция v на $\mathbf{R}^n$, такая, что $v = 1$ на A, $v = 0$ на B. В силу теоремы Стоуна — Вейерштрасса, существует полиномиальная функция w на $\mathbf{R}^n$, такая, что $|v - w| \leqslant 1/3$ на $A \cup B$. Получить отсюда u с помощью интегрирования относительно нормализованной меры Хаара на G.)

б) Пусть $x \in \mathbf{R}^n$. Тогда Gx есть множество нулей в $\mathbf{R}^n$ некоторого конечного числа G-инвариантных полиномов. (Использовать а) и следствие 2 теоремы 1, n° 8.)

36) В группе $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$ в виде (a, b), где a, b принадлежат $\mathbf{SL}(2, \mathbf{R})$, представимы все элементы, кроме $-I$.

¶ 37) Пусть G — вещественная компактная группа, G' — вещественная связная конечномерная группа Ли. Предположим, что $L(G)$ проста. Пусть $\rho\colon G \to G'$ — гомоморфизм абстрактных групп. Предположим, что существует такая окрестность V элемента e_G в G, что $\rho(V)$ относительно компактно. Тогда ρ непрерывен. (Пусть V' — некоторая окрестность элемента $e_{G'}$ в G'. Пусть $V'' \subset V'$ — окрестность элемента $e_{G'}$, такая, что

$$(x \in V'',\ x_j \in \rho(V),\ y_j \in \rho(V) \text{ при } 1 \leqslant j \leqslant n) \Rightarrow \left(\prod_{i=1}^{n} x_i (y_i, x) x_i^{-1} \in V'\right),$$

где $n = \dim G$. Можно предполагать, что ρ нетривиально. Тогда $\operatorname{Ker} \rho$ конечно в силу упражнения 25. Следовательно, группа $\rho(G)$ не счетна, а потому не дискретна. Найдется элемент $g \in G$, такой, что его централизатор не открыт

[1]) В оригинале утверждение а) ошибочно формулируется для произвольных непересекающихся компактных G-устойчивых подмножеств A и B в R^n.— *Прим. перев.*

и $\rho(g) \in V''$. Используя упражнение 9 из § 4 и его обозначения, получаем, что $\rho(M(g, n, V)) \subset V'$ и $M(g, n, V)$ есть окрестность элемента e_G в G.)

38) Пусть G — вещественная конечномерная группа Ли, G_0 — ее компонента единицы. Рассмотрим следующее свойство: (F) $\mathrm{Ad}\,(G)$ замкнута в $\mathrm{Aut}\, L(G)$.

Показать, что G обладает свойством (F) в каждом из следующих случаев:
(i) G связна и нильпотентна;
(ii) всякое дифференцирование алгебры Ли $L(G)$ внутреннее;
(iii) G_0 обладает свойством (F) и G/G_0 конечна;
(iv) G есть верхняя треугольная группа;
(v) G_0 полупроста.

39) Пусть G — вещественная связная конечномерная группа Ли, H — интегральная подгруппа в G, $\overline{H}$ — ее замыкание в G. Предположим, что H обладает свойством (F) (упражнение 38).

а) Пусть $x \in \overline{H}$. Тогда $L(H)$ устойчива относительно $\mathrm{Ad}_{L(G)}x$ (n° 2, предложение 5); пусть $u(x)$ — его ограничение на $L(H)$. Тогда $u(\overline{H}) = \mathrm{Ad}_{L(H)}(H)$. (Заметить, что $\mathrm{Ad}_{L(H)}(H)$ плотна в $u(\overline{H})$, и применить свойство (F).)

б) Пусть C — центр группы $\overline{H}$. Имеем $\overline{H} = C.H$, и C является замыканием центра группы H. (В силу а) для всякого $x \in \overline{H}$ существует такой $y \in H$, что $\mathrm{Ad}_{L(H)}x = \mathrm{Ad}_{L(H)}y$. Тогда $\mathrm{Ad}_{L(H)}(x^{-1}y)$ есть тождественное преобразование и, стало быть, $x^{-1}y \in Z_{\overline{H}}(H)$ и $x \in Z_{\overline{H}}(H).H$. По непрерывности $Z_{\overline{H}}(H)$ совпадает с C. Группа C замкнута в $\overline{H}$, а потому в G; следовательно, $\overline{C \cap H} \subset C$. Пусть $x \in C$. В H существует такая последовательность (x_n), что x_n стремится к x. Тогда $\mathrm{Ad}_{L(H)}x_n$ стремится к 1, и, следовательно, существует такая последовательность (y_n) в H, что y_n стремится к e и $\mathrm{Ad}_{L(H)}y_n = \mathrm{Ad}_{L(H)}x_n$. Тогда $y_n^{-1}x_n \in C \cap H$ и $y_n^{-1}x_n$ стремится к x.)

в) Равенство $H = \overline{H}$ имеет место тогда и только тогда, когда центр группы H замкнут в G. (Использовать б).)

40) Пусть H — вещественная конечномерная группа Ли, H_0 — ее компонента единицы.

а) Предположим, что H_0 удовлетворяет условию (F) упражнения 38, H/H_0 конечна и центр группы H_0 компактен. Пусть G — вещественная конечномерная группа Ли и $f\colon H \to G$ — непрерывный гомоморфизм с дискретным ядром. Тогда $f(H)$ замкнута в G. (Все сводится к случаю, когда H связна. Поскольку ядро гомоморфизма f дискретно, центр группы $f(H)$ есть образ относительно f центра группы H (лемма 1), и, стало быть, он замкнут в G. Применить упражнение 39в).)

б) Предположим, что H_0 полупроста и что H/H_0 конечна. Тогда образ группы H в произвольном линейном непрерывном конечномерном представлении замкнут в линейной группе. (Применить а) и упражнение 7б).)

41) Пусть G — вещественная связная конечномерная группа Ли, $\rho\colon G \to \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ — непрерывный гомоморфизм с конечным ядром. Тогда группа $\rho((G, G))$ замкнута в $\mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$. (С помощью упражнений 7б) и 40а) сведем все к случаю, когда группа G есть полупрямое произведение некоторой полупростой группы S и своего радикала R. Всякий элемент из $\rho((G, R))$ унипотентен и, стало быть, $\rho((G, R))$ замкнута. Векторное подпространство V_1 неподвижных точек группы $\rho((G, R))$ отлично от $\{0\}$. Оно устойчиво относительно $\rho(G)$. Рассматривая факторпространство $\mathbf{C}^n/V_1$ и проводя индукцию по n с использованием полной приводимости действия группы $\rho(S)$, мы получаем разложение $\mathbf{C}^n = V_1 \oplus \ldots \oplus V_q$, где всякое пространство V_i устойчиво отно-

сительно $\rho(S)$ и где $\rho((G, R))(V_i) \subset V_1 \oplus \ldots \oplus V_{i-1}$ для всякого i. С другой стороны, $\rho(S)$ замкнута (упражнение 40б)). Наконец, $\rho((G, G)) = \rho(S).\rho((G, R))$.)

42) Пусть G — вещественная связная конечномерная группа Ли. Предположим, что G обладает инъективным линейным непрерывным представлением ρ: $G \to \mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$. Тогда G допускает линейное представление σ: $G \to \mathbf{GL}(n', \mathbf{C})$, которое отображает G гомеоморфно на некоторую замкнутую подгруппу в $\mathbf{GL}(n', \mathbf{C})$. (В силу упражнения 41 $\rho((G, G))$ замкнута в $\mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$ и, стало быть, (G, G) замкнута в G. Пусть p: $G \to G/(G, G)$ — канонический гомоморфизм и τ — инъективное линейное представление связной коммутативной группы $G/(G, G)$, имеющее замкнутый образ. Положить $\sigma = \rho \oplus (\tau \circ p)$.)

§ 10

1) Пусть G — вещественная связная конечномерная группа Ли. Показать, что каноническое отображение из $\operatorname{Aut} G$ в $\operatorname{Aut}(L(G))$, вообще говоря, не сюръективно (взять $G = \mathbf{T}$).

2) Предположим, что $K = \mathbf{Q}_p$. Пусть G — конечномерная группа Ли. Показать, что следующие условия эквивалентны:

а) существуют такие $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в G, что подгруппа, порожденная множеством $\{x_1, \ldots, x_n\}$, плотна в G;

б) G порождена некоторым компактным подмножеством.

(Для доказательства импликации б)$\Rightarrow$а) заметить, что если $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис в $L(G)$, то $(\exp \mathbf{Z}_p e_1)(\exp \mathbf{Z}_p e_2) \ldots (\exp \mathbf{Z}_p e_n)$ есть окрестность элемента e.)

3) Пусть G — множество таких пар $(x, y) \in \mathbf{Q}_p \times \mathbf{Q}_p$, что $|y| \leqslant 1$. Это открытая подгруппа в $\mathbf{Q}_p \times \mathbf{Q}_p$. Имеем $L(G) = \mathbf{Q}_p \times \mathbf{Q}_p$. Пусть α — инфинитезимальный автоморфизм $(x, y) \mapsto (0, x)$. Тогда заключение предложения 3 не выполняется.

4) Пусть K — квадратичное расширение поля $\mathbf{Q}_p$, и пусть $\omega \in K - \mathbf{Q}_p$. Рассмотрим $G = \mathbf{Q}_p + \mathbf{Z}_p\omega$ как группу Ли над K. Единственными ее автоморфизмами являются отображения $(x, y) \mapsto (\lambda x, \lambda y)$, где λ обратим в $\mathbf{Z}_p$. Множество этих автоморфизмов нельзя наделить структурой группы Ли над K, обладающей свойствами, указанными в теореме 1.

ИСТОРИЧЕСКИЙ ОЧЕРК

К ГЛАВАМ I—III

I. Генезис

Теория, которую в течение почти целого века называют „теорией групп Ли“, создана по сути дела одним математиком — Софусом Ли.

Прежде чем приступить к изложению истории этой науки, мы коротко резюмируем различные более ранние исследования, которые подготовили ее развитие.

a) *Группы преобразований* (*Клейн — Ли, 1869—1872*)

Около 1860 г. начинает развиваться и находить применения теория групп подстановок *конечного* множества (Серре, Кронекер, Матье, Жордан). В то же время, благодаря теории инвариантов, которая тогда переживала подъем, математики освоились с некоторыми бесконечными множествами геометрических преобразований, устойчивых относительно композиции (а именно с линейными или проективными преобразованиями). Но, по-видимому, до работы Жордана [VII] 1868 г. о „группах движений“ (замкнутых подгруппах группы перемещений трехмерного евклидова пространства) связь между этими двумя направлениями не была осознана.

В 1869 г. молодой Феликс Клейн (1849—1925), ученик Плюкера, завязывает дружбу в Берлине с норвежцем Софусом Ли (1842—1899), который на несколько лет старше его и с которым его сблизил общий интерес к „геометрии прямых“ Плюкера, а именно к теории комплексов прямых. Примерно в то же время к Ли приходит одна из самых его оригинальных идей — введение понятия инварианта в анализ и дифференциальную геометрию, одним из источников которой явилось его наблюдение, что все классические методы интегрирования дифференциальных уравнений „в квадратурах“ основаны на инвариантности уравнения относительно некоторого „непрерывного“ семейства преобразований. Первая работа (отредактированная Клейном), где Ли использует эту идею, относится к 1869 г. Ли изучает здесь „комплекс Рея“ (множество прямых, пересекающих плоскости, огра-

ничивающие тетраэдр, в 4 точках, находящихся в данном двойном отношении), а также кривые и поверхности, касательные прямые к которым принадлежат этому комплексу [III, a)]. Его метод основан на инвариантности комплекса Рея относительно трехпараметрической коммутативной группы (максимального тора в **PGL** (4, **C**)), оставляющей на месте вершины тетраэдра. Эта же идея преобладает в работе Клейна и Ли, которую они написали вместе в Париже весной 1870 г. [I, a)]. В ней они находят, по сути дела, связные коммутативные подгруппы проективной группы плоскости **PGL** (3, **C**) и изучают геометрические свойства их орбит (называя их кривыми или поверхностями V). В результате они единообразным путем получают свойства различных алгебраических или трансцендентных кривых, таких, как кривая $y = cx^m$ или логарифмические спирали. Оба они единодушно подчеркивают, сколь глубокое впечатление произвели на них теория Галуа и теория Жордана (комментарий Жордана к теории Галуа появился в Math. Annalen в 1869 г.; впрочем, Ли впервые услышал о ней в 1863 г.). Клейн, который в 1871 г. начинает проявлять интерес к неевклидовым геометриям, видит в них исходную точку своих поисков принципа классификации всех известных геометрий, поисков, которые приведут его в 1872 г. к „Эрлангенской программе". Со своей стороны, Ли в письме к А. Майеру в 1873 г. [III, т. V, стр. 584] датирует временем пребывания в Париже возникновение своих идей, касающихся групп преобразований. В работе 1871 г. [III, b)] он уже пользуется самим термином „группа преобразований" и точно формулирует проблему нахождения всех подгрупп („*непрерывных или разрывных*") в **GL** (n, **C**). По правде говоря, оба, Клейн и Ли, должны были испытать определенные трудности при углублении в эту новую сферу математики, и Клейн говорит о только что появившемся тогда трактате Жордана как о „книге за семью печатями" [II, стр. 51]. В другом месте он пишет по поводу работ [I, a) и b)]: „*Именно Ли принадлежит все, что связано с эвристической идеей непрерывной группы операторов, в частности все, что касается интегрирования дифференциальных уравнений, обыкновенных или с частными производными. Все понятия, развитые им позднее в его теории непрерывных групп, в зародыше у него уже имелись, но были столь мало разработаны, что мне в ходе долгих бесед приходилось спорить с ним по многим вопросам, поначалу, например, по поводу самого существования кривых V*" [II, стр. 415].

б) *Инфинитезимальные преобразования*

Концепция „бесконечно малого" преобразования восходит по меньшей мере ко времени возникновения исчисления бесконечно малых. Известно, что Декарт открывает мгновенный центр враще-

ния, предположив, что „в бесконечно малом“ всякое плоское движение может быть уподоблено некоторому вращению; разработка аналитической механики в XVIII веке целиком основана на сходных идеях. В 1851 г. Сильвестр, пытаясь построить инварианты линейной группы $\mathbf{GL}(3, \mathbf{C})$ или некоторых ее подгрупп, придает параметрам z_j, фигурирующим в матрицах этой группы, „бесконечно малые“ приращения вида $\alpha_j\,dt$ и записывает условие инвариантности некоторой функции $f((z_j))$ уравнением $f((z_j + \alpha_j\,dt)) = f((z_j))$. Это дает ему для f линейное уравнение с частными производными $Xf = 0$, где

$$Xf = \sum_j \alpha_j \frac{\partial f}{\partial z_j}; \qquad (1)$$

X является, таким образом, *дифференциальным оператором*, „производной вдоль направляющих параметров α_j“ [V, т. 3, стр. 326 и 327]. Кажется, что Сильвестр чувствует, что здесь проявляется некоторый общий принцип большой важности, но, судя по всему, больше он не возвращается к этому вопросу. Чуть позже Кэли [VI, т. II, стр. 164—178] применяет аналогичный прием в связи с инвариантами группы $\mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$ в некоторых ее представлениях и показывает, что эти инварианты суть решения двух уравнений с частными производными $Xf = 0$, $Yf = 0$, где X и Y получаются, как выше, исходя из „бесконечно малых“ преобразований

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ dt & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 0 & dt \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В современных терминах это объясняется тем фактом, что X и Y порождают алгебру Ли $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$. Отметим, что Кэли явно вычисляет коммутатор $XY - YX$ и показывает, что он также происходит из некоторого „бесконечно малого“ преобразования.

В своем мемуаре 1868 г. о группах движений [VII] Жордан повсеместно пользуется понятием „бесконечно малого преобразования“, но исключительно с геометрической точки зрения. Без сомнения, именно у него возникает идея однопараметрической группы, „порожденной“ некоторым бесконечно малым преобразованием: для Жордана это множество преобразований, получающихся в результате „*повторения надлежащим образом*“ бесконечно малого преобразования (*там же*, стр. 243). Клейн и Ли в своем мемуаре 1871 г. применяют тот же оборот: „*повторенное бесконечно малое преобразование*“ [I, b)], но из контекста ясно, что они понимают под этим интегрирование некоторой дифференциальной системы. Если рассматриваемая ими однопараметрическая группа образована преобразованиями $x' = f(x, y, t)$,

$y' = g(x, y, t)$, то соответствующее „бесконечно малое преобразование“ задается формулами

$$dx = p(x, y)\,dt, \quad dy = q(x, y)\,dt,$$

где $p(x, y) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, y, t_0)$, $q(x, y) = \frac{\partial g}{\partial t}(x, y, t_0)$ и t_0 отвечает тождественному преобразованию в группе. Поскольку явный вид функций f и g Клейну и Ли известен, для них не составляет труда проверить, что функции

$$t \longmapsto f(x, y, t) \quad \text{и} \quad t \longmapsto g(x, y, t)$$

задают в параметрической форме интегральную кривую дифференциального уравнения

$$q(\xi, \eta)\,d\xi = p(\xi, \eta)\,d\eta,$$

проходящую через точку (x, y). Они, однако, не подводят под этот факт никакой общей базы, и в оставшейся части мемуара он больше не используется.

в) Контактные преобразования

В течение последующих двух лет Ли, по всей видимости, оставляет занятия теорией групп преобразований (хотя и поддерживает тесную связь с Клейном, который публикует в 1872 г. свою „Программу“) с тем, чтобы изучать контактные преобразования, интегрирование уравнений с частными производными первого порядка и связи между этими двумя теориями. Мы не ставим своей целью изложить здесь историю этих вопросов и коснемся только некоторых моментов, которые, как нам кажется, сыграли важную роль в генезисе теории групп преобразований.

Понятие контактного преобразования обобщает одновременно точечные преобразования и преобразования посредством взаимных поляр. Грубо говоря, контактное преобразование[1]) в $\mathbf{C}^n$ есть изоморфизм некоторого открытого подмножества Ω многообразия $T'(\mathbf{C}^n)$ кокасательных векторов к $\mathbf{C}^n$ на другое открытое подмножество Ω' в $T'(\mathbf{C}^n)$, переводящее каноническую 1-форму на Ω в такую же форму на Ω'. Другими словами, если $(x_1, \ldots, x_n,$

---

[1]) Мы говорим здесь об „однородных“ контактных преобразованиях. Ранее изучение уравнений типа (2), в которых, однако, F зависит также от Z, привело Ли к рассмотрению контактных преобразований с $2n+1$ переменными $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ и задаче нахождения $2n+2$ функций Z, P_i, X_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ и ρ (эта последняя $\neq 0$ в каждой точке), таких, что $dZ - \sum_i P_i\,dX_i = \rho\left(dz - \sum_i p_i dx_i\right)$. Этот кажущийся более общим случай, впрочем, легко сводится к „однородному случаю“ [IV, т. 2, стр. 135—146].

$p_1, \ldots, p_n$) обозначают канонические координаты на $T'(\mathbf{C}^n)$, то контактное преобразование есть изоморфизм $(x_i, p_i) \longmapsto (X_i, P_i)$, удовлетворяющий соотношению $\sum_{i=1}^{n} P_i\, dX_i = \sum_{i=1}^{n} p_i\, dx_i$. Такие преобразования возникают при интегрировании уравнений с частными производными вида

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0. \tag{2}$$

В процессе исследования этих вопросов Ли освоился со скобками Пуассона

$$(f, g) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial p_i}\right) \tag{3}$$

и с коммутаторами[1]) $[X, Y] = XY - YX$ дифференциальных операторов типа (1). Он интерпретирует скобку Пуассона (3) как результат действия на f преобразования типа (1), ассоциированного с g. В связи с этим он замечает, что тождество Якоби для скобок Пуассона выражает тот факт, что коммутатор дифференциальных операторов, отвечающих функциям g и h, соответствует скобке (g, h). Отыскание функций g, таких, что $(F, g) = 0$, служившее в методе Якоби средством интегрирования уравнения с частными производными (2), применяется Ли к нахождению инфинитезимального контактного преобразования, сохраняющего данное уравнение. Наконец, Ли приходит к изучению семейства функций $(u_j)_{1 \leqslant j \leqslant m}$ от переменных x_i и p_i, характеризуемых тем, что скобки (u_j, u_k) суть функции от функций u_h, и называет эти множества (рассматривавшиеся, по существу, уже Якоби) „группами".

II. Непрерывные группы и инфинитезимальные преобразования

Осенью 1873 г. Ли внезапно возобновляет изучение групп преобразований и получает основные результаты. Насколько возможно проследить ход его рассуждения в нескольких письмах к А. Майеру в 1873—1874 гг. [III, т. 5, стр. 584—608], он

[1]) Эти коммутаторы возникали уже в теории Якоби—Клебша „полных систем" дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка $X_j f = 0$ $(1 \leqslant j \leqslant r)$. Последнее понятие эквивалентно понятию „вполне интегрируемой системы" Фробениуса. Фундаментальная теорема (равносильная „теореме Фробениуса"), характеризующая эти системы, состоит в том, что коммутаторы $[X_i, X_j]$ должны быть линейными комбинациями (с переменными коэффициентами) операторов X_k.

отправляется от „непрерывной группы“ преобразований над n переменными

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n, a_1, \ldots, a_r) \quad (1 \leqslant i \leqslant n), \tag{4}$$

эффективно[1]) зависящих от r параметров $a_1, \ldots, a_r$. Он замечает, что если преобразование (4) становится тождественным преобразованием для значений $a_1^0, \ldots, a_r^0$ параметров[2]), то члены первого порядка разложения в ряд Тейлора функций

$$f_i(x_1, \ldots, x_n, a_1^0 + z_1, \ldots, a_r^0 + z_r) = \\ = x_i + \sum_{k=1}^{r} z_k X_{ki}(x_1, \ldots, x_n) + \ldots \quad (1 \leqslant i \leqslant n) \tag{5}$$

определяют следующее бесконечно малое преобразование „общего вида“, линейно зависящее от r параметров z_j:

$$dx_i = \left(\sum_{k=1}^{r} z_k X_{ki}(x_1, \ldots, x_n) \right) dt \quad (1 \leqslant i \leqslant n). \tag{6}$$

Действуя, как в своем совместном с Клейном мемуаре, Ли интегрирует дифференциальную систему

$$\frac{d\xi_1}{\sum\limits_k z_k X_{k1}(\xi_1, \ldots, \xi_n)} = \ldots = \frac{d\xi_n}{\sum\limits_k z_k X_{kn}(\xi_1, \ldots, \xi_n)} = dt, \tag{7}$$

что дает ему для всякой точки $(z_1, \ldots, z_r)$ однопараметрическую группу

$$t \mapsto x_i' = g_i(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_r, t) \quad (1 \leqslant i \leqslant n), \tag{8}$$

такую, что $g_i(x_1, \ldots, x_n, z_1, \ldots, z_r, 0) = x_i$ для всякого i. Искусным приемом, используя тот факт, что преобразования (4) образуют множество, устойчивое относительно композиции, он показывает, что однопараметрическая группа (8) является под-

---

[1]) Ли понимает под этим следующее: функции f_i нельзя выразить посредством меньшего, чем r, числа некоторых функций от параметров a_j; другая формулировка: якобиева матрица $(\partial f_i / \partial a_j)$ имеет ранг r в точках „общего положения“.

[2]) В первых своих заметках Ли полагает, что умеет доказывать *a priori* существование тождественного преобразования и обратных элементов во всяком множестве преобразований (4), устойчивом относительно композиции. Впоследствии он признает, что его доказательство было некорректно, и Энгель представил ему контрпример, приведенный в [IV, т. 1, § 44]. Тем не менее Ли показывает, как приводить „непрерывные“ системы (4), устойчивые относительно композиции, к групускулам преобразований: такая система имеет вид $G \circ h$, где G — некоторая групускула преобразований и h — некоторое преобразование системы [IV, т. 1, теорема 26, стр. 163; т. 3, теорема 46, стр. 572].

группой данной группы [III, d)]. Новая идея, ключевая ко всей теории, состоит в том, чтобы продолжить разложения Тейлора функций (4) до членов *второго порядка*. Ход рассуждений Ли выглядит довольно смутным и эвристическим ([III, d)] и [III, т. 5, стр. 600—601]); его можно представить в следующем виде. Для достаточно малых z_j в (8) можно подставить $t=1$, и мы получаем таким способом новые параметры $z_1, \ldots, z_r$ для преобразований группы (по сути дела, здесь впервые возникают „канонические параметры“). По определению, в силу (7)

$$\frac{\partial g_i}{\partial t}=\sum_k z_k X_{ki}(x_1', \ldots, x_n'),$$

откуда

$$\frac{\partial^2 g_i}{\partial t^2}=\sum_{k,j} z_k \frac{\partial X_{ki}}{\partial x_j}(x_1', \ldots, x_n')\frac{\partial x_j'}{\partial t}=$$

$$=\sum_{k,j} z_k \frac{\partial X_{ki}}{\partial x_j}(x_1', \ldots, x_n')\left(\sum_h z_h X_{hj}(x_1', \ldots, x_n')\right),$$

что дает

$$x_i'=x_i+\left(\sum_k z_k X_{ki}(x_1, \ldots, x_n)\right)t+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\sum_{k,h,j} z_k z_h \frac{\partial X_{ki}}{\partial x_j}(x_1, \ldots, x_n)X_{hj}(x_1, \ldots, x_n)\right)t^2+\ldots,$$

откуда при $t=1$ получаем разложения Тейлора по параметрам z_j:

$$x_i'=x_i+\left(\sum_k z_k X_{ki}\right)+\frac{1}{2}\left(\sum_{k,h,j} z_k z_h X_{hj}\frac{\partial X_{ki}}{\partial X_j}\right)+\ldots \tag{9}$$

$$(1\leqslant i\leqslant n).$$

Запишем соотношения между векторами

$$x=(x_1, \ldots, x_n), \quad x'=(x_1', \ldots, x_n'), \quad z=(z_1, \ldots, z_r)$$

кратко в виде $x'=G(x, z)$; фундаментальное свойство множества этих преобразований, замкнутость относительно композиции, записывается в виде

$$G(G(x, u), v)=G(x, H(u, v)), \tag{10}$$

где $H=(H_1, \ldots, H_r)$ не зависит от x. Немедленно получается $H(u, 0)=u$, $H(0, v)=v$, откуда следуют разложения

$$H_i(u, v)=u_i+v_i+\frac{1}{2}\sum_{h,k} c_{ikh}u_h v_k+\ldots, \tag{11}$$

где невыписанные члены уже не линейны по u или по v. Преобразуя (10) с помощью (9) и (11), затем сравнивая члены, содержащие $u_h v_k$, в обеих частях равенства, Ли получает соотношения

$$\sum_{j=1}^{n}\left(X_{hj}\frac{\partial X_{ki}}{\partial x_j}-X_{kj}\frac{\partial X_{hi}}{\partial x_j}\right)=\sum_{l=1}^{r}c_{lhk}X_{li} \tag{12}$$

$$(1\leqslant h,\ k\leqslant r,\ 1\leqslant i\leqslant n).$$

Опыт в теории уравнений с частными производными побуждает его записать (12) в более простой форме: руководствуясь примером формулы (1), он сопоставляет с каждым из r бесконечно малых преобразований, получающимся при подстановке $z_k=1$, $z_h=0$ при $h\neq k$ в (6), дифференциальный оператор

$$A_k(f)=\sum_{i=1}^{n}X_{ki}\frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{13}$$

и переписывает соотношения (12) в виде

$$[A_h,\ A_k]=\sum_l c_{lhk}A_l. \tag{14}$$

Эта формула — краеугольный камень его теории. До сих пор Ли употреблял термины „бесконечно малое преобразование“ и „инфинитезимальное преобразование“ как равноправные (см., например, [III, c)]); простота соотношений (14) склоняет его теперь назвать оператор (13) „символом“ инфинитезимального преобразования $dx_i=X_{ki}\,dt$ $(1\leqslant i\leqslant n)$, и очень скоро именно оператор (13) он назовет *инфинитезимальным преобразованием* ([III, e)] и [III, т. 5, стр. 589]).

Он осознает тогда тесные связи, объединяющие теорию „непрерывных групп“ с его предыдущими исследованиями по контактным преобразованиям и уравнениям с частными производными. Сближение этих теорий наполняет Ли энтузиазмом: „*Мои старые работы были, если можно так сказать, заранее готовы составить основу новой теории групп преобразований*“, — пишет он Майеру в 1874 г. [III, т. 5, стр. 586].

В последующие годы Ли продолжает изучение групп преобразований. Кроме общих теорем, которые резюмированы ниже (§ III), он получает некоторое число более частных результатов: нахождение групп преобразований прямой и плоскости, подгрупп малой размерности в проективных группах, групп, зависящих не более чем от 6 параметров, и т. д. Тем не менее он не оставляет занятий дифференциальными уравнениями. В самом деле, кажется даже, что с его точки зрения теория групп преобразований должна была стать средством интегрирования диффе-

ренциальных уравнений, причем группа преобразований играла бы ту же роль, что группа Галуа алгебраического уравнения[1]). Отметим, что эти исследования Ли приводят его также к введению некоторых множеств преобразований, зависящих от бесконечного числа параметров, которые он называет „бесконечными непрерывными группами" [2]). Термин „конечные непрерывные группы" он резервирует для групп преобразований, зависящих от конечного числа параметров типа (4).

III. „Словарь": группы Ли — алгебры Ли

Теория „конечных непрерывных" групп, развиваемая Ли в многочисленных мемуарах начиная с 1874 г., систематически излагается во внушительном трактате „Theorie der Transformationsgruppen ([IV], 1888—1893 гг.), написанном в сотрудничестве с Энгелем[3]); она составляет предмет первого тома и пяти последних глав третьего, в то время как второй том посвящен контактным преобразованиям.

Как следует из заглавия этого труда, речь в нем всюду идет только о группах преобразований в смысле уравнений (4), где пространство «переменных» x_i и пространство a_j „параметров" играют вначале одинаково важную роль. Впрочем, идея „абстрактной" группы в это время не была ясно выделена в самостоятельное понятие. Когда в 1883 г. [III, д)] Ли замечает, что (в обозначениях формулы (10)) уравнение $w = H(u, v)$, задающее параметры композиции двух преобразований из группы, определяет новую группу, то он рассматривает ее как *группу преобразований* пространства параметров и называет ее „группой параметров" (он получает таким путем даже две группы, яляющиеся не чем иным, как группами левых и правых сдвигов соответственно[4]).

---

[1]) Эти исследования оказали лишь небольшое влияние на общую теорию дифференциальных уравнений, ибо группа автоморфизмов дифференциального уравнения, как правило, тривиальна. Зато для некоторых типов уравнений, например линейных уравнений, интересные результаты были получены позднее Пикаром, Вессио, а несколько позднее Риттом и Колчином.

[2]) Теперь они называются „псевдогруппами Ли"; их не следует путать с „банаховыми" группами Ли, определенными в настоящей книге.

[3]) С 1886 по 1898 г. Ли возглавлял в Лейпциге кафедру, покинутую Клейном, и Энгель был его ассистентом. Это обстоятельство содействовало зарождению активной математической школы, а также широкому ознакомлению с идеями Ли, до того довольно мало известными (в особенности по той причине, что первые его мемуары были написаны чаще всего по-норвежски и опубликованы в Отчетах Академии Христиании, журнале, мало распространенном). Именно поэтому в эпоху, когда для молодых французских математиков отнюдь не было обычаем ездить учиться в Германию, Э. Вессио и А. Тресс провели год занятий в Лейпциге у Софуса Ли.

[4]) Аналогичное понятие для групп подстановок было введено и изучено Жорданом в его „Трактате".

Переменные x_i и параметры a_j в уравнениях (4) в принципе предполагаются комплексными (за исключением глав XIX—XXIV т. 3) и функции f_i — аналитическими. Разумеется, Ли и Энгель отдают себе отчет в том, что эти функции, вообще говоря, не определены для всех комплексных значений переменных x_i и параметров a_j и что рассмотрение композиции таких преобразований приводит к серьезным трудностям [IV, т. 1, стр. 15—17, 33—40 и *далее*]. И хотя в дальнейшем они почти всегда выражаются так, будто композиция преобразований выполнима без ограничений, несомненно, что делают они это лишь для удобства формулировок, и „локальная" точка зрения восстанавливается в явном виде всякий раз, когда это необходимо (см. *там же*, стр. 168 или 189, например, либо *там же*, т. 3, стр. 2, подстрочное примечание). Другими словами, изучаемый ими математический объект близок к тому, что в настоящем трактате именуется куском закона действия. Они не считают грехом при случае рассматривать глобальные группы, например 4 серии классических групп [IV, т. 3, стр. 682], но, по всей видимости, не задаются вопросом, что вообще может представлять собой „глобальная группа". Ли и Энгель довольствуются тем, что получают для „параметров" классических групп (введение „переменных" для этих групп не приводит к каким-либо затруднениям, ибо речь идет о линейных преобразованиях пространства $\mathbf{C}^n$) систему „локальных" параметров в некоторой окрестности тождественного преобразования, не беспокоясь об области справедливости написанных формул. Однако они ставят перед собой одну задачу, явно выходящую за рамки локальной теории[1]): изучение „смешанных" групп, то есть групп с конечным числом связных компонент, таких, как ортогональная группа [IV, т. 1, стр. 7]. Они представляют это как изучение некоторого множества преобразований, устойчивого относительно композиции и взятия обратного элемента, являющегося, кроме того, объединением множеств H_j, каждое из которых описывается системами функций $\left(f_i^{(j)}\right)$, как в (4). Число (существенных) параметров каждого H_j a priori даже предполагается зависящим от j, но они показывают, что в действительности это число одно и то же для всех H_j. Их основной результат тогда состоит в том, что существует конечная непрерывная группа G, такая, что $H_j = G \circ h_j$ для некоторого $h_j \in H_j$ и всякого j.

[1]) Напомним (см. исторический очерк к гл. VIII в *Алг.*, стр. 316), что вслед за заметкой А. Пуанкаре [XIV, т. V, стр. 77—79] различные авторы занимались изучением группы обратимых элементов ассоциативной конечномерной алгебры. По этому поводу интересно отметить, что Э. Штуди в своих работах на эту тему вводит символизм, сводящийся по существу к рассмотрению абстрактной группы, определяемой группой параметров.

Устанавливается также, что G нормальна в смешанной группе, и замечается, что нахождение инвариантов последней сводится к нахождению инвариантов для G и для некоторой дискретной группы [IV, т. 1, гл. 18].

Общая теория, развитая в [IV], приводит к созданию „словаря", позволяющего переходить от свойств „конечных непрерывных" групп к соответствующим свойствам множества их инфинитезимальных преобразований (высказывания авторов по этому поводу не носят, впрочем, систематического характера). Этот словарь основывается на трех „теоремах Ли", каждая из которых состоит из некоторого утверждения и его обращения.

Первая теорема [IV, т. 1, стр. 33 и 72, и т. 3, стр. 563] устанавливает, прежде всего, что если параметры в (4) являются эффективными, то функции f_i удовлетворяют системе уравнений с частными производными вида

$$\frac{\partial f_i}{\partial a_j} = \sum_{k=1}^{r} \xi_{ki}(f(x, a))\,\psi_{kj}(a) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n), \tag{15}$$

где матрица (ξ_{ki}) имеет максимальный ранг и $\det(\psi_{kj}) \neq 0$. Обратно, если функции f_i обладают этим свойством, то формулы (4) определяют некоторую групускулу преобразований.

Вторая теорема [IV, т. 1, стр. 149 и 158, и т. 3, стр. 590] дает соотношения для функций ξ_{ki} и соотношения для функций ψ_{ij}: условия относительно функций ξ_{ki} записываются в виде

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\xi_{ik}\frac{\partial \xi_{jl}}{\partial x_k} - \xi_{jk}\frac{\partial \xi_{il}}{\partial x_k}\right) = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^{k}\xi_{kl} \qquad (1 \leqslant i,\ j \leqslant r,\ 1 \leqslant l \leqslant n), \tag{16}$$

где c_{ij}^k суть некоторые константы $(1 \leqslant i, j, k \leqslant r)$, антисимметрические по i, j. Условия на функции ψ_{ij} в той форме, которую им придал Маурер [X], имеют вид

$$\frac{\partial \psi_{kl}}{\partial a_m} - \frac{\partial \psi_{km}}{\partial a_l} = \frac{1}{2}\sum_{1 \leqslant i,\ j \leqslant r} c_{ij}^{k}(\psi_{il}\psi_{jm} - \psi_{jl}\psi_{im}) \qquad (1 \leqslant k, l, m \leqslant r). \tag{17}$$

Введя матрицу (α_{ij}), контрагредиентную к (ψ_{ij}), и инфинитезимальные преобразования

$$X_k = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}\frac{\partial}{\partial x_i}, \quad A_k = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{kj}\frac{\partial}{\partial a_j} \qquad (1 \leqslant k \leqslant r), \tag{18}$$

можно записать (16) и (17) соответственно в виде

$$[X_i, X_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k X_k, \qquad (19)$$

$$(1 \leqslant i, j \leqslant r)$$

$$[A_i, A_j] = \sum_{k=1}^{r} c_{ij}^k A_k. \qquad (20)$$

Обратно, если задать r инфинитезимальных преобразований X_k $(1 \leqslant k \leqslant r)$, которые линейно независимы и удовлетворяют условиям (19), то однопараметрические подгруппы, порожденные этими преобразованиями, порождают группу преобразований, зависящих от r существенных параметров.

Наконец, *третья теорема* [IV, т. 1, стр. 170 и 297, и т. 3, стр. 597] сводит нахождение систем инфинитезимальных преобразований $(X_k)_{1 \leqslant k \leqslant r}$, удовлетворяющих (19), к некоторой чисто алгебраической задаче: константы c_{ij}^k должны удовлетворять условиям

$$c_{ij}^k + c_{ji}^k = 0, \qquad (21)$$

$$\sum_{l=1}^{r} \left(c_{il}^m c_{jk}^l + c_{kl}^m c_{ij}^l + c_{jl}^m c_{ki}^l\right) = 0 \quad (1 \leqslant i, j, k, l, m \leqslant r). \qquad (22)$$

Обратно [1]), если (21) и (22) выполнены, то существует система инфинитезимальных преобразований, удовлетворяющая соотношениям (19), откуда возникает группа преобразований, зависящих от r параметров (другими словами, линейные комбинации с постоянными коэффициентами инфинитезимальных преобразований X_k порождают алгебру Ли, и всякая конечномерная алгебра Ли может быть получена таким способом).

Эти результаты дополняются изучением вопросов об изоморфизме. Две группы преобразований называются *подобными*, если существует переход от одной к другой посредством двух обратимых преобразований координат, производящихся над переменными и параметрами соответственно. С самого начала своих исследований Ли естественно пришел к этому понятию в связи с определением „канонических параметров“. Он показывает, что две группы являются подобными, если посредством преобразования переменных можно совместить инфинитезимальные преобразования одной группы с инфинитезимальными преобразованиями другой [IV, т. 1, стр. 329]. Для этого необходимо, чтобы

[1]) Это обращение было получено не без труда. Первое доказательство, приводимое Ли [III,e)], состоит в переходе к присоединенной группе и в действительности состоятельно лишь в частном случае, когда центр данной алгебры Ли есть {0}. Ли дает затем два общих доказательства [IV, т. 2, гл. XVII, и т. 3, стр. 599—604]; весьма примечательно, что первое из них основано на контактных преобразованиях и Ли находит его более естественным, нежели второе.

алгебры Ли были изоморфны. Ли формулирует это условие, говоря, что группы оказываются „*gleich zusammengesetzt*“; но условие это не является достаточным, и целая глава [IV, т. 1, гл. 19] посвящена нахождению дополнительных условий, обеспечивающих „подобие“ групп. С другой стороны, теория групп подстановок располагала понятием „голоэдрического изоморфизма“ двух групп подстановок (означавшим изоморфизм нижележащих „абстрактных групп“). Ли переносит это понятие на группы преобразований и показывает, что две такие группы „голоэдрически изоморфны“ тогда и только тогда, когда изоморфны их алгебры Ли [IV, т. 1, стр. 418]. В частности, всякая группа преобразований голоэдрически изоморфна каждой из своих групп параметров. Это показывает, что при изучении структуры группы „переменные“, которые она преобразует, играют несущественную роль, и в действительности все сводится к алгебре Ли [1]).

Неизменно руководствуясь аналогией с группами подстановок, Ли вводит понятия подгрупп, нормальных подгрупп, „мериэдрических изоморфизмов“ (сюръективных гомоморфизмов) и показывает, что им отвечают соответственно подалгебры, идеалы и сюръективные гомоморфизмы алгебр Ли. Очень скоро, впрочем, Ли нашел важный частный случай „мериэдрического изоморфизма“ — присоединенное представление — и выяснил его связь с центром группы [III,e)]. При доказательстве этих результатов, равно как и фундаментальных теорем, основным средством служит теорема Якоби — Клебша, дающая условие полной интегрируемости дифференциальной системы определенного вида (одна из форм так называемой „теоремы Фробениуса“). Ли, впрочем, приводит для нее новое доказательство, использующее однопараметрические группы [IV, т. 1, гл. 6].

Понятия транзитивности и примитивности, столь важные для групп подстановок, так же естественно возникают в рамках теории групп преобразований. В трактате Ли — Энгеля они подвергаются детальному изучению [IV, т. 1, гл. 13 и *далее*]; замечены и связи между стабилизаторами точек и понятием однородного пространства (насколько это было возможно без обращения к глобальной точке зрения) [IV, т. 1, стр. 425].

Наконец, словарь дополняется в [IV] введением понятий производной группы и разрешимой группы (последнюю Ли называет „интегрируемой группой“; эта терминология, подсказанная теорией дифференциальных уравнений, останется в употреблении

[1]) Аналогичную эволюцию можно отметить и в истории развития теории „абстрактных“, в частности конечных, групп. Поначалу они были определены как группы преобразований, но уже Кэли заметил, что главное — то, как преобразования перемножаются между собой, а не природа конкретного представления данной группы в виде группы подстановок некоторых объектов.

вплоть до работ Г. Вейля) [IV, т. 1, стр. 261, и т. 3, стр. 678—679]. Соотношения, которые имеют место между коммутаторами групповых преобразований и коммутаторами инфинитезимальных преобразований, Ли заметил, впрочем, уже в 1883 г. [III, т. 5, стр. 358].

Другие доказательства основных теорем

В [VIII] Ф. Шур показывает, что в канонических координатах функции ψ_{ik} из системы (15) удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\frac{d}{dt}(t\psi_{ik}(ta)) = \delta_{ik} + \sum_{j,l} c^k_{jl} t a_l \psi_{ij}(ta). \tag{23}$$

Эти уравнения интегрируются и приводят к формуле, эквивалентной нашей формуле

$$\varpi(X) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{(n+1)!} (\mathrm{ad}(X))^n$$

из гл. III, § 6, n°4, предложение 12; в частности, в канонических координатах функции ψ_{ij} продолжаются до целых функций от параметров a_k. Ф. Шур выводит отсюда результат, уточняющий одно замечание, сделанное ранее Ли: если в определении (4) групп преобразований предполагать лишь, что функции f_i принадлежат классу C^2, то группа голоэдрически изоморфна некоторой аналитической группе [1]). Вслед за исследованиями по интегрированию дифференциальных систем Э. Картан [XII, т. II_2, стр. 371] вводит в 1904 г. пфаффовы формы

$$\omega_k = \sum_{i=1}^{r} \psi_{ki}\, da_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant r) \tag{25}$$

(в обозначениях формулы (15)), названные позднее *формами Маурера — Картана*. Условия (17) Маурера могут быть записаны тогда в виде

$$d\omega_k = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} c^k_{ij} \omega_i \wedge \omega_j.$$

---

[1]) В [III, i)] Ли уже анонсировал без доказательства один результат такого рода. К этому его привели исследования по основаниям геометрии („проблема Гельмгольца“), в ходе которых Ли заметил неестественность предположений аналитичности.

Результат Ф. Шура побудил Гильберта в 1900 г. поставить вопрос о справедливости этого заключения в предположении только непрерывности функций f_i („5-я проблема Гильберта“). Эта задача породила многочисленные исследования. Наиболее полным результатом в этом круге идей является следующая теорема, доказанная А. Глисоном, Д. Монтгомери и Л. Зиппином: всякая топологическая локально компактная группа обладает открытой подгруппой, являющейся проективным пределом групп Ли. Отсюда вытекает, что всякая локально евклидова группа есть группа Ли. Подробности по этому поводу см. в книге [XLI].

Э. Картан показывает, что теория конечных непрерывных групп может быть развита на основе форм ω_k, и устанавливает эквивалентность этого подхода и подхода Ли. Но для самого Э. Картана интерес к этому методу заключен прежде всего в том, что он распространяется на „бесконечные непрерывные группы“, теорию которых Э. Картан продвигает значительно дальше Ли, а также в том, что этот метод позволяет построить картановскую теорию обобщенного „подвижного репера“.

IV. Теория алгебр Ли

После открытия соответствия между группами преобразований и алгебрами Ли теория принимает более отчетливый алгебраический характер, и основное внимание концентрируется на углубленном изучении алгебр Ли[1]).

Первый и короткий период, с 1888 по 1894 г., отмеченный работами Энгеля, его ученика Умлауфа и особенно Киллинга и Э. Картана, приводит к ряду ярких результатов о комплексных алгебрах Ли. Мы уже отметили выше, что понятие разрешимой алгебры Ли принадлежало самому Ли, доказавшему (в комплексном случае) теорему о приведении линейных разрешимых алгебр Ли к треугольному виду [IV, т. 1, стр. 270][2]). Киллинг замечает [XI], что во всякой алгебре Ли имеется наибольший разрешимый идеал (называемый теперь радикалом) и что фактор алгебры Ли по ее радикалу имеет нулевой радикал. Алгебры Ли с нулевым радикалом он называет *полупростыми* и доказывает, что они являются произведениями простых алгебр (последнее понятие было уже введено Ли, который установил простоту „классических алгебр Ли“ [IV, т. 3, стр. 682]).

С другой стороны, Киллинг вводит для алгебры Ли характеристическое уравнение $\det(\mathrm{ad}(x)-\omega.1)=0$, которое Ли уже встречал при изучении подалгебр Ли размерности 2, содержащих данный элемент некоторой алгебры Ли. Мы отсылаем к другим историческим очеркам настоящей книги за анализом методов, с помощью которых Киллинг, глубоко исследовав свойства корней характеристического уравнения для элемента „общего положения“ в полупростой алгебре, пришел к наиболее замеча-

[1]) Термин „алгебра Ли“ был введен Г. Вейлем в 1934 г. (в своих работах 1925 г. он употреблял выражение „инфинитезимальная группа“). До этого часто говорили просто об „инфинитезимальных преобразованиях $X_1f, \ldots, X_rf$“ рассматриваемой группы, что Ли и Энгель часто укорачивали до слов „группа $X_1f, \ldots, X_rf$“!

[2]) С разрешимыми (а в действительности нильпотентными) группами Ли встретился почти в самом начале своих исследований [III, f)].

тельному из своих результатов — полной классификации (комплексных) простых алгебр Ли[1]).

Киллинг доказывает, что производная алгебра разрешимой алгебры имеет „ранг 0“ (это означает, что ad x нильпотентен для всякого элемента x из алгебры). Спустя короткое время Энгель показывает, что алгебры „ранга 0“ разрешимы (данное утверждение по существу есть то, что мы называли теоремой Энгеля в гл. I, § 4, n° 2). В своей диссертации Э. Картан вводит, с другой стороны, то, что теперь называют „формой Киллинга“, и устанавливает два фундаментальных критерия, характеризующих с помощью этой формы разрешимые и полупростые алгебры Ли.

Киллинг [XI, IV] высказал утверждение, что производная алгебра всякой алгебры Ли есть сумма своего радикала, который нильпотентен, и некоторой полупростой алгебры. Чуть позже Э. Картан анонсировал без доказательства [XII, т. 1_1, стр. 104], что, более общо, всякая алгебра Ли есть сумма своего радикала и некоторой полупростой подалгебры. Единственным в этом направлении результатом, полностью в то время проверенным, была теорема Энгеля, согласно которой во всякой неразрешимой алгебре Ли существует простая подалгебра Ли размерности 3. Первое опубликованное доказательство утверждения Картана для комплексных алгебр Ли принадлежит Леви [XVIII]; иное доказательство (справедливое также в вещественном случае) было дано Уайтхедом в 1936 г. [XXVI, a)]. В 1942 г. А. И. Мальцев дополнил этот результат теоремой единственности, с точностью до сопряженности, „сечений Леви“.

Начиная с первых своих работ Ли задавался проблемой изоморфизма произвольной алгебры Ли с некоторой линейной алгеброй Ли. Ему показалось было, что он решил этот вопрос положительно, рассмотрев присоединенное представление (отсюда он вывел и доказательство своей „третьей теоремы“) [III, e)]. Он вскоре понял, что его доказательство было состоятельно лишь для алгебр Ли с нулевым центром; после этого проблема долгое время оставалась открытой и была утвердительно решена И. Д. Адо в 1935 г. [XXVII]. Ли также по существу поставил проблему нахождения линейных представлений простой алгебры Ли, имеющих минимальную размерность, и решил эту задачу для классических алгебр. В своей диссертации Картан решает

[1]) С той оговоркой, что Киллинг нашел две исключительные алгебры размерности 52, факт изоморфизма которых от него ускользнул. (Речь идет только о комплексных простых алгебрах Ли, поскольку в то время более общая постановка проблемы не рассматривалась; на самом деле методы Киллинга проходят для всякого алгебраически замкнутого поля характеристики 0.)

эту проблему для исключительных простых алгебр[1]); методы, которые он при этом использовал, будут спустя двадцать лет им обобщены для получения всех неприводимых представлений вещественных или комплексных простых алгебр Ли.

Свойство полной приводимости линейного представления впервые, по-видимому, обнаружил (в геометрической форме) Штуди. В рукописи, оставшейся неопубликованной, но цитируемой в [IV, т. 3, стр. 785—788], он проверяет это свойство для линейных представлений алгебры Ли группы $\mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$ и получает частичные результаты для $\mathbf{SL}(3, \mathbf{C})$ и $\mathbf{SL}(4, \mathbf{C})$. Ли и Энгель высказывают в связи с этим предположение, что теорема о полной приводимости верна для $\mathbf{SL}(n, \mathbf{C})$ при произвольном n. Полная приводимость линейных представлений полупростых алгебр Ли была установлена Г. Вейлем в 1925 г.[2]) с помощью метода глобальной природы (см. ниже). Первое алгебраическое доказательство было найдено в 1935 г. Казимиром и Ван дер Варденом [XXXII]. Другие алгебраические доказательства предложили затем Р. Брауэр [XXXI] (мы воспроизвели именно это доказательство) и Уайтхед [XXVI, b)].

Наконец, в ходе своих исследований по экспоненциальному отображению (см. ниже) А. Пуанкаре [XIV, т. 3] рассматривает ассоциативную алгебру дифференциальных операторов произвольного порядка, порожденную операторами некоторой алгебры Ли. По сути дела он доказывает, что если $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ есть базис в алгебре Ли, то ассоциативная алгебра, порожденная этими элементами, допускает в качестве базисных элементов некоторые симметрические функции от (X_i) (суммы некоммутативных „мономов", каждая из которых состоит из членов, полученных из некоторого монома всевозможными перестановками множителей). Основа доказательства Пуанкаре имеет алгебраический характер и позволяет определить структуру универсальной обертывающей алгебры, абстрактное определение которой мы привели в гл. I. Аналогичные доказательства были даны в 1937 г. Биркгофом [XXIX, b)] и Виттом [XXX][3]).

Авторы большинства процитированных выше работ ограничиваются вещественными или комплексными алгебрами Ли, кото-

---

[1]) Точка зрения Картана состоит в том, чтобы изучать алгебры Ли, являющиеся нетривиальными расширениями некоторой простой алгебры Ли с помощью (коммутативного) радикала, имеющего минимальную размерность.

[2]) Г. Вейль замечает в связи с этим, что данная Э. Картаном конструкция неприводимых представлений неявно использует это свойство.

[3]) Первым использованием дифференциальных операторов высшего порядка, порожденных элементами X_i, является, несомненно, применение „оператора Казимира" в доказательстве теоремы о полной приводимости. После 1950 г. исследования И. М. Гельфанда и его школы, с одной стороны, и Хариш-Чандры — с другой, по бесконечномерным линейным представлениям вывели эти операторы на первый план.

рые одни лишь соответствуют группам Ли в обычном смысле. Изучение алгебр Ли над полем, отличным от **R** или **C**, было предпринято Джекобсоном [XXVIII, a)], который показал, что почти все классические результаты (т. е. результаты гл. I) остаются в силе для произвольного поля характеристики нуль.

V. Экспоненциальное отображение и формула Хаусдорфа

Первые исследования по экспоненциальному отображению принадлежат Штуди и Энгелю. Энгель [IX, b)] замечает, что экспоненциальное отображение не является сюръективным для **SL** (2, **C**) $\left(\text{например, } \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right.$ не является экспонентой какой-либо матрицы из алгебры Ли этой группы, если $\left.a \neq 0\right)$, но что оно сюръективно для **GL** (n, **C**), а стало быть, для **PGL** (n, **C**) (последнее обстоятельство было уже отмечено Штуди для $n=2$). Таким образом, **SL** (2, **C**) и **PGL** (2, **C**) доставляют пример двух локально изоморфных групп, которые, однако, с глобальной точки зрения сильно различаются. Энгель показывает также, что экспоненциальное отображение сюръективно для остальных классических групп, если к ним присоединить гомотетии. Эти исследования возобновили и продолжили Маурер, Штуди и др., не добавив, однако, ничего существенно нового.

В 1899 г. А. Пуанкаре [XIV, т. 3, стр. 169—172 и 173—212] предпринимает изучение экспоненциального отображения с иных позиций. По-видимому, его труды написаны в спешке, ибо зачастую он утверждает, что всякий элемент связной группы лежит в образе экспоненциального отображения, и в то же время в других местах приводит противоречащие примеры. Результаты Пуанкаре относятся главным образом к присоединенной группе: он показывает, что полупростой элемент такой группы G может быть экспонентой некоторого бесконечного множества элементов из алгебры Ли $L(G)$, тогда как не полупростой элемент может вообще не быть экспонентой. Если никакое из ненулевых собственных значений линейного преобразования $\operatorname{ad}(X)$ не является кратным числа $2\pi i$, то exp этально в X. Он доказывает также, что если переменные элементы U и V описывают петли в $L(G)$ и если определять W по непрерывности из условия $e^U \cdot e^V = e^W$, то мы не обязаны возвратиться к исходному значению элемента W. Пуанкаре пользуется формулой вычетов, которая в основном сводится к тому, что

$$\Phi(\operatorname{ad} X) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\Phi(\xi)\, d\xi}{\xi - \operatorname{ad} X},$$

где $\operatorname{ad} X$ — полупростой элемент, ненулевые собственные значения которого имеют кратность 1, Φ — степенной ряд с достаточно большим радиусом сходимости и интегрирование ведется вдоль контура, охватывающего собственные значения элемента $\operatorname{ad} X$. Он исследует также, что происходит, когда X стремится к некоторому преобразованию с кратными собственными значениями.

Отыскание выражения элемента W в виде функции от U и V при условии, что $e^U \cdot e^V = e^W$, составляет предмет двух мемуаров Кэмпбелла [XIII], которые появились чуть раньше работы Пуанкаре. Как пишет немного позднее Бейкер, «... *теория Ли наводит на мысль, что произведение $e^U e^V$ представляется в виде e^W, где W есть некоторый ряд коммутаторов от U и V* ...». Последующие работы на эту тему ставили своей целью уточнить это утверждение и найти явную формулу (или метод построения) для W („формула Хаусдорфа"). После Кэмпбелла и Пуанкаре Паскаль, Бейкер [XV] и Хаусдорф [XVI] возвращаются к этому вопросу; каждый из них полагает, что доказательства его предшественников неубедительны; основная трудность состоит в том, что понимать под „альтернантами": идет ли речь об элементах той частной алгебры Ли, которую мы рассматриваем, или же об универсальных „символических" выражениях? Ни Кэмпбелл, ни Пуанкаре, ни Бейкер по этому вопросу ясно не высказываются. Напротив, мемуар Хаусдорфа является совершенно строгим; Хаусдорф работает сначала с алгеброй ассоциативных формальных рядов от конечного числа (некоммутирующих) неизвестных и рассматривает U, V, W как элементы этой алгебры. Он доказывает существование элемента W с помощью некоторого дифференциального уравнения; аналогичный прием применялся его предшественниками. Такого же рода аргументы служат Хаусдорфу при доказательстве сходимости ряда, когда он заменяет в нем неизвестные элементами некоторой конечномерной алгебры Ли. Как заметили Бейкер и, независимо от него, Пуанкаре, этот результат дает доказательство третьей теоремы Ли; он проливает свет на связь между группами и алгебрами Ли, например, в том, что касается группы коммутаторов.

В 1947 г. Е. Б. Дынкин [XXXIX] возобновляет изучение этого вопроса и получает явный вид коэффициентов в формуле Хаусдорфа, рассматривая сразу нормированную алгебру Ли (конечной либо бесконечной размерности над $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ или некоторым ультраметрическим полем) [1]).

[1]) Распространение на ультраметрический случай классического метода мажорант невозможно без принятия некоторых предосторожностей ввиду асимптотического поведения p-адического абсолютного значения числа $\frac{1}{n}$, когда n стремится к бесконечности.

VI. Линейные представления и глобальные группы Ли

Ни одна из работ, обсуждавшихся до сих пор, не поднимала открыто проблему определения и изучения глобальных групп Ли. Первые шаги в этом направлении были сделаны Г. Вейлем. Он отправляется от двух теорий, до сих пор развивавшихся независимо: теории линейных представлений полупростых комплексных алгебр Ли, принадлежащей Э. Картану, и теории Фробениуса линейных представлений конечных групп, незадолго до того перенесенной на ортогональные группы И. Шуром, который использовал одну идею Гурвица. Последний показал [XVII], как можно образовывать инварианты для ортогональной или унитарной группы, заменяя усреднение по конечной группе интегрированием по инвариантной мере. Гурвиц заметил также, что при применении этого метода к унитарной группе получаются инварианты полной линейной группы, что явилось первым примером „унитарного трюка". В 1924 г. Шур [XX] использует этот подход в доказательстве полной приводимости представлений ортогональной группы $\mathbf{O}(n)$ или унитарной группы $\mathbf{U}(n)$ посредством построения инвариантной положительно определенной невырожденной эрмитовой формы. Он выводит отсюда с помощью „унитарного трюка" полную приводимость голоморфных представлений групп $\mathbf{O}(n, \mathbf{C})$ и $\mathbf{SL}(n, \mathbf{C})$, устанавливает соотношения ортогональности для характеров групп $\mathbf{O}(n)$ и $\mathbf{U}(n)$ и находит характеры группы $\mathbf{O}(n)$. Г. Вейль сразу же распространяет этот метод на полупростые комплексные алгебры Ли [XXI]. Он показывает, что такая произвольная алгебра $\mathfrak{g}$ обладает „компактной вещественной формой" (это означает, что она получается из некоторой алгебры $\mathfrak{g}_0$ над $\mathbf{R}$, обладающей компактной присоединенной группой G_0, посредством расширения скаляров с $\mathbf{R}$ до $\mathbf{C}$). Более того, Г. Вейль показывает, что фундаментальная группа группы G_0 конечна, стало быть, универсальная накрывающая[1]) группы G_0 компактна. Он выводит отсюда, видоизменяя соответствующим образом прием Шура, полную приводимость представлений алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и находит также глобальным методом их характеры. В письме к Шуру (Sitzungsber., Berlin, 1924, 338 – 343) Г. Вейль резюмирует результаты Картана, которых Шур не знал (см. [XX], стр. 299, подстрочное примечание) и сравнивает оба подхода. Метод Картана приводит к нахождению

---

[1]) Г. Вейль не определяет явно это понятие, которым он владел со времени обработки своего курса по римановым поверхностям (1913). Определения топологической группы и „непрерывной" (т. е. локально изоморфной евклидову пространству) группы, а также конструкцию универсальной накрывающей такой группы впервые дал О. Шрейер [XXII] в 1926 — 1927 гг.

всех голоморфных представлений односвязной группы с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$; в случае ортогональной группы на таком пути получаются также представления двулистной накрывающей (названной впоследствии спинорной группой), которые ускользнули от Шура. С другой стороны, метод Шура имеет то преимущество, что с его помощью доказывается полная приводимость и получаются явные формулы характеров.

После работ Г. Вейля Э. Картан определенно становится на глобальную точку зрения в своих исследованиях по симметрическим пространствам и группам Ли. Именно этот подход положен в основу его изложения в 1930 г. [XII, т. I_2, стр. 1165—1225] теории „конечных непрерывных групп". Мы находим здесь, в частности, первое доказательство глобального варианта третьей основной теоремы (существование группы Ли с данной алгеброй Ли). Картан показывает также, что всякая замкнутая подгруппа вещественной группы Ли сама есть группа Ли (гл. III, § 8, n° 2, теорема 2), что обобщает один результат Дж. фон Неймана о замкнутых подгруппах линейной группы [XXIII]. В мемуаре фон Неймана доказано также, что всякое непрерывное представление полупростой комплексной группы вещественно-аналитично.

После этих работ теория групп Ли в „классическом" смысле (т. е. конечномерных групп над **R** или **C**) в своих общих чертах приобрела более или менее окончательный вид. Первое детальное изложение ее было дано Л. С. Понтрягиным в его книге по топологическим группам [XXXVI]. В ней сохранен еще подход, достаточно близкий к подходу Ли, но проведено тщательное разграничение локальной и глобальной ситуаций. Вслед за книгой Понтрягина последовала книга Шевалле [XXXVIII], которая содержит также первое систематическое обсуждение теории аналитических многообразий и внешнего дифференциального исчисления. „Инфинитезимальные преобразования" Ли принимают здесь вид векторных полей, и алгебра Ли группы Ли G отождествляется с пространством левоинвариантных векторных полей на G. Аспект „групускул" и аспект „групп преобразований" оставлен здесь в стороне.

VII. Расширения понятия группы Ли

В наши дни жизненность теории Ли проявляется в разнообразии ее приложений (к топологии, дифференциальной геометрии, арифметике и т. д.), а также в возникновении параллельных теорий, в которых нижележащая структура дифференцируемого многообразия заменена родственной структурой (p-адического многообразия, алгебраического многообразия, схемы, формальной схемы, ...). Мы не собираемся излагать

здесь историю всех этих обобщений и ограничимся теми из них, которые изложены в гл. III — банаховыми группами Ли и p-адическими группами Ли.

а) Банаховы группы Ли

Речь идет о „бесконечномерных" группах Ли. С локальной точки зрения окрестность элемента 0 в евклидовом пространстве заменяется окрестностью элемента 0 в некотором банаховом пространстве. Именно это сделал Г. Биркгоф в 1936 г. [XXIX, a)], придя таким путем к понятию *полной нормированной* алгебры Ли и установлению ее соответствия с „групускулой", определенной на открытом подмножестве некоторого банахова пространства. Около 1950 г. Е. Б. Дынкин дополнил результаты Биркгофа распространением на этот случай формулы Хаусдорфа (см. выше).

Определения и результаты Биркгофа и Дынкина имеют локальную природу. Вплоть до последнего времени как будто не было попыток явно изложить соответствующую глобальную теорию, несомненно, ввиду отсутствия приложений [1]).

б) p-адические группы Ли

Подобные группы появились впервые в 1907 г. в работах Гензеля [XIX] по p-адическим аналитическим функциям (определяемым разложениями в степенные ряды). Гензель изучает в особенности экспоненциальное и логарифмическое отображения. Несмотря на a priori необычное поведение соответствующих рядов (например, экспоненциальный ряд сходится не всюду), их основные функциональные свойства остаются в силе, что доставляет *локальный изоморфизм* между аддитивной и мультипликативной группами поля $\mathbf{Q}_p$ (или, более общо, произвольного полного ультраметрического поля характеристики нуль).

В работах А. Вейля [XXXIII] и Лютца [XXXIV] по p-адическим эллиптическим кривым (1936 г.) говорится также о коммутативных (но на этот раз не линейных) группах. Помимо арифметических приложений, мы находим здесь конструкцию локального изоморфизма рассматриваемой группы с аддитивной группой, основанную на интегрировании некоторой инвариантной дифференциальной формы. Этот метод применим также

[1]) Если мы, невзирая на эту нехватку приложений, включили все же „банаховы" группы в гл. III, то это потому, что банаховы многообразия все чаще находят применение в анализе (причем даже при изучении конечномерных многообразий), а также и в силу того, что это обобщение не доставляет дополнительных трудностей.

к абелевым многообразиям, как замечает немного позднее Шаботи, использующий его, не вдаваясь в дальнейшие объяснения, для доказательства одного частного случая „гипотезы Морделла" [XXXV].

С этого момента становится ясно, что *локальная* теория групп Ли применима без особых изменений в p-адическом случае. Основные теоремы, составляющие „словарь" группы Ли — алгебры Ли, устанавливаются в 1942 г. в диссертации Хука [XXXVII], ученика Шевалле. Его работа содержит также p-адический аналог теоремы Э. Картана о замкнутых подгруппах вещественных групп Ли.

Позже Лазар [XLII, b)] находит более точную форму „словаря" для компактных аналитических групп над $\mathbf{Q}_p$. Он показывает, что наличие p-адической аналитической структуры на компактной группе G тесно связано с определенного рода фильтрациями на G, и приводит различные приложения (например, к когомологиям группы G). Одним из средств, используемых Лазаром, является улучшение результата Е. Б. Дынкина о сходимости p-адического ряда Хаусдорфа [XLII, a)].

VIII. Свободные алгебры Ли

Нам остается сказать еще о ряде работ по *алгебрам Ли*, которые на первый взгляд имеют весьма отдаленную связь с теорией *групп Ли*; эти исследования зато имеют важные приложения в теории „абстрактных", преимущественно нильпотентных групп.

Истоки этого направления лежат в работе Ф. Холла [XXIV], появившейся в 1932 г. В ней идет речь вовсе не об алгебрах Ли: Ф. Холл имеет в виду исследование некоторого класса p-групп, которые он называет „регулярными". Но это приводит его к детальному изучению последовательных коммутаторов и нижнего центрального ряда группы; попутно он устанавливает вариант тождества Якоби (см. гл. II, § 4, n° 4, формула (20)), а также „формулу Холла"

$$(xy)^n = x^n y^n (x, y)^{n(1-n)/2} \ldots \quad \text{(см. гл. II, § 5, упражнение 9).}$$

Немного позднее (в 1935 — 1937 гг.) вышли фундаментальные работы Магнуса [XXV, a) и b)] и Витта [XXX]. В [XXV, a)] Магнус использует ту же алгебру $\widehat{A}$ формальных рядов, что и Хаусдорф (она называется с тех пор „алгеброй Магнуса"). Магнус погружает в нее свободную группу F и привлекает естественную фильтрацию алгебры $\widehat{A}$ для получения убывающего ряда (F_n) подгрупп в F; это один из первых примеров *фильтрации*. Он высказывает гипотезу, что под-

группы F_n совпадают с членами нижнего центрального ряда группы F. Гипотеза Магнуса доказана в его втором мемуаре [XXV, b)]; там же он осуществляет в явном виде сближение своих идей с идеями Ф. Холла и определяет свободную алгебру Ли L (как подалгебру в $\hat{A}$), причем доказывает, по существу, что она отождествляется с градуированной алгеброй Ли, ассоциированной с фильтрацией $(C^nF)_{n\geqslant 1}$ группы F. В [XXX] Витт дает ряд дополнений к этому результату. Он как раз показывает, что универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли L есть свободная ассоциативная алгебра, и сразу выводит отсюда ранг однородных компонент алгебры Ли L („формула Витта").

Что касается базиса свободной алгебры Ли L, известного как „базис Холла" (см. гл. II, § 2, n° 11), то, по-видимому, его определение появляется впервые лишь в 1950 г. в заметке М. Холла [XL], хотя оно и содержалось неявно в цитированных выше работах Ф. Холла и В. Магнуса.

БИБЛИОГРАФИЯ

(I) F. Klein et S. Lie: a) Sur une certaine famille de courbes et surfaces, *C. R. Acad. Sci.*, **70** (1870), 1222—1226 et 1275—1279 (=[II, p. 416—420] et [III, t. 1, p. 78—85]); b) Über diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenen System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen, *Math. Ann.*, **4** (1871), 50—84 (=[II, p. 424—459] et [III, t. 1, Abh. XIV, p. 229—266]).

(II) F. Klein, Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bd. I, Berlin (Springer), 1921.

(III) S. Lie, Gesammelte Abhandlungen, 7 vol., Leipzig (Teubner): a) Über die Reziprozitätsverhältnisse des Reyeschen Komplexes, t. I, Abh. V, p. 68—77 (=*Gött. Nach.* (1870), 53—66); b) Über eine Klasse geometrischer Transformationen, t. I, Abh. XII, p. 153—214 (=*Christiana For.* (1871), 182—245); c) Kurzes Resume mehrerer neuer Theorien, t. V, Abh. I, p. 1—4 (=*Christiana For.* (1872), 24—27); d) Über partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, t. V, Abh. VII, p. 32—63 (=*Christiana For.* (1873), 16—51); e) Theorie der Transformationsgruppen II, t. V, Abh. III, p. 42—75 (=*Archiv f. Math.*, **1** (1876), 152—193); f) Theorie der Transformationsgruppen III, t. V, Abh. IV, p. 78—133 (=*Archiv f. Math.*, **3** (1878), 93—165); g) Untersuchungen über Differentialgleichungen III, t. V, Abh. XII, p. 311—313 (=*Christiana For.* (1883), n° 10, 1—4); h) Untersuchungen über Transformationsgruppen II, t. V, Abh. XXII, p. 507—551 (=*Archiv f. Math.*, **10** (1886), 353—413); i) Beiträge zur allgemeinen Transformationenstheorie, t. VI, Abh. V, p. 230—236 (=*Leipziger Ber.* (1888), 14—21).

(IV) S. Lie und F. Engel, Theorie der Transformationsgruppen, 3 vol., Leipzig (Teubner), 1888—1893.

(V) J. J. Sylvester, Collected Mathematical Papers, 4 vol., Cambridge, 1904—1911.

(VI) A. Cayley, Collected Mathematical Papers, 13 vol., Cambridge, 1889—1898.

(VII) C. Jordan, Mémoire sur les groupes de mouvements, *Annali di Math.*, **11** (1868—1869), 167—215 et 332—345 (=*Œuvres*, t. IV, p. 231—302).

(VIII) F. Schur: a) Zur Theorie der aus Haupteinheiten gebildeten Komplexen, *Math. Ann.*, **33** (1889), 49—60; b) Neue Begründung der Theorie der endlichen Transformationsgruppen, *Math. Ann.*, **35** (1890), 161—197; c) Zur Theorie der endlichen Transformationsgruppen, *Math. Ann.*, **38** (1891), 273—286; d) Über den analytischen Character der eine endliche continuierliche Transformationsgruppe darstellende Funktionen, *Math. Ann.*, **41** (1893), 509—538.

(IX) F. Engel: a) Übr die Definitionsgleichung der continuierlichen Transformationsgruppen, *Math. Ann.*, **27** (1886), 1—57; b) Die Erzeugung der endlichen Transformationen einer projektiven Gruppe

durch die infinitesimalen Transformationen der Gruppe, I, *Leipziger Ber.*, **44** (1892), 279—296, II (mit Beiträgen von E. Study), *ibid.*, **45** (1893), 659—696.

(X) L. Maurer, Über allgemeinere Invarianten-Systeme, *Sitzungsber. München*, **18** (1888), 103—150.

(XI) W. Killing, Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen: I) *Math. Ann.*, **31** (1888), 252—290; II) *ibid.*, **33** (1889), 1—48; III) *ibid.*, **34** (1889), 57—122; IV) *ibid.*, **36** (1890), 161—189.

(XII) E. Cartan, Œuvres complétes, 6 vol., Paris (Gauthier-Villars), 1952—1954.

(XIII) J. E. Campbell: a) On a law of combination of operators bearing on the theory of continuous transformation groups, *Proc. London Math. Soc.*, (1), **28** (1897), 381—390; b) On a law of combination of operators (second paper), *ibid.*, **29** (1898), 14—32.

(XIV) H. Poincaré, *Œuvres*, 11 vol., Paris (Gauthier-Villars), 1916—1956.

(XV) H. F. Baker, Alternants and continuous groups, *Proc. London Math. Soc.*, (2), **3** (1905), 24—47.

(XVI) F. Hausdorff, Die symbolische Exponentialformel in der Gruppentheorie, *Leipziger Ber.*, **58** (1906), 19—48.

(XVII) A. Hurwitz, Über die Erzeugung der Invarianten durch Integration, *Gött. Nachr.* (1897), p. 71—90 (=Math. Werke, t. II, p. 546—564).

(XVIII) E. E. Levi, Sulla struttura dei Gruppi finiti e continui, *Atti Acc. Sci. Torino*, **40** (1905), 551—565 (=Opere, t. I, p. 101—115).

(XIX) K. Hensel, Über die arithmetischen Eigenschaften der Zahlen, *Jahresber. der D. M. V.*, **16** (1907), p. 299—319, 388—393, 474—496.

(XX) I. Schur, Neue Anwendungen der Integralrechnung auf Probleme der Invariantentheorie, *Sitzungsber. Berlin*, 1924, p. 189—208, 297—321, 346—355.

(XXI) H. Weyl, Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen, I, *Math. Zeitschr.*, **23** (1925), 271—309; II, *ibid.*, **24** (1926), 328—376; III, *ibid.*, **24** (1926), 377—395 (=Werke, t. 2, p. 543—647).

(XXII) O. Schreier: a) Abstrakte kontinuierliche Gruppen, *Abh. math. Sem. Hamburg*, **4** (1926), 15—32; b) Die Verwandschaft stetiger Gruppen in grossen, *ibid.*, **5** (1927), 233—244.

(XXIII) J. von Neumann, Zur Theorie der Darstellung kontinuierlicher Gruppen, *Sitzungsber. Berlin*, 1927, p. 76—90 (=*Collected Works*, t. I, p. 134—148).

(XXIV) P. Hall, A contribution to the theory of groups of prime power order, *Proc. London Math. Soc.* (3), **4** (1932), 29—95.

(XXV) W. Magnus: a) Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einen speziellen Ring, *Math. Ann.*, **111** (1935), 259—280; b) Über Beziehungen zwischen höheren Kommutatoren, *J. Crelle*, **177** (1937), 105—115.

(XXVI) J. H. C. Whitehead: a) On the decomposition of an infinitesimal group, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **32** (1936), 229—237 (-Mathematical Works, I, p. 281—289); b) Certain equations in the algebra of a semi-simple infinitesimal group, *Quart. Journ. of Math.*, (2), **8** (1937), 220—237 (=Mathematical Works, I., p. 291—308).

(XXVII) И. Д. Адо: a) О представлении конечных непрерывных групп с помощью линейных подстановок, *Казань, Изв. физ.-матем. о-ва* (3), 7 (1934—1935), 1—43; b) Представления алгебр Ли матрицами, *Успехи матем. наук*, сер. 2, **2**, № 6 1947), 159—173.

(XXVIII) N. Jacobson: a) Rational methods in the theory of Lie algebras, *Ann. of Math.*, **36** (1935), 875—881; b) Classes of restricted Lie algebras of characteristic p, II, *Duke Math. Journal*, **10** (1943), 107—121.

(XXIX) G. Birkhoff: a) Continuous groups and linear spaces, *Rec. Math. Moscou*, **1** (1936), 635—642; b) Representability of Lie algebras and Lie groups by matrices, *Ann. of Math.*, **38** (1937), 526—532.

(XXX) E. Witt, Treue Darstellung Leischen Ringe, *J. Crelle*, **177** (1937), 152—160.

(XXXI) R. Brauer, Eine Bedingung für vollständige Reduzibilität von Darstellungen gewöhnlicher und infinitesimaler Gruppen, *Math. Zeitschr.*, **41** (1936), 330—339.

(XXXII) H. Casimir — B. L. van der Waerden, Algebraischer Beweis der vollständigen Reduzibilität der Darstellungen halbeinfacher Liescher Gruppen, *Math. Ann.*, **111** (1935), 1—12.

(XXXIII) A. Weil, Sur les fonctions elliptiques p-adiques, *C. R. Acad. Sci.*, **203** (1936), 22.

(XXXIV) E. Lutz., Sur l'équation $y^2 = x^3 - Ax - B$ dans les çorps p-adiques, *J. Crelle*, **177** (1937), 237—247.

(XXXV) C. Chabauty, Sur les points rationnels des courber algébriques de genre supérieur à l'unité *C. R. Acad. Sci.*, **212** (1941), 882—884.

(XXXVI) Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, 3-е изд., М., Наука, 1973.

(XXXVII) R. Hooke, Linear p-adic groups and their Lie algebras, *Ann. of Math.*, **43** (1942), 641—655.

(XXXVIII) C. Chevalley, *Theory of Lie groups*, Princeton University Press, 1946 [Русский перевод: К. Шевалле, Теория групп Ли, I, М., ГИИЛ, 1948, II, III, М., ИЛ, 1958.]

(XXXIX) Е. Б. Дынкин: а) Вычисление коэффициентов в формуле Кемпбелла — Хаусдорфа, *ДАН СССР*, **57** (1947), 323—326; b) Нормированные алгебры Ли и аналитические группы, *УМН*, **5** (1950), 135—186.

(XL) M. Hall, A basis for free Lie rings and higher commutators in free groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1 (1950), 575—581.

(XLI) D. Montgomery — L. Zippin, Topological Transformation Groups, New York, 1955.

(XLII) M. Lazard: a) Quelques calculs concernant la formule de Hausdorff, *Bull. Soc. Math. France*, **91** (1963), 435—451; b) Groupes analytiques p-adiques, *Publ. Math. I. H. E. S.*, n°26 (1965), 389—603.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Ю. А. Бахтурин

Коалгебры

Определение 1. *Назовем коалгеброй над K множество E, которое наделено*

1° *структурой K-модуля;*

2° *K-линейным отображением $c\colon E \to E \otimes_K E$, называемым копроизведением в E.*

Определение 2. *Пусть E и E' — две коалгебры с копроизведениями c и c'. Морфизмом E в E' называется K-линейное отображение $u\colon E \to E'$, такое, что*

$$(u \otimes u) \circ c = c' \circ u,$$

или, иными словами, такое, что коммутативна следующая диаграмма K-линейных отображений:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "c"'] & E' \arrow[d, "c'"] \\ E \otimes_K E \arrow[r, "u \otimes u"] & E' \otimes_K E' \end{tikzcd}$$

Определение 3. а) *Коалгебра E с копроизведением $c\colon E \to E \otimes_K E$ называется коассоциативной, если коммутативна следующая диаграмма K-линейных отображений*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "c"] \arrow[d, "c"'] & E \otimes_K E \arrow[d, "1_E \otimes c"] \\ E \otimes_K E \arrow[r, "c \otimes 1_E"] & E \otimes_K E \otimes_K E \end{tikzcd} \tag{1}$$

б) *Коалгебра E с копроизведением $c\colon E \to E \otimes_K E$ называется кокоммутативной, если коммутативна следующая диаграмма K-линейных отображений ($\sigma(x \otimes y) = y \otimes x$)*

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[dl, "c"'] \arrow[dr, "c"] & \\ E \otimes_K E \arrow[rr, "\sigma"] & & E \otimes_K E \end{tikzcd} \tag{2}$$

в) *Линейная форма $\gamma\colon E \to K$ на коалгебре E над K с копроизведением $c\colon E \to E \otimes_K E$ называется коединицей, если коммутативны следующие диа-*

граммы (h' *и* h'' — *канонические изоморфизмы*)

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "h'"'] & E \otimes_K E \arrow[d, "\gamma \otimes 1_E"] \\ & K \otimes_K E \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "h''"'] & E \otimes_K E \arrow[d, "1_E \otimes \gamma"] \\ & E \otimes_K K \end{tikzcd}$$

Определение 4. *Назовем биалгеброй над K множество E, которое наделено*

1) *структурой ассоциативной K-алгебры с единицей;*

2) *структурой коассоциативной коалгебры над K с коединицей γ, причем*

3) *копроизведение c: $E \to E \otimes_K E$ является гомоморфизмом алгебры E в K-алгебру $E \otimes_K E$;*

4) *коединица γ коалгебры E является гомоморфизмом K-алгебры E в K-алгебру K, таким, что если e — единица K-алгебры E, то $\gamma(e) = 1$.*

Градуированный K-модуль E называется *градуированной коалгеброй*, если копроизведение c является градуированным степени 0 гомоморфизмом K-модулей E и $E \otimes_K E$, где градуировка на $E \otimes_K E$ индуцирована градуировкой на E.

Биалгебра E называется *градуированной типа* $\mathbf{N}$ или просто градуированной, если E — градуированный K-модуль типа $\mathbf{N}$, причем относительно этой градуировки E — градуированная коалгебра и градуированная K-алгебра, а все упомянутые в определении 4 K-линейные отображения являются градуированными степени 0, причем градуировка на K тривиальна.

Пример. Симметрическая алгебра $S(M)$ модуля M. Пусть Δ: $x \longmapsto (x, x)$ — диагональное отображение $M \to M \times M$, h: $M \times M \to S(M) \otimes_K S(M)$ — отображение, определенное формулой $(x, y) \longmapsto x \otimes_K 1 + 1 \otimes_K y$, $\overline{\Delta}$, $\bar{h}$ — индуцированные гомоморфизмы $\overline{\Delta}$: $S(M) \to S(M \times M)$ и $\bar{h}$: $S(M \times M) \to S(M) \otimes \otimes_K S(M)$. Определим тогда отображение c: $S(M) \to S(M) \otimes S(M)$ формулой $c = \bar{h} \circ \overline{\Delta}$. Задание этого отображения превращает $S(M)$ в коалгебру, причем $c(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$. Если же рассмотреть на $S(M)$ структуру симметрической алгебры M вместе с градуировкой, индуцированной градуировкой K-модуля E, то нетрудно убедиться в том, что $S(M)$ превращается в градуированную биалгебру.

Пусть E — биалгебра с произведением m: $E \otimes E \to E$, копроизведением c: $E \to E \otimes E$, единицей e и коединицей γ: $E \to K$. Гомоморфизм i: $E \to E$, такой, что $i(e) = e$ и оба отображения $m \circ (1_E \otimes i) \circ c$, $m \circ (i \otimes 1_E) \circ c$ равны отображению $x \longmapsto \gamma(x) e$, называется *инверсией* биалгебры E.

Пусть теперь E — коалгебра над K с копроизведением c: $E \to E \otimes_K E$, B — другая K-алгебра с произведением m: $E \otimes E \to E$. В этом случае множество $C = \operatorname{Hom}_K(E, B)$ K-линейных отображений E в B можно превратить в K-алгебру, если произведением двух отображений φ_1, φ_2 назвать отображение $\varphi_1 \circ \varphi_2$, такое, что $(\varphi_1 \circ \varphi_2)(x) = m((\varphi_1 \otimes \varphi_2)(c(x)))$. В случае когда $B = K$, алгебра C называется *дуальной* к E и обозначается через E^*.

Предложение 1. *Пусть E — коалгебра над K. Для того чтобы при любой ассоциативной K-алгебре B K-алгебра $C = \operatorname{Hom}_K(E, B)$ была ассоциативной, необходимо и достаточно, чтобы коалгебра E была коассоциативной.*

Пусть B — ассоциативная K-алгебра и u, v, w — элементы $C = \operatorname{Hom}_K(E, B)$. Обозначим через m_3 K-линейное отображение $B \otimes_K B \otimes_K B \to B$, ставящее

в соответствие элементу $b \otimes b' \otimes b''$ элемент $bb'b''$. По определению произведения в алгебре C отображение $(uv)w$ является композицией отображений

$$E \xrightarrow{c} E \otimes E \xrightarrow{c \otimes 1_E} E \otimes E \otimes E \xrightarrow{u \otimes v \otimes w} B \otimes B \otimes B \xrightarrow{m_3} B,$$

в то время как $u(vw)$ — композиция отображений

$$E \xrightarrow{c} E \otimes E \xrightarrow{1_E \otimes c} E \otimes E \otimes E \xrightarrow{u \otimes v \otimes w} B \otimes B \otimes B \xrightarrow{m_3} B.$$

Отсюда следует, что если диаграмма (1) коммутативна, то алгебра $C = \mathrm{Hom}_K(E, B)$ ассоциативна при любой ассоциативной K-алгебре B. Чтобы установить обратное, достаточно показать, что существует ассоциативная K-алгебра B и три отображения u, v, w из E в B, такие, что отображение $m_3 \circ (u \otimes v \otimes w)$ из $E \otimes E \otimes E$ в B инъективно. Возьмем в качестве B K-алгебру $T(E)$, а в качестве u, v, w — каноническое отображение E в $T(E)$. Отображение $m_3 \circ (u \otimes v \otimes w)$ является тогда инъективным каноническим отображением $E \otimes E \otimes E = T^3(E) \to T(E)$.

Предложение 2. *Пусть E — коалгебра над K. Для того чтобы при любой коммутативной K-алгебре B K-алгебра $C = \mathrm{Hom}_K(E, B)$ была коммутативной, необходимо и достаточно, чтобы коалгебра E была кокоммутативной.*

Пусть B — коммутативная K-алгебра, а u, v — элементы из $C = \mathrm{Hom}_K(E, B)$. По определению произведения в C uv и vu — это соответственно композиции отображений

$$E \xrightarrow{c} E \otimes E \xrightarrow{u \otimes v} B \otimes B \xrightarrow{m} B$$

и

$$E \xrightarrow{c} E \otimes E \xrightarrow{v \otimes u} B \otimes B \xrightarrow{m} B.$$

Отсюда следует, что если диаграмма (2) коммутативна, то алгебра $C = \mathrm{Hom}_K(E, B)$ коммутативна при любой коммутативной K-алгебре B. Чтобы установить обратное, достаточно показать, что существуют коммутативная K-алгебра B и два K-линейных отображения u, v из E в B, такие, что $m \circ (u \otimes v)$: $E \otimes E \to B$ инъективно. Возьмем в качестве B алгебру $S(E \times E)$ и в качестве u (соотв. v) композицию канонического отображения $E \times E \to S(E \times E)$ и отображения $x \longmapsto (x, 0)$ (соотв. $x \longmapsto (0, x)$) модуля E в $E \times E$. Если h: $S(E) \otimes S(E) \to S(E \times E)$ — уже упомянутый в примере канонический изоморфизм (см. также *Алг.*, гл. III, стр. 73, предложение 9) и если λ: $E \to S(E)$ — каноническое отображение, то $h^{-1} \circ m \circ (u \otimes v) = \lambda \otimes \lambda$. Однако $\lambda \otimes \lambda$ инъективно, так как $\lambda(E)$ — прямое слагаемое $S(E)$ (*Алг.*, гл. II, стр. 63, следствие 5).

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Цифры в ссылках указывают последовательно главу, параграф и пункт

УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ

Цифры в ссылках указывают последовательно главу, параграф и пункт (или упражнение)

СВОДКА НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВ КОНЕЧНОМЕРНЫХ АЛГЕБР ЛИ НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ 0

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, $\mathfrak{r}$ — ее радикал, $\mathfrak{n}$ — ее наибольший нильпотентный идеал, $\mathfrak{s}$ — ее нильпотентный радикал, $\mathfrak{k}$ — ортогональное к $\mathfrak{g}$ подпространство относительно формы Киллинга. Тогда $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{k}$ — характеристические идеалы и $\mathfrak{r} \supset \mathfrak{k} \supset \mathfrak{n} \supset \mathfrak{s}$.

(I) *Любое из следующих свойств характеризует полупростые алгебры Ли*:

1) $\mathfrak{r} = \{0\}$; 2) $\mathfrak{n} = \{0\}$; 3) $\mathfrak{k} = \{0\}$; 4) любой коммутативный идеал в $\mathfrak{g}$ равен нулю; 5) алгебра $\mathfrak{g}$ изоморфна прямой сумме простых алгебр Ли; 6) любое конечномерное представление $\mathfrak{g}$ полупросто.

(II) *Любое из следующих свойств характеризует редуктивные алгебры Ли*:

1) $\mathfrak{s} = \{0\}$; 2) $\mathfrak{r}$ — центр $\mathfrak{g}$; 3) $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ полупроста; 4) $\mathfrak{g}$ — прямое произведение полупростой и коммутативной алгебр Ли; 5) присоединенное представление $\mathfrak{g}$ полупросто; 6) $\mathfrak{g}$ обладает конечномерным представлением, таким, что ассоциированная с ним билинейная форма невырожденна; 7) $\mathfrak{g}$ обладает точным конечномерным полупростым представлением.

(III) *Любое из следующих свойств характеризует разрешимые алгебры Ли*:

1) $\mathscr{D}^p\mathfrak{g} = \{0\}$ для достаточно большого p; 2) существует убывающая последовательность $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}_n=\{0\}$ идеалов $\mathfrak{g}$, таких, что алгебры $\mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1}$ коммутативны; 3) существует убывающая последовательность $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}'_0 \supset \mathfrak{g}'_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}'_{n'} = \{0\}$ подалгебр алгебры $\mathfrak{g}$, таких, что $\mathfrak{g}'_{i+1}$ — идеал в $\mathfrak{g}'_i$ и $\mathfrak{g}'_i/\mathfrak{g}'_{i+1}$ коммутативна; 4) существует убывающая последовательность $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}''_0 \supset \mathfrak{g}''_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}''_{n''} = \{0\}$ подалгебр $\mathfrak{g}$, таких, что $\mathfrak{g}''_{i+1}$ — идеал коразмерности 1 в $\mathfrak{g}''_i$; 5) $\mathfrak{k} \supset \mathscr{D}\mathfrak{g}$; 6) $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ нильпотентен.

(IV) *Любое из следующих свойств характеризует нильпотентные алгебры Ли:*

1) $\mathscr{C}^p\mathfrak{g}=\{0\}$ для достаточно большого p; 2) $\mathscr{C}_p\mathfrak{g}=\mathfrak{g}$ для достаточно большого p; 3) существует убывающая последовательность $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0\supset\mathfrak{g}_1\supset\ \ldots\ \supset\mathfrak{g}_p=\{0\}$ идеалов $\mathfrak{g}$, таких, что $[\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}_i]\subset\mathfrak{g}_{i+1}$; 4) существует убывающая последовательность $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}'_0\supset\mathfrak{g}'_1\supset\ \ldots$ $\ldots\ \supset\mathfrak{g}'_{p'}=\{0\}$ идеалов $\mathfrak{g}$, таких, что $[\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}'_i]\subset\mathfrak{g}'_{i+1}$ и $\mathfrak{g}'_i/\mathfrak{g}'_{i+1}$ одномерны; 5) существует целое число i, такое, что $(\mathrm{ad}\,x_1)\circ(\mathrm{ad}\,x_2)\circ\ldots$ $\ldots\circ(\mathrm{ad}\,x_i)=0$ для любых $x_1,\ \ldots,\ x_i$ из $\mathfrak{g}$; 6) для любого $x\in\mathfrak{g}$ эндоморфизм $\mathrm{ad}\,x$ нильпотентен.

(V) $\mathfrak{g}$ коммутативна $\Rightarrow\mathfrak{g}$ нильпотентна $\Rightarrow$ форма Киллинга на $\mathfrak{g}$ равна нулю $\Rightarrow\mathfrak{g}$ разрешима.

$\mathfrak{g}$ коммутативна $\Rightarrow\mathfrak{g}$ редуктивна.

$\mathfrak{g}$ полупроста $\Rightarrow\mathfrak{g}$ редуктивна.

(VI) *Характеризации* $\mathfrak{r}$:

1) $\mathfrak{r}$ — наибольший разрешимый идеал в $\mathfrak{g}$; 2) $\mathfrak{r}$ — наименьший идеал, такой, что $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ полупроста; 3) $\mathfrak{r}$ — единственный разрешимый идеал в $\mathfrak{g}$, такой, что $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ полупроста; 4) $\mathfrak{r}$ — наибольшее подпространство, ортогональное к $\mathscr{D}\mathfrak{g}$ относительно формы Киллинга.

(VII) *Характеризации* $\mathfrak{n}$:

1) $\mathfrak{n}$ — наибольший нильпотентный идеал в $\mathfrak{g}$; 2) $\mathfrak{n}$ — наибольший нильпотентный идеал в $\mathfrak{r}$; 3) $\mathfrak{n}$ есть множество $x\in\mathfrak{r}$, таких, что эндоморфизм $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,x$ нильпотентен; 4) $\mathfrak{n}$ есть множество $x\in\mathfrak{r}$, таких, что $\mathrm{ad}_{\mathfrak{r}}\,x$ нильпотентен; 5) $\mathfrak{n}$ — наибольший идеал в $\mathfrak{g}$, такой, что для всех $x\in\mathfrak{n}$ эндоморфизм $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,x$ нильпотентен; 6) $\mathfrak{n}$ есть множество $x\in\mathfrak{g}$, таких, что $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,x$ принадлежит радикалу ассоциативной алгебры, порожденной 1 и $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}\,y$ $(y\in\mathfrak{g})$.

(VIII) *Характеризации* $\mathfrak{s}$:

1) $\mathfrak{s}$ есть пересечение ядер точных конечномерных неприводимых представлений $\mathfrak{g}$; 2) $\mathfrak{s}$ — наименьшее из ядер точных конечномерных вполне приводимых представлений $\mathfrak{g}$; 3) $\mathfrak{s}$ есть пересечение наибольших идеалов нильпотентности конечномерных представлений $\mathfrak{g}$; 4) $\mathfrak{s}$ — наименьший идеал в $\mathfrak{g}$, такой, что $\mathfrak{g}/\mathfrak{s}$ редуктивна; 5) $\mathfrak{s}=\mathfrak{r}\cap\mathscr{D}\mathfrak{g}$; 6) $\mathfrak{s}=[\mathfrak{r},\ \mathfrak{g}]$; 7) $\mathfrak{s}$ есть пересечение наибольших подпространств, ортогональных к $\mathfrak{g}$ относительно билинейных форм, ассоциированных с конечномерными представлениями $\mathfrak{g}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

2р. 48 к.

Н. БУРБАКИ

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИКИ

ПЕРВАЯ ЧАСТЬ

Книга I. Теория множеств
Книга II. Алгебра
Книга III. Общая топология
Книга IV. Функции действительного переменного
Книга V. Топологические векторные пространства
Книга VI. Интегрирование

ВТОРАЯ ЧАСТЬ

Книга (без номера). Коммутативная алгебра
Книга (без номера). Группы и алгебры Ли
Книга (без номера). Спектральная теория

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

ГРУППЫ И АЛГЕБРЫ ЛИ

БУРБАКИ